

作者序

世界各國專家、學者對於數學教育皆一致的認為「問題解決」(Problem-Solving)才是當代數學教育的主流。「問題解決」不僅是解題的過程，其蘊含著應用數學於日常生活情境當中，建立適度的計算技能，並能利用數學去預測結果等。「美國數學督學協會」(NCSM)早在1976年即宣告揚棄新數學，提出「返回基本」(Back to Basic)的訴求，並獲得「美國數學教師協會」(NCTM)的呼應，特別重視四則運算與問題解決，其實說穿了就是所謂的「解題教學」。近年來九年一貫的數學課程綱要一再修訂與討論，終於塵埃落定，但是許多的學生、家長與老師卻陷入迷思，因為學生不知道要如何準備基測數學；家長不知道眾多版本中要選擇哪一個版本或者全部都學；而老師在教學創新與學生學習成效中迷惘了，忽略的解題教學的重要性。因此，數學的教學與學習應回歸到基本面，以問題解決為核心能力，重視基本技巧的養成，強化解題題材的建構，如此，不但是面對基本學力測驗胸有成竹，展望未來高中課程將更有信心。因此，本書提供面對基測的國三學生與教師下列必勝的菜單：

- 一 說謎解思 以是非題形式呈現，老師可以運用上課前十分鐘，有效且快速的鑑別學生能力，作為教學時的參考，讓學生更了解自己的程度。
- 二 師說演練 以對照的方式呈現，使得老師與學生的教學互動更為密切。
- 三 同步評量 提供即時熟練各種題型的機會，並加深學生學習印象。
- 四 基本觀念題 題目的難易度與題數適中，並且每題皆附詳解，方便學生自修與老師備課。
- 五 溫故歷屆基測試題 可以溫故而知新，熟練近年來基測題型，掌握出題方向。
- 六 模擬學力基測試題 可以知新而溫故，演練各種加深加廣題，有效提升自我效能。
- 七 學習地圖 Learning Map 以核心概念為出發點，將各單元重點以地圖方式串接而成，有系統的幫助記憶，揚棄傳統重點手冊。

因此，讀完本書，你可以獲得下列能力：

- (一) 熟稔各類型的基測數學題目樣式
- (二) 認識正確的概念並克服邏輯迷思
- (三) 提高計算能力並養成考試數學感
- (四) 有效的掌握複習進度與考試重點

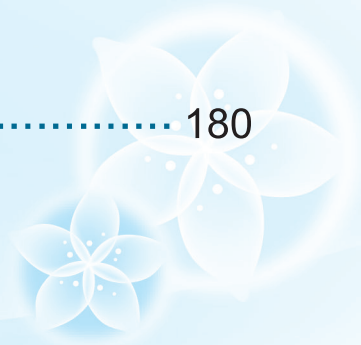
希望透過本書的幫助，能夠讓你順利考取心目中理想的學校，也減輕老師為同學總複習時的負擔。

孫信華

目次

第 1 單元	數線與絕對值	9
	能力一 正數與負數	
	能力二 數線與相反數	
	能力三 絕對值與數的大小	
	能力四 整數的加、減法運算	
第 2 單元	數的四則運算與科學記號	22
	能力一 有理數的四則運算	
	能力二 指數記法與指數律	
	能力三 十進位制與科學記號	
第 3 單元	因數與倍數	36
	能力一 因數與倍數	
	能力二 質數與質因數分解	
	能力三 公因數與最大公因數	
	能力四 公倍數與最小公倍數	
第 4 單元	一元一次方程式	49
	能力一 以符號列式	
	能力二 一次式的運算	
	能力三 一元一次方程式的應用	
第 5 單元	二元一次聯立方程式	60
	能力一 二元一次方程式的列式	
	能力二 代入消去法與加減消去法	
	能力三 二元一次聯立方程式的應用	
第 6 單元	直角坐標與二元一次方程式圖形	74
	能力一 直角坐標	
	能力二 函數與圖形	
	能力三 二元一次方程式的圖形	
第 7 單元	比與比例式	89
	能力一 比與比值	
	能力二 比例式與連比例	

第8單元	一元一次不等式	99
	能力一 不等式的列式	
	能力二 不等式的性質	
	能力三 一元一次不等式與應用	
第9單元	多項式	110
	能力一 多項式的意義與化簡	
	能力二 多項式的加減運算	
	能力三 多項式的乘除運算	
第10單元	乘法公式與因式分解	121
	能力一 乘法公式的展開與應用	
	能力二 一元二次式的因式分解	
第11單元	二次方根與商高定理	131
	能力一 二次方根的意義與化簡	
	能力二 二次方根的近似值	
	能力三 商高定理與應用	
第12單元	一元二次方程式	142
	能力一 一元二次方程式的解法	
	能力二 一元二次方程式的應用	
第13單元	數型關係、等差數列與級數	152
	能力一 數的規律與數型關係	
	能力二 等差數列與級數	
第14單元	平面圖形的基本性質	162
	能力一 三角形的邊角關係	
	能力二 三角形的全等性質	
	能力三 四邊形的基本性質	
	能力四 圓形、扇形的性質	
第15單元	立體圖形的基本性質	180
	能力一 立體圖形的性質	
	能力二 容積與容量	



第16單元	垂直、平分與平行	191
	能力一 垂直、平分與線對稱圖形	
	能力二 平行線的性質與判別	
	能力三 尺規作圖	
第17單元	四邊形的幾何推理	206
	能力一 四邊形的性質	
	能力二 中點連線的性質	
第18單元	相似形	217
	能力一 相似形的概念與應用	
第19單元	圓形	227
	能力一 圓、點與直線	
	能力二 圓形與角度	
	能力三 圓與多邊形	
第20單元	幾何證明與三角形的三心	241
	能力一 數學證明與推理	
	能力二 三角形的外心、內心、重心	
第21單元	二次函數	253
	能力一 二次函數的圖形	
	能力二 二次函數的極值	
第22單元	統計圖表與機率	263
	能力一 統計圖表的判讀	
	能力二 平均數、中位數與眾數	
	能力三 全距、四分位距、百分位數與盒狀圖	
	能力四 機率與抽樣	































版本對照表

單元	版本	康 軒	南 一	翰 林
單元 1 數線與絕對值	一上	第一章 整數的運算	一上 第一章 數與數線	一上 第一章 整數與數線
單元 2 數的四則運算與科學記號	一上	第一章 整數的運算 第二章 分數的運算	一上 第一章 數與數線 第二章 分數的運算	一上 第一章 整數與數線 第二章 分數的運算
單元 3 因數與倍數	一上	第二章 分數的運算	一上 第二章 分數的運算	一上 第二章 分數的運算
單元 4 一元一次方程式	一上	第三章 一元一次方程式	一上 第三章 一元一次方程式	一上 第三章 一元一次方程式
單元 5 二元一次聯立方程式	一下	第一章 二元一次聯立方程式	一下 第一章 二元一次聯立方程式	一下 第一章 二元一次聯立方程式
單元 6 直角坐標與二元一次方程式圖形	一下	第二章 直角坐標與二元一次方程式的圖形 第四章 線型函數及其圖形	一下 第二章 平面直角坐標系 第四章 函數及其圖形	一下 第二章 直角坐標與二元一次方程式圖形 第四章 線型函數
單元 7 比與比例式	一下	第三章 比與比例式	一下 第三章 比例	一下 第三章 比例
單元 8 一元一次不等式	一下	第五章 一元一次不等式	一下 第五章 一元一次不等式	一下 第五章 一元一次不等式
單元 9 多項式	二上	第一章 乘法公式與多項式	二上 第一章 乘法公式與多項式	二上 第一章 多項式與乘法公式
單元 10 乘法公式與因式分解	二上	第一章 乘法公式與多項式 第三章 因式分解	二上 第一章 乘法公式與多項式 第三章 因式分解	二上 第一章 多項式與乘法公式 第三章 因式分解
單元 11 二次方根與商高定理	二上	第二章 平方根與勾股定理	二上 第二章 平方根與勾股定理	二上 第二章 二次方根與勾股定理

單元 \ 版本	康 軒	南 一	翰 林
單元 12 一元二次方程式	二上 第四章 一元二次方程式	二上 第四章 一元二次方程式	二上 第四章 一元二次方程式
單元 13 數型關係、等差數列與等差級數	二下 第一章 等差數列與等差級數	二下 第一章 數列與等差級數	二下 第一章 數列與級數
單元 14 平面圖形的基本性質	二下 第二章 幾何圖形與尺規作圖 第三章 三角形的基本性質	二下 第二章 簡單幾何圖形 第三章 三角形的性質	二下 第二章 幾何圖形 第三章 三角形的性質
單元 15 立體圖形的基本性質	二下 第二章 幾何圖形與尺規作圖	二下 第二章 簡單幾何圖形	二下 第二章 幾何圖形
單元 16 垂直、平分與平行	二下 第二章 幾何圖形與尺規作圖	二下 第二章 簡單幾何圖形	二下 第二章 幾何圖形
單元 17 四邊形的幾何推理	二下 第四章 平行	二下 第四章 平行與四邊形	二下 第四章 平行與四邊形
單元 18 相似形	三上 第一章 相似形	三上 第一章 比例線段與相似形	三上 第一章 相似形
單元 19 圓形	三上 第二章 圓形	三上 第二章 圓的性質	三上 第二章 圓形
單元 20 幾何證明與三角形的三心	三上 第三章 幾何與證明	三上 第三章 幾何證明	三上 第三章 三角形的心
單元 21 二次函數	三下 第一章 二次函數	三下 第一章 二次函數	三下 第一章 二次函數
單元 22 統計圖表與機率	三下 第二章 敘述統計 第三章 機率與抽樣	三下 第二章 資料的整理與分析 第三章 機率與抽樣	三下 第二章 統計與機率

複習進度表

可依老師規畫及學生個人狀況自行調整，方便實用！

單元名稱	日期	熟練度
單元 1 數線與絕對值	年 月 日	  
單元 2 數的四則運算與科學記號	年 月 日	  
單元 3 因數與倍數	年 月 日	  
單元 4 一元一次方程式	年 月 日	  
單元 5 二元一次聯立方程式	年 月 日	  
單元 6 直角坐標與二元一次方程式	年 月 日	  
單元 7 比與比例式	年 月 日	  
單元 8 一元一次不等式	年 月 日	  
單元 9 多項式	年 月 日	  
單元 10 乘法公式與因式分解	年 月 日	  

請搭配 KO 基測複習卷一起複習，效果更佳！

單元名稱	日期	熟練度
單元 11 二次方根與商高定理	年 月 日	
單元 12 一元二次方程式	年 月 日	
單元 13 數型關係、等差數列與級數	年 月 日	
單元 14 平面圖形的基本性質	年 月 日	
單元 15 立體圖形的基本性質	年 月 日	
單元 16 垂直、平分與平行	年 月 日	
單元 17 四邊形的幾何推理	年 月 日	
單元 18 相似形	年 月 日	
單元 19 圓形	年 月 日	
單元 20 幾何證明與三角形的三心	年 月 日	
單元 21 二次函數	年 月 日	
單元 22 統計圖表與機率	年 月 日	

第 1 單元

數線與絕對值

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★☆☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★★

9

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少？測驗就知道！

(X) 1. 最小的自然數為 0。

💡 最小的自然數為 1

能力一

(X) 2. 有五個連續自然數的和為 75，其中最小的自然數為 15。

💡 $75 \div 5 = 15 \Rightarrow 13、14、15、16、17 \Rightarrow$ 最小的自然數為 13

(O) 3. 若 $\frac{1}{a}$ 與 $\frac{1}{b}$ 互為相反數，則 $a + b = 0$ 。

💡 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow \frac{b+a}{ab} = 0 \Rightarrow a+b=0$

能力二

(X) 4. 數線上 A(-1)、B(-2) 兩點之間劃分 4 格，從 B 點數過來的第三格為 $-1\frac{3}{4}$ 。

💡 應為 $-1\frac{1}{4}$

(O) 5. 有一烏龜標本，若以 2 公分為度量單位量之，所得的數為 A (整數)；若以 8 公分為度量單位量之，所得的數為 B (整數)，則其關係為 $A = 4B$ 。

💡 $2A = 8B, A = 4B$

(O) 6. 在數線上要標出 -2.75 的位置，至少要將 -2 與 -3 兩點間分成 4 格。

💡 $-2.75 = -(2\frac{3}{4}) \Rightarrow$ 故至少分成 4 格

(X) 7. 若 A、B 均為負數，且 $A > B$ ，則 $|A| > |B|$ 。

💡 $\because A < 0, B < 0, \text{且 } A > B, \therefore |A| < |B|$

能力三

(X) 8. 絕對值小於 8 的整數共有 17 個。

💡 絕對值小於 8 的整數有 -7、-6、-5……-1、0、1、2、……6、7，共 15 個

(O) 9. 若 $a < b$ ，則 $|a - b| + |b - a| = (b - a) + (b - a)$ 。

💡 $\because a < b \therefore |a - b|$ 可表示為 $(b - a)$

(O) 10. 若 $a < 0$ ，則 $|a - 4|a|| = -5a$ 。

💡 $\because a < 0 \therefore |a - 4(-a)| = |5a| = -(5a)$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

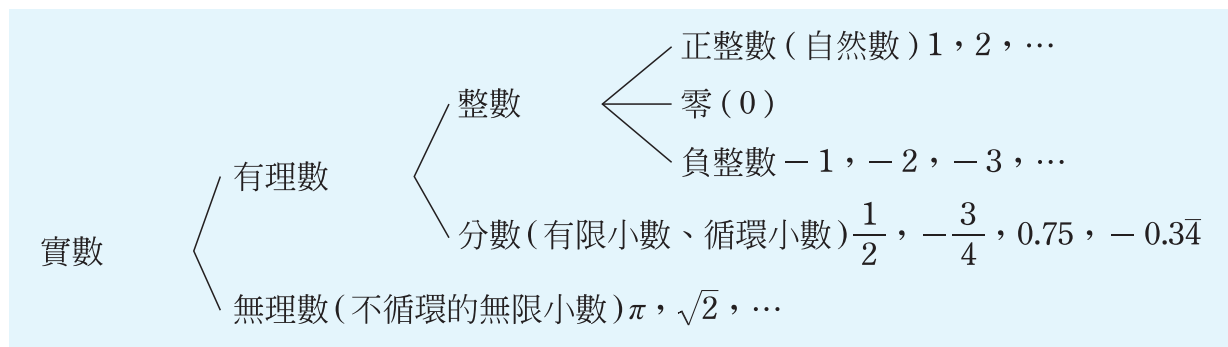
答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力 一 正數與負數

一 數 (正數與負數)

國中所學的「數」皆包含在「實數系」中。請同學參考下圖。



1. 正數：凡是大於 0 的數，稱為「正數」，以「+」表示（可省略）。
2. 負數：凡是小於 0 的數，稱為「負數」，以「-」表示。
3. 零：0 不是正數也非負數，在數線中可稱為原點或中性數；若以奇、偶性質來說：「0 是偶數」。

師說 1

〈正負數的概念〉

演練 1

NBA 教練團選秀的標準以身高 180 公分為標準，俠客歐尼爾身高 216 公分記為 +6，請回答下列各題：

- (1) 姚明身高是 228 公分，應記為 +8。
- (2) 賈奈特身高記為 +5，則其身高應為 210 公分。
- (3) 麥格雷迪、布萊恩、詹姆斯三人的平均身高記為 +4，則三人平均身高 204 公分。
- (4) 若布萊恩身高記為 +2、詹姆斯身高 204 公分，麥格雷迪身高應記為 +6。

解

- 單位長 = $(216 - 180) \div 6 = 6$
- (1) $228 - 216 = 12 \rightarrow 2$ 個單位長
 - (2) $180 + 5 \times 6 = 210$
 - (3) $180 + 6 \times 4 = 204$
 - (4) $4 + 2 + \square = 4 \times 3, \square = +6$

狄士尼兒童樂園中，以米老鼠的體重 36 公斤為標準，唐老鴨的體重 30 公斤記為 -3，請回答下列問題：

- (1) 米妮體重是 28 公斤，應記為 -4。
- (2) 古菲狗體重記為 +6，則其體重應為 48 公斤。
- (3) 史努比、維尼小熊、凱蒂貓等三隻動物的平均體重記為 +8，則三隻動物平均體重為 52 公斤。
- (4) 若史努比體重記為 +2、維尼小熊體重 60 公斤，凱蒂貓的體重應記為 +10。

解

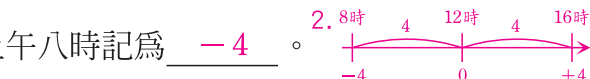
- 單位長 = $(36 - 30) \div 3 = 2$
- (1) $(28 - 36) \div 2 = -4$
 - (2) $36 + 6 \times 2 = 48$
 - (3) $36 + 8 \times 2 = 52$
 - (4) $(60 - 36) \div 2 = 12, 12 + 2 + \square = 8 \times 3$
 $\Rightarrow \square = +10$

同步評量 1

1. 小鐘 1 分鐘走 120 公尺，小馬 30 秒走 90 公尺，小賢 1 小時走 18 公里，請問：三人走的速度快慢為何？ 小賢 > 小馬 > 小鐘。

1. \therefore 小鐘速度 = $\frac{120(m)}{60(s)} = 2(m/s)$ ；小馬速度 = $\frac{90(m)}{30(s)} = 3(m/s)$ ；
 小賢速度 = $\frac{18000(m)}{3600(s)} = 5(m/s)$ \therefore 小賢 > 小馬 > 小鐘

2. 若以中午十二時為準，下午四時記為+4，則上午八時記為 -4。
3. 老師說：「以穿堂中的時鐘 12 點為準，上午 7 時以+5 表示。」則上午 10 點應以 +2 表示，下午 4 點放學應以 -4 表示。
4. CASIO 電子錶若成本 300 元，今以定價 200 元賣出則賠 100 元，以-10 表示，若以定價 360 元賣出，應記為 +6，若以定價 360 元減 20 元賣出，應記為 +4。
5. 假設以昆勳的體重 45 公斤為準，柏超的體重 48 公斤記為+3，請回答下列問題：
- (1) 宇倫的體重 37 公斤，應記為 -8。
- (2) 育茹體重 53 公斤，記為+8。
- (3) 宇倫、育茹、柏超、良宜平均體重為 44 公斤，記為-1。
- (4) 良宜的體重為 38 公斤，記為 -7。

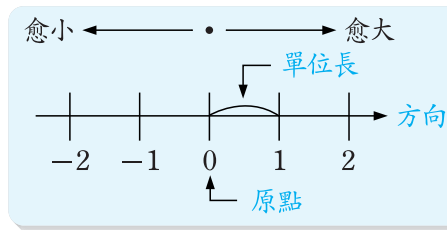


5. (1) $37 - 45 = -8$, (2) $45 + 8 = 53 (kg)$,
 (3) $45 - 1 = 44 (kg)$,
 (4) $\frac{37 + 53 + 48 + \text{良宜}}{4} = 44 (kg)$,
 良宜 = $38 (kg)$, $38 - 45 = -7$

能力 數線與相反數

一 數線

- 數線的三大要素：**原點**(0)、**方向**(向右為正，需畫箭頭)、**單位長**(自訂)。
- 原點的左邊為負，原點的右邊為正。
- 在數線上「右方的數」>「左方的數」。
- 數線上 A、B 兩點分別是 a、b，且 $a > b$ ，則 A、B 距離為 $\overline{AB} = |a - b| = a - b$ (大 - 小)；
 \overline{AB} 中點坐標 = $\frac{a + b}{2}$ 。
- 坐標變換：新坐標 = (原數 - 新原點坐標) ÷ 新單位長。



二 相反數

- 相反數**：在原點的左、右兩邊且與原點距離相等的兩數，稱為相反數。
- 性質：(1) 每一個數都有一個相反數。
 (2) 正數的相反數為負數，負數的相反數為正數，**0 的相反數是 0**。
 (3) **A 與 B 互為相反數，則 $A + B = 0$** 。
 (4) 在數線上的兩點互為對稱點。
- 相反數的求法：只要將一個數加上「負號」就可以了。
例1：7 的相反數 $\Rightarrow -7$ ； (-7) 的相反數 $\Rightarrow -(-7) = +7$

師說 2

〈數線上點的位置與大小〉

演練 2

12

數線上有 A 、 B 、 C 三點，所表示的數分別是 56、45、27。若有一 D 點在 C 點的右邊，而且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則 D 點所代表的數是多少呢？

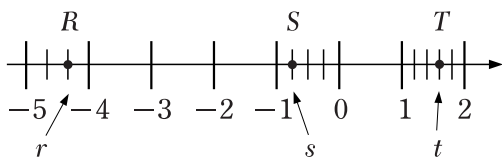
解



$$\therefore \overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow 56 - 45 = D - 27$$

$$\therefore D \text{ 點} = 27 + 11 = \underline{38}$$

R 、 S 、 T 是數線上的三點，其坐標分別是 r 、 s 、 t ，若 $a = |r - s|$ ， $b = |s - t|$ ， $c = |t - r|$ ，求 r 、 s 、 t 所表示的坐標值為何？又 a 、 b 、 c 大小應為何？



解

$$(1) r = -4 \frac{1}{3}, s = -\frac{3}{4}, t = 1 \frac{3}{5}$$

$$(2) a = |r - s| = \overline{RS}, b = |s - t| = \overline{ST}, \\ c = |t - r| = \overline{TR}, \text{ 由圖可知 } \overline{TR} > \overline{RS} > \overline{ST} \\ \therefore \underline{c > a > b}$$

師說 3

〈數線上點的距離與相反數〉

演練 3

若數線上有相異四點， $A(-8)$ 、 $B(-2)$ 、 $C(2)$ 、 $D(6)$ 。請問：(1) $\overline{AB} = ?$ (2) 若新的單位長為原單位長的兩倍，則 \overline{AD} 為多少個新單位長？(3) B 點的相反數是哪一點？

解

$$(1) \overline{AB} = (-2) - (-8) = \underline{6}$$

$$(2) \frac{\overline{AD}}{\text{單位長}} = \frac{6 - (-8)}{2} = \underline{7}$$

$$(3) B \text{ 點的數} = (-2), \text{ 相反數} -(-2) = 2; \\ \underline{B \text{ 點的相反數是 } C \text{ 點}}$$

在數線上有 $A(-7)$ 、 $B(-1)$ 、 C 三點，則

$$(1) \text{ 若 } 3\overline{AB} = 2\overline{AC}, \text{ 求 } \overline{AC} = ?$$

$$(2) \text{ 求 } C \text{ 點坐標?}$$

$$(3) \text{ 若新的單位長為原單位長的三倍, } \overline{AC} \text{ 為多少個新單位長?}$$

解

$$(1) \overline{AB} = (-1) - (-7) = 6, \\ 3 \times 6 = 2 \times \overline{AC}, \overline{AC} = 18 \div 2 = \underline{9}$$

$$(2) \therefore \overline{AC} = 9, |C - (-7)| = 9 \\ \Rightarrow |C + 7| = 9 \Rightarrow C + 7 = \pm 9 \\ \Rightarrow \underline{C = 2 \text{ 或 } -16}$$

$$(3) \frac{\overline{AC}}{3} = \frac{9}{3} = \underline{3}$$

師說 4

〈數線上點的位置變動關係〉

演練 4

數線上 $A(-3)$ 、 $B(2)$ 、 $C(8)$ ，若改以 B 點為新原點， A 、 C 的新坐標分別為 P 、 Q ，且 \overline{PQ} 中點為 M 。則 (1) 若單位長不變，則 P 、 Q 分別為多少？又 \overline{PQ} 中點坐標 M 為何？(2) 若以原單位長的 $\frac{1}{2}$ 為新單位長，則 \overline{PQ} 的距離為何？又新 P 、 Q 所代表的值為何？

解

(1) 新坐標 = (原數 - 新原點坐標) \div 新單位長

$$P \text{ 點} : (-3) - 2 = \underline{-5},$$

$$Q \text{ 點} : 8 - 2 = \underline{6},$$

$$\overline{PQ} \text{ 的中點 } M = \frac{6 + (-5)}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

(2) $\overline{PQ} = 6 - (-5) = 11$ ， $11 \div \frac{1}{2} = \underline{22}$ ，

$$P_{\text{新}} = 6 \div \frac{1}{2} = \underline{12},$$

$$Q_{\text{新}} = (-5) \div \frac{1}{2} = \underline{-10}$$

有一隻兔子在標有數線的跑道上，從坐標值為 -4 的 A 點開始向右跳，每次跳躍的距離都相等，而且方向不變，跳第三次時，落在坐標為 8 的 B 點，若跳第二十次，會落到 C 點，試問：(1) C 點坐標為何？(2) 若兔子改以 B 點為起點向右跳，以原單位長的 $\frac{1}{2}$ 為新單位長，則 C 點的新坐標為何？

解

$$(1) \overline{AB} = 8 - (-4) = 12;$$

$$\text{單位長} = 12 \div 3 = 4;$$

$$C \text{ 點} = (-4) + (20 \times 4) = \underline{76}$$

$$(2) \overline{BC} = 76 - 8 = 68; C_{\text{新}} = 68 \div \frac{1}{2} = \underline{136}$$

師說 5

〈相反數的概念〉

演練 5

- 請寫出 -6.4 、 $-(-3)$ 、 0 的相反數？
- 若 $(a + 13)$ 的相反數是 8 ，請問： $a = ?$
- 數線上 A 、 B 兩點分別是 4 和 8 ，則向左移動多少單位之後， A 、 B 兩點的新坐標會與原點的距離相等？移動後兩點所表示的數為何？

解

1. -6.4 相反數為 $\underline{6.4}$ ；

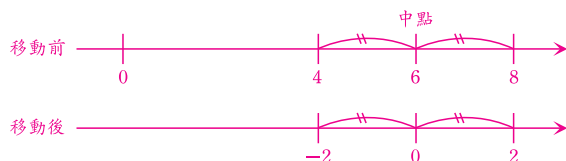
$$-(-3) = 3 \text{ 相反數為 } \underline{-3};$$

$$0 \text{ 相反數為 } \underline{0}$$

2. $(a + 13)$ 的相反數是 8 ，

$$\text{即 } (a + 13) = \underline{-8}; a = -8 - 13 = \underline{-21}$$

3. 數線上與原點距離相等的兩點互為相反數， \overline{AB} 的中點為 $(8 + 4) \div 2 = 6$ ，即 \overline{AB} 向左移動 6 個單位後兩點與原點距離相等，則移動後的 A 點為 $4 - 6 = \underline{-2}$ ， B 點為 $8 - 6 = \underline{2}$



- 請寫出 6.3 、 -4 、 $-(-2.3)$ 的相反數？
- 若 -9 的相反數是 $-A$ ， A 的倒數是 B ，則 $B = ?$
- 數線上 A 、 B 兩點分別是 -6 、 -2 ，則同時向右移動多少單位之後，此兩點與原點的距離相等？移動後兩點所表示的數為何？

解

1. 6.3 相反數為 $\underline{-6.3}$ ； -4 相反數為 $\underline{4}$ 、 $-(-2.3)$ 相反數為 $\underline{-2.3}$

2. -9 的相反數是 9 ， $-A = 9$

$$\Rightarrow A = -9, B = \underline{-\frac{1}{9}}$$

3. $(-6) + (-2) = (-8)$ ； $(-8) \div 2 = -4$

即兩數同時向右移動 4 個單位。

$$\text{移動後 } A \text{ 點} = (-6) + 4 = \underline{-2},$$

$$\text{移動後 } B \text{ 點} = (-2) + 4 = \underline{2}$$

同步評量 2

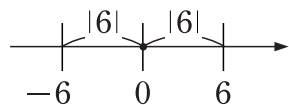
14

- 有一條標示數線的電纜線上站了一隻麻雀，麻雀從A電桿出發，向右走8個單位，再向左走5個單位，又向右走11個單位到達B電桿，已知B電桿的坐標為5，則A電桿的坐標應該為 -9。
 $1. A \text{ 坐標} = 5 - 11 + 5 - 8 = -9$
- 數線上有A、B、C、D、E五點，坐標分別為 $-1\frac{1}{3}$ 、-3、0、2、0.5，則哪兩點間的距離最長？BD；哪兩點間的距離最短？CE。
 $2. \overline{BD} = |2 - (-3)| = 5,$
 $\overline{CE} = |0.5 - 0| = 0.5$
- 數線上A、B、C三點各表示的數為-3、1、6，今若以C點為新原點，而新單位長是原單位長的 $\frac{1}{3}$ ，則A點新坐標為-27；B點新坐標為-15；新 \overline{AB} 的距離為12；新 \overline{AB} 中點坐標M為-21。
 $3. A \text{ 新坐標} = [(-3) - 6] \times 3 = -27, B \text{ 新坐標} = (1 - 6) \times 3 = -15,$
 $\text{新 } \overline{AB} = |(-15) - (-27)| = 12, \text{新 } \overline{AB} \text{ 中點坐標} = \frac{(-15) + (-27)}{2} = -21$
- 數線上有A(-4)、B(16)兩點，今A、B兩點應同時向左移動6個單位長，方能使得新的兩點互為相反數。
 $4. \text{ (Diagram showing points A at -4 and B at 16 moving left by 6 units to -10 and 10 respectively.)}$
- 已知A、B兩數互為相反數，且 $\overline{AB} = 42$ ，若 $A > B$ ，則 $A =$ 21； $B =$ -21。
 $5. A、B \text{ 互為相反數，則此兩點至原點距離相等，} 42 \div 2 = 21, \text{ 又 } A > B \therefore A = 21, B = -21$

能力 絕對值與數的大小

一 絕對值的概念

- 絕對值：數線上任一點與原點的距離，稱為該數的絕對值，以符號“| |”表示。因為距離沒有負的，故絕對值必大於或等於0。



例2： $|8| = 8, |-6| = 6, |0| = 0$ 。

二 絕對值的性質

- $|x| = \begin{cases} x, & \text{當 } x \geq 0 \\ -x, & \text{當 } x < 0 \end{cases}$ ($|x|$ 表示 x 到原點的距離)
- $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$ ，但當 $a < 0 \Rightarrow$ 則 x 不存在或稱無解。

三 數的比較大小

- 三一律：A、B兩數的大小關係可能有 $A > B$ 、 $A = B$ 、 $A < B$ 等三種情形，其中僅有一種關係會成立。
- 遞移律：若有A、B、C三個數，則下列關係必成立。
 - 若 $A > B$ ，且 $B > C$ ，則 $A > C$ ；
 - 若 $A = B$ ，且 $B = C$ ，則 $A = C$ ；
 - 若 $A < B$ ，且 $B < C$ ，則 $A < C$ 。
- 數線上「左方的數」 $<$ 「右方的數」。

例3： $-8 < -6$ ； $-2 < 0$ ； $1.2 < 3$ 。

注意 若 $A > C$ ，且 $B > C$ ，無法比較出A、B兩數大小。

師說 6

〈絕對值的概念〉

演練 6

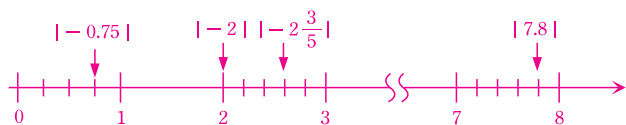
請在數線上標示出 -2 、 -0.75 、 7.8 、 $-2\frac{3}{5}$ 各數絕對值的位置，並比較其大小。

解

(1) $|-2| = 2$; $|-0.75| = 0.75$;

$|7.8| = 7.8$; $|-2\frac{3}{5}| = 2\frac{3}{5}$

(2) $|7.8| > |-2\frac{3}{5}| > |-2| > |-0.75|$



試先比較 -3 、 4.3 、 -6.5 、 0 、 $-[-(-1\frac{3}{4})]$

各數的大小，再比較其絕對值大小。

解

(1) $4.3 > 0 > -[-(-1\frac{3}{4})] > -3 > -6.5$

(2) $|-3| = 3$; $|4.3| = 4.3$;

$|-6.5| = 6.5$; $|0| = 0$;

$|-[-(-1\frac{3}{4})]| = 1\frac{3}{4}$

$|-6.5| > |4.3| > |-3| >$

$|-[-(-1\frac{3}{4})]| > |0|$

師說 7

〈絕對值與整數的個數〉

演練 7

- 絕對值小於 4 的整數、正整數、負整數、分數有哪些？
- 若 B 數為整數，且絕對值小於 B 數的負整數共有 5 個，求 B 數為何？
- 絕對值小於 7 的整數共有幾個？

解

1. $|x| < 4$ 的整數： ± 3 、 ± 2 、 ± 1 、 0

$|x| < 4$ 的正整數： 1 、 2 、 3

$|x| < 4$ 的負整數： -3 、 -2 、 -1

$|x| < 4$ 的分數：無限多

2. 絕對值小於 B 數的最大整數為 5，則 B 數為 6

3. 有 0 ， ± 1 ， ± 2 ， ± 3 ， ± 4 ， ± 5 ， ± 6 ，
共 13 個數

- 若 A 數為整數，且絕對值小於 A 數的整數共有 7 個，求 A 數為何？
- 絕對值小於 4 且大於等於 1 的整數有哪些？
- 若 C 數為整數，且絕對值不大於 C 數的整數共有 9 個，求 C 數為何？

解

1. $(7-1) \div 2 = 3$; A 數 = $3+1=4$

2. 若 $1 \leq |x| < 4$,

滿足 x 的整數有 ± 3 、 ± 2 、 ± 1

3. 絕對值不大於 C 數的最大整數為

$(9-1) \div 2 = 4$; C 數為 4

解題小偏方

(1) 小於 x 、大於 $x \Rightarrow$ 不包含 x 。

(3) 0 是整數，但不是正整數或負整數。

(4) 「不大於」即是「小於等於」；「不小於」即是「大於等於」。

(2) 小於等於 x 、大於等於 $x \Rightarrow$ 包含 x 。

師說 8

〈絕對值的運算〉

演練 8

16

- $|4 + (-7)|$ 與 $|4| + |-7|$ 的大小關係？
- 若 $|A| - |-5| = 8$ ，則 A 數為何？
- 若 $|4 - A| + |B + 5| = 0$ ，求 A 、 B 兩數為何？
- $|-9 + 4| \times |4 + (-9)| + 10 = ?$

解

- $|4 + (-7)| = |4 - 7| = |-3| = 3$;
 $|4| + |-7| = 4 + 7 = 11$;
 $|4 + (-7)| < |4| + |-7|$
- $|A| - |-5| = 8$;
 $|A| = 8 + |-5| = 8 + 5 = 13$; $A = \pm 13$
- $|4 - A| + |B + 5| = 0$
 因為任意數的絕對值 ≥ 0 ，正數與正數相加不可能為 0，因此只有一種可能，就是 $0 + 0 = 0$ 。
 $\Rightarrow |4 - A| = 0, 4 - A = 0, A = 4$
 $|B + 5| = 0, B + 5 = 0, B = -5$
- $|-9 + 4| \times |4 + (-9)| + 10$
 $= |-5| \times |-5| + 10 = 5 \times 5 + 10 = 35$

- $|(-4) + (-6)|$ 與 $|-4| + |-6|$ 的大小關係？
- $16 \div |A| = 4$ 與 $|B| \div 3 - 5 = 3$ ； A 、 B 應為多少？
- 若 A 、 B 兩整數，且 $|A| + |B| = 16$ ，求 A 的最大值與最小值？
- $|-13 + 12| \div |13 + (-12)| - 1 = ?$

解

- $|(-4) + (-6)| = |-10| = 10$;
 $|-4| + |-6| = 4 + 6 = 10$;
 $\Rightarrow |(-4) + (-6)| = |-4| + |-6|$
- $16 \div |A| = 4$; $|A| = 16 \div 4 = 4$;
 $A = \pm 4$
 $|B| \div 3 - 5 = 3$; $|B| = (3 + 5) \times 3$;
 $|B| = 24$; $B = \pm 24$
- 當 $B = 0$ 時; $|A| = 16$ ，則 $A = \pm 16$;
 因此 A 有最大值 16，最小值 -16
- 原式 $= |-1| \div |1| - 1 = 1 - 1 = 0$

同步評量 3

(C) 1. 若 $a = 6, b = -10$ ，則下列何式的值會最小呢？

- (A) $|a + b|$ (B) $|a - b|$
 (C) $|a| - |b|$ (D) $|a| + |b|$

(A) 2. 若 $a + 3 = b + 11 = c - 5$ ，則 a 、 b 、 c 三數大小為何？

- (A) $b < a < c$ (B) $c < a < b$ (C) $a < b < c$ (D) $b < c < a$

(B) 3. 已知 A 、 B 、 C 三實數，且 $|A - 0.5| + |B + 2| + |C + 1.5| = 0$ ，試求 $A + B + C = ?$

- (A) -4 (B) -3 (C) 4 (D) 3

(A) 4. 設 A 、 B 為有理數，已知 $|A| + |B| = 5$ ，則 A 絕對不會是下列哪一個數？

- (A) -6 (B) -3 (C) 0 (D) 4
 4. \because 絕對值不可能小於 0
 \therefore 若 $A = -6, |-6| = 6, 6$ 加任何正數及 0 都會大於 5

(D) 5. 假設 x 為整數，若 $|x - 5| + |x + 5| = 0$ ，則 x 的值為何？

- (A) 0 (B) -5 (C) 5 (D) 不存在
 5. 沒有一個數會同時等於 5 和 -5

(C) 6. 絕對值小於 $99 \frac{1}{2}$ 的所有整數和為何？

- (A) -100 (B) -99 (C) 0 (D) 99

1. (A) $|6 + (-10)| = 4$
 (B) $|6 - (-10)| = 16$
 (C) $|6| - |-10| = 6 - 10 = -4$
 (D) $|6| + |-10| = 6 + 10 = 16$

2. $\because 11 > 3 > (-5)$,
 且 $a + 3 = b + 11 = c - 5$,
 $\therefore b < a < c$

3. $A + B + C = 0.5 + (-2) + (-1.5) = -3$

6. $99 + 98 + \dots + 0 + \dots + (-98) + (-99) = 0$

能力四 整數的加、減法運算

一 加法

設 a 、 b 都是正整數，則：

1. $(-a) + (-b) = -(a + b)$ 。
2. 若 $a > b$ 時， $(-a) + b$ 的結果是負數，其和為 $-(a - b)$ 。
3. 若 $a < b$ 時， $(-a) + b$ 的結果是正數，其和為 $(b - a)$ 。
4. 若 b 為 a 的相反數， $a + b = a + (-a) = 0$ 。

二 減法

「減」就是「加」的反運算。若 a 、 b 是整數，則 $a - b$ 就是 a 加上 b 的相反數， $a - b = a + (-b)$ 。

三 加法交換律與結合律

1. **交換律**：若 a 、 b 為任意實數，則 $a + b = b + a$ 。
2. **結合律**：若 a 、 b 、 c 為任意實數，則 $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。

師說 9

〈整數的加、減法運算〉

演練 9

1. $156 + (-137) + (-156) = ?$
2. $9 + (-8) - (-7) + (-6) = ?$
3. $-(5 - 9) - [-(-14) + 27] + \{-[-14 + (-18) - 23] - 14\} = ?$
4. $\frac{|(-3) + (-8)| - |(-3) - (-8)|}{|(-3) - 8| + |(-3) + 8|} = ?$

解

1. 原式 = $156 - 156 - 137 = -137$
2. 原式 = $9 - 8 + 7 - 6 = 2$
3. 原式 = $-(-4) - [14 + 27] + \{-[-14 - 18 - 23] - 14\}$
 $= 4 - 41 + \{14 + 18 + 23 - 14\}$
 $= 4 - 41 + 41 = 4$
4. 原式 = $\frac{|-11 - 5|}{11 + 5} = \frac{16}{16} = 1$

1. $(-5) + 7 + (-6) + (-8) = ?$
2. $[(-12345679) + 899931] + (-899930) = ?$
3. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 49 - 50 + 51 = ?$
4. 設 Φ 是一個新的運算符號，其定義為 $a \Phi b = |a| - b$ ，求 $5 \Phi (-4) = ?$

解

1. 原式 = $-(5 + 6 + 8) + 7 = (-19) + 7 = -12$
2. 原式 = $(-12345679) + [899931 + (-899930)] = (-12345679) + 1 = -12345678$
3. 原式 = $(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (49 - 50) + 51 = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + 51 = (-25) + 51 = 26$
4. $a \Phi b = |a| - b$ ，
 $5 \Phi (-4) = |5| - (-4) = 5 + 4 = 9$

師說 10

〈整數加、減法運算的應用〉

演練 10

18

下表是 1 年 18 班八位同學的體重與全班平均體重相差數的一覽表，已知莉婷的體重是 34 公斤，試回答下列各問題：

姓名	珮羚	芳妤	亭昀	莉婷	羿嘉	昱帆	育茹	吟青
體重與平均體重的差(公斤)	-7	12	-2	-6	0	8	-1	4

- 全班的平均體重為多少公斤？
- 亭昀比育茹重或輕幾公斤？
- 吟青比珮羚重或輕幾公斤？
- 芳妤重多少公斤？
- 羿嘉重多少公斤？

解

- 平均體重 = $34 + 6 = 40$ (公斤)
- $(-2) - (-1) = (-2) + 1 = -1$ ；輕 1 公斤
- $4 - (-7) = 11$ ；重 11 公斤
- $40 + 12 = 52$ (公斤)
- $40 + 0 = 40$ (公斤)

同步評量 4

- $7 - [-(-2) + 5] = 0$ 。
1. 原式 = $7 - [2 + 5] = 0$
- $-[-5 + (-13) - 5] - 8 = 15$ 。
2. 原式 = $-[-5 - 13 - 5] - 8 = 23 - 8 = 15$
- 假設 $-(-8)$ 、 (-9) 、 6 、 $|12|$ 的相反數分別為 a 、 b 、 c 、 d ，試問 $a - b + c - d = -11$ 。
3. $a - b + c - d = (-8) - 9 + (-6) - (-12) = -11$
- 下列四個式子 $A + (-6) = -18$ ， $B + (-14) = 0$ ， $(-14) - C = 3$ ， $D - 9 = -11$ ，則 A 、 B 、 C 、 D 最大的是 B 。
4. $A = -18 + 6 = -12$ ， $B = 14$ ， $C = (-14) - 3 = -17$ ， $D = -11 + 9 = -2$
- 假設 $A + 9 = B - 7 = C + 6$ ，則 A 、 B 、 C 三數中最小者為 A 。
5. 令 $A + 9 = B - 7 = C + 6 = 0$
 $\rightarrow A = -9$ ， $B = 7$ ， $C = -6$
 $\therefore A$ 最小
- $\frac{|(-1) + (-2) - |(-1) - (-2)||}{|(-1) - 2| + |(-1) + 2|} = 1$
6. 原式 = $\frac{|(-3) - 1|}{|-3| + |1|} = \frac{|-4|}{3 + 1} = \frac{4}{4} = 1$
- $1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) + \dots + 101 = 51$ 。
7. 原式 = $(-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + 101 = (-50) + 101 = 51$
- 已知有兩個負整數甲、乙，其中甲 + 乙 = -2，則甲 - 乙的值為 0。
8. 已知最大負整數為 (-1) ， $(-1) + 乙 = -2$ ， $乙 = -1$ ， $甲 - 乙 = (-1) - (-1) = 0$
- 有四個數 (-5) 、 (-3) 、 (-1) 、 8 ，任意選擇三個數 a 、 b 、 c ，則 $(a - b) + c$ 的最大值為 12。
9. $(a - b) + c = (a + c) - b$ ，欲求最大值，則 a 、 c 應為四數中較大的兩個數， b 為最小的數
 $\therefore 8 + (-1) - (-5) = 7 + 5 = 12$
- 福利社舉辦母親節感恩回饋大拍賣，將每罐成本 10 元的優酪乳以 8 元售出，但原價為 15 元，請問：原價與售價的價差為 7 元，則賣一打優酪乳是(賺或賠) 賠 24 元。
10. 原價與售價之價差 = $15 - 8 = 7$ (元)，一罐賠 2 元，一打賠 $2 \times 12 = 24$ (元)

若以 (+) 代表溫度上升，(-) 代表溫度下降，且腋溫超過 37°C 是發燒。已知小芳感冒了，早上 10:00 的體溫是 38°C，她一天的體溫與平均體溫的差如下表，試回答下列問題：

時間	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00
體溫與平均體溫的差(°C)	-1	1	0	2	-1

- 請問她的平均體溫是多少？
- 她在哪一個時間區間體溫高低相差最多？
- 請問下午 14:00 的體溫是多少？
- 哪些時間沒有發燒呢？

解

- 平均體溫 = $38 - 1 = 37^\circ\text{C}$
- $2 - (-1) = 2 + 1 = 3^\circ\text{C}$ ；14:00~16:00
- $37 + 2 = 39^\circ\text{C}$
- $37 - 1 = 36 < 37$ ，
早上 8:00，中午 12:00 及下午 16:00 沒發燒



基本觀念題

- (D) 1. 下列四個等式何者不成立？
- (A) $(23 + 7) - 9 = 23 + (7 - 9)$ 1. (D) $(-138) + 73 = 73 + (-138) = 73 - 138$
 (B) $(66 - 22) - 13 = 66 - (22 + 13)$
 (C) $(-56) + [-(-66)] = [-(-66)] + (-56)$
 (D) $(-138) + 73 = 73 - (-138)$
- (B) 2. 下列敘述何者正確？
- (A) $13 + |-13| = 0$ ，所以 13 與 -13 互為相反數 2. (A) $13 + |-13| = 26$
 (B) 0 的相反數為 0 (B) 0 的相反數是自己
 (C) 數線上，A、B 兩數與 5 的距離相同，所以 A、B 兩數互為相反數 (C) 相反數相加為 0，不是 5
 (D) $3\frac{2}{3}$ 與 $-3\frac{3}{2}$ 互為相反數 (D) $3\frac{2}{3} + (-3\frac{3}{2}) \neq 0$ ，不是相反數
- (D) 3. 已知 $a = 6$ ， $b = -8$ ， $c = 14$ ，則 $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ 的值為何？
- (A) 11 (B) 22 (C) 33 (D) 44 3. 原式 $= |6 + 8| + |-8 - 14| + |14 - 6|$
 $= 14 + 22 + 8 = 44$
- (A) 4. 請計算 $\frac{|3 - |-5||}{2}$ 的值為何？
- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 4. 原式 $= \frac{|3 - 5|}{2} = 1$
- (C) 5. 設 A 為 -8 的相反數，B 為 6 的相反數，C 為 $-(-9)$ 的相反數，則 $A - B + C$ 之值為多少？
- (A) 11 (B) 7 (C) 5 (D) -11 5. $A = -(-8) = 8$ ， $B = -6$ ，
 $C = -(-(-9)) = -9$
 $\therefore A - B + C = 8 - (-6) + (-9) = 8 + 6 - 9 = 5$
- (D) 6. 設 a 、 b 均為有理數，已知 $|a| + |b| = 3$ ，則 a 一定不是下列哪一個數？
- (A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4 6. $\therefore |a| > 0$ ， $|b| > 0$ ， $\therefore |a| \leq 3$ ， $-3 \leq a \leq 3$
- (A) 7. 絕對值大於 19，但不大於 38 的整數一共有多少個呢？
- (A) 38 (B) 28 (C) 19 (D) 14 7. $38 - 19 = 19$ ， $19 \times 2 = 38$ (個)
- (C) 8. 所有絕對值小於 $\frac{19}{3}$ 的整數和為多少呢？
- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 8. $|A| < \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$ ，
 $A \Rightarrow 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ ，其整數和為 0
- (C) 9. 假設有兩數分別為 -9 及 25，同時減去下列哪一個數之後，會成為相反數呢？
- (A) 10 (B) -10 (C) 8 (D) -8 9. 令此數為 x ， $(-9 - x) + (25 - x) = 0$ ，
 $16 = 2x$ ， $x = 8$
- (C) 10. 數線上 A、B、C 三點各表示的數為 -3 、 $\frac{1}{3}$ 、4，若以 C 點為新的原點，而單位長不變，則 A 點所表示的數變為多少呢？
- (A) -1 (B) 1 (C) -7 (D) 7 10. $\overline{AC} = |4 - (-3)| = 7$ ，
 A 點位於新原點左方，A 點為 -7
- (D) 11. 若以 7:35 為基準，遲到 5 分鐘以 (-1) 表示。某天，小玲於 7:15 分到校，則可記為下列何者？
- (A) -2 (B) +2 (C) -4 (D) +4 11. 小玲提早 20 分到校， $20 \div 5 = 4$ ，可記為 +4

(B) 12. 有多少個整數的絕對值比 7 小呢？

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

12. 有 ± 6 、 ± 5 、 ± 4 、 ± 3 、 ± 2 、 ± 1 與 0，共 13 個

(A) 13. 惠晶在某次段考中，若以數學科 95 分爲基準，各科分數登記如右表，則平均分數爲幾分？

- (A) 93 (B) 94 (C) 95 (D) 96

科目	國	英	數	自	社	平均
差值(分)	-8	-5	0	+2	+1	?

$$13. \frac{(-8)+(-5)+0+2+1}{5} = \frac{-10}{5} = -2, \\ \text{平均分數爲 } 95 - 2 = 93$$

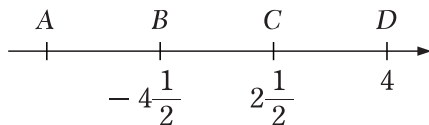
(A) 14. 在數線上，比 15.4 小且比 -14.5 大的所有整數之和爲何？

- (A) 15 (B) 14 (C) 13 (D) 12

$$14. 15 + 14 + \dots + 0 + \dots + (-14) = 15$$

(C) 15. 如右圖，若 A、B 兩點距離與 C、D 兩點距離相同，則 A 點坐標爲何？

- (A) -3 (B) $-3\frac{1}{2}$ (C) -6 (D) $-6\frac{1}{2}$



$$15. \overline{CD} = 4 - 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ A = -4\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-9-3}{2} = -6$$



(D) 1. 已知數線上代表四數 a 、 b 、 $a+b$ 、 $a-b$ 的點分別爲 A、B、C、D。若 $|b| > |a| > 0$ ，則此四點的關係，下列敘述何者正確？

- (A) A 到 B 的距離與 C 到 D 的距離相等
 (B) A 到 C 的距離與 B 到 D 的距離相等
 (C) B 到 C 的距離與 B 到原點的距離相等
 (D) A 到 B 的距離與 D 到原點的距離相等

97 基測二

$$1. (A) \overline{AB} = |b-a|, \overline{CD} = |a-b-a-b| = |-2b| \\ (B) \overline{AC} = |a+b-a| = |b|, \overline{BD} = |a-b-b| = |a-2b| \\ (C) \overline{BC} = |a+b-b| = |a|, \overline{BO} = |b| \\ (D) \overline{AB} = |b-a|, \overline{DO} = |a-b| = |b-a|$$

(A) 2. 右圖表示數線上四個點的位置關係，且它們表示的數分別爲 p 、 q 、 r 、 s 。若 $|p-r|=10$ ， $|p-s|=12$ ， $|q-s|=9$ ，則 $|q-r|=?$

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13



$$2. \overline{PR} = |p-r| = 10, \overline{PS} = |p-s| = 12, \\ \overline{QS} = |q-s| = 9, \overline{RS} = 12 - 10 = 2 \\ \Rightarrow |q-r| = \overline{QR} = \overline{QS} - \overline{RS} = 9 - 2 = 7$$

97 基測一

(A) 3. 小嘉全班在操場上圍坐成一圈。若以班長爲第 1 人，依順時針方向算人數，小嘉是第 17 人；若以班長爲第 1 人，依逆時針方向算人數，小嘉是第 21 人。求小嘉班上共有多少人？

- (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39

$$3. 17 + 21 - 2 = 36$$

97 基測一

(C) 4. 已知 n 滿足 $\frac{n}{7.24} = \frac{16.13}{8.13}$ 。若將 n 描在數線上，則下列哪一個數在數線上的位置最接近 n ？

- (A) 12.24 (B) 13.13 (C) 14.25 (D) 15.24

$$4. n = 16.13 \times 7.24 \div 8.13 \div 14.36$$

95 基測二

(C) 5. 在右圖的方格中，填入適當的數字，使得每行、每列以及對角線上的數字和是相同的，則★的值爲何？

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 13

93 基測二

16		14
★	x	15
12		

$$5. \text{令 } \star \text{ 右邊空格爲 } x, \\ \text{則 } 14 + x + 12 = \star + x + 15 \Rightarrow \star = 11$$



(C) 1. 假設 $x=3$ 、 $y=4$ 、 $z=5$ ，則 $|x-y| + |y-z| - |z-x|$ 的值爲何？

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

$$1. \text{原式} = |3-4| + |4-5| - |5-3| = 0$$

(C) 2. 下列四個數分別為 $-\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{5}$ ，何者的絕對值最接近 0？

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{5}$

2. 在數線上分別標出其位置，再比較各點與原點的距離即可得

(D) 3. 請計算下列式子 $|-26| + [(-4) + 3] + (-4) - (-8) = ?$

- (A) -23 (B) 23 (C) -29 (D) 29

3. 原式 = $26 + (-1) - 4 + 8 = 29$

(A) 4. 若 17、-23、 $-(-15)$ 、20 的相反數分別是 a 、 b 、 c 、 d ，則 $a - b + c - d = ?$

- (A) -35 (B) 35
(C) -41 (D) 41

4. $a - b + c - d = -17 - 23 + (-15) - (-20)$
 $= -17 - 23 - 15 + 20 = -35$

(C) 5. 如下圖，數線上 A、B 兩點的距離為何？



- (A) 4 (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{14}{3}$

5. A 點表示的數是 $-1\frac{2}{3}$ ，B 點表示的數是 $2\frac{2}{3}$
 $\therefore \overline{AB} = |-1\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}| = |-\frac{13}{3}| = \frac{13}{3}$

(D) 6. 小華老師在高速公路上開車，從臺中到臺北再到中壢，臺中的公里數(里程碑)為 177，往北走到臺北，公里數(里程碑)顯示為 6，再往南走到中壢，走了 35 公里，請問：中壢與臺中相距多少公里呢？

- (A) 313 (B) 164 (C) 141 (D) 136

6. 中壢 = $35 + 6 = 41$ ，
 中壢與臺中相距 = $|177 - 41| = 136$ (公里)

(B) 7. 若甲數 < 0 ，乙數 > 0 ，且甲數 + 乙數 > 0 ，則下列何者正確？

- (A) |甲數| $>$ |乙數| (B) |甲數| $<$ |乙數|
(C) |甲數| = |乙數| (D) 不能確定

7. \therefore 甲、乙是異號數，且甲 + 乙 > 0 ，
 \therefore 正數的絕對值較大，|甲數| $<$ |乙數|

(C) 8. 數線上 A、B 兩點分別代表 -3 與 10，則下列哪一個等式不能計算出 \overline{AB} 呢？

- (A) $10 - (-3)$ (B) $|(-3) - 10|$
(C) $|-3| - |-10|$ (D) $|10 - (-3)|$

8. $\overline{AB} = (\text{大坐標} - \text{小坐標})$
 $= |\text{大} - \text{小}| = |\text{小} - \text{大}|$

(D) 9. 設 a 為整數，則滿足 $-4 < |a| < 4$ 的值有多少個？

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

9. $\therefore -4 < |a| < 4$ 的意思等於 $0 < |a| < 4$ ，
 $\therefore a = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ，共 7 個

(C) 10. 數線上有三點 A、B、C，其坐標分別為 3、5、8，若將 \overline{AB} 十等分，假設其中第三個等分點為 P，將 \overline{BC} 五等分，第二個等分點為 Q，則 \overline{PQ} 的長度為何？

- (A) $\frac{16}{3}$ (B) $\frac{15}{4}$
(C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{12}{7}$

10. $\overline{AB} = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow P = 3\frac{3}{5}$ ，
 $\overline{BC} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow Q = 5\frac{6}{5} \therefore \overline{PQ} = |5\frac{6}{5} - 3\frac{3}{5}| = \frac{13}{5}$

(A) 11. 若有一數 A 小於它自己的相反數，則 A 數為何？

- (A) $A < 0$ (B) $A = 0$ (C) $A > 0$ (D) $A > -A$

11. 負數的相反數是正數

(A) 12. 在數線上 A ($-3\frac{1}{4}$) 先右移 9 單位再左移 13 單位到達 B，則 A、B 兩點的中點是 C，求 C 點的坐標為何？

- (A) -5.25 (B) 5.25
(C) -10.25 (D) 10.25

12. $-3\frac{1}{4} + 9 - 13 = -7\frac{1}{4}$ ……B 點，
 $[(-3\frac{1}{4}) + (-7\frac{1}{4})] \div 2 = -5.25$

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. 右列算式是否正確： $7\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{3} - 5 + \frac{1}{2}$?

能力一

💡 $7\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{3} - 5 - \frac{1}{2}$

(X) 2. 下列算式是否正確?

$$\left(-3\frac{1}{2}\right) \div 2\frac{1}{3} = \left(-3\frac{1}{2}\right) \div \left(2 + \frac{1}{3}\right) = \left(-3\frac{1}{2}\right) \div 2 + \left(-3\frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{3}$$

💡 $(a \pm b) \div c = a \div c \pm b \div c$, 但 $a \div (b \pm c) \neq a \div b \pm a \div c$

(X) 3. $15 \div 13 \div 7 = (15 \div 13) \times 7$ 是否正確?

💡 $a \div b \div c = a \div (b \times c) = (a \div b) \div c$

(O) 4. 右列算式是否正確： $-7 \times 7 \times 7 \times 7 = -7^4$?

能力二

💡 $-7^4 = -(7 \times 7 \times 7 \times 7) = -7 \times 7 \times 7 \times 7$

(X) 5. 任意數 a 的零次方皆為 1。

💡 任意數 a (不含 0) 的零次方皆為 1, $0^0 \Rightarrow$ 無意義

(O) 6. $10^{-3} \times 10^{-7} = 10^{-3} \div 10^7$ 是否正確?

💡 $10^{-3} \times 10^{-7} = 10^{-3} \times \frac{1}{10^7} = 10^{-3} \div 10^7$

(X) 7. $(-0.1)^3 < (-0.1)$ 是否正確?

💡 $(-0.1)^3 = -0.001$, $-0.1 < -0.001$

(X) 8. 因為 $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, 所以 $\frac{1}{8 \times 10^3} = 8 \times 10^{-3}$ 。

能力三

💡 $\frac{1}{8 \times 10^3} = \frac{1}{8} \times 10^{-3} = 0.125 \times 10^{-3} = 1.25 \times 10^{-4}$

(X) 9. 美國 FDA 規定奶類產品每一公克的三聚氰胺含量不可大於 0.25 ppm (1 ppm = 百萬分之一), 則一公斤的奶粉其含量不可大於 2.5×10^{-2} ppm。

💡 $0.25 (\text{ppm}) \times 1000 = 250 (\text{ppm}) = 2.5 \times 10^2 (\text{ppm})$

(O) 10. 科學記號 2.52×10^{-2} 轉換成最簡分數為 $\frac{63}{2500}$ 。

💡 $2.52 \times 10^{-2} = 0.0252 = \frac{252}{10000} = \frac{63}{2500}$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

有理數的四則運算 (請務必透徹了解四則運算之各種方法)

一 整數

整數係指在有理數中的正整數、負整數及零(0)等三種數。

二 分數

分數係指在有理數中可表示成 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)，其中 a 稱為分子， b 稱為分母。

1. 分數的種類

最簡分數 分子是整數，分母是正整數，且分子和分母互質的分數。例如： $\frac{3}{11}$ ， $\frac{5}{4}$

真分數 商小於 1 且大於 0 的分數，即分子小於分母。例如： $\frac{3}{8}$

假分數 商不小於 1 的分數，即分子大於等於分母，可寫成帶分數。例如： $\frac{9}{7}$ 、 $\frac{7}{7}$

帶分數 一個整數加一個真分數，例如 $c\frac{a}{b}$ ，讀作「 c 又 b 分之 a 」。例如： $2\frac{5}{12}$

2. 分數的基礎運算

種類	說明	例子
擴分	1. 一個分數的分子與分母同時乘以一個不是 0 的整數 2. 擴分後的分數與原來分數的值相等	$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$
約分	1. 一個分數的分子與分母同時除以它們的「公因數」 2. 約分後的分數與原來分數的值相等	$\frac{14}{24} = \frac{14 \div 2}{24 \div 2} = \frac{7}{12}$

3. 分數的加減運算

種類	分母相同	分母不同	遇帶分數
說明	直接將分子相加減再化成最簡分數	先通分化為同分母，再相加減	先把帶分數化成假分數再相加減，也可以整數部分與分數部分，分別相加減，再合併 ※帶分數中的整數很大時，最好使用整數與分數分開計算的方法
例子	$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$	$\frac{3}{7} - \frac{4}{5} = \frac{(3 \times 5) - (7 \times 4)}{7 \times 5} = -\frac{13}{35}$	$1\frac{5}{7} + 2\frac{3}{4} = \begin{cases} \text{方法一：} (1+2) + (\frac{5}{7} + \frac{3}{4}) = 3 + \frac{41}{28} = 4\frac{13}{28} \\ \text{方法二：} \frac{12}{7} + \frac{11}{4} = \frac{48+77}{28} = \frac{125}{28} = 4\frac{13}{28} \end{cases}$

4. 分數的乘除運算

- (1) 分數相乘時，把分子相乘做為新分子，分母相乘做為新分母，所得的新分數就是分數的乘積。
- (2) 分數相乘時，若分子和分母之間有**公因數**，可以先約去公因數再相乘。
- (3) 分數相乘時，帶分數應先化成**假分數**後再相乘。
- (4) **倒數**：一個分數的分子不為 0，將其分子與分母互調，所得新的分數就是原分數的倒數。
 - ① 若有兩分數其乘積等於 1，此兩數必互為倒數。
 - ② 一個不等於 0 的數，其倒數與其相反數的乘積必為 -1。

5. 分數的大小比較

- (1) 此分數為正數時，化為**同分母**再比較分子的大小，若**分子愈大**，則此**分數愈大**。
- (2) 此分數為正數時，化為**同分子**再比較分母的大小，若**分母愈大**，則此**分數愈小**。
- (3) 此分數為負數時，先比較其絕對值的大小，加上負號後其大小方向相反。
- (4) 特殊題型：分子與分母差相同。可利用其差值與整數間的關係來判斷大小。



回訣 母同子大大；子同母大小。
(分母相同時分子愈大其值愈大；分子相同時分母愈大其值愈小。)

三 小數

小數係指運用十進位制將任一實數表示為 $a.b$ 的形式，其中「 a 」稱為小數點前的數，「 b 」稱為小數點後的數，「 \cdot 」稱為小數點。

1. 小數化分數

有限小數型	將有限小數化為有理數（分數型），再擴分去掉小數點，最後約分求最簡分數 例如： $3.124 = \frac{3.124}{1} = \frac{3.124 \times 1000}{1000} = \frac{3124}{1000} = \frac{781}{250}$
循環小數型	國中課程尚未介紹，故省略

四 有理數的四則運算規律（以符號表示）

運算規律	內容	例子
交換律 (限用於加、乘法)	$a + b = b + a$	$3 + 2 = 2 + 3, (-2) + 3 = 3 + (-2)$
	$a \times b = b \times a$	$3 \times 2 = 2 \times 3, (-2) \times 3 = 3 \times (-2)$
結合律 (限用於加、乘法)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5),$
	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	$(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$
分配律 (±法 v.s. ×法) (±法 v.s. ÷法)	$(a \pm b) \times c = a \times c \pm b \times c$	$(2 \pm 3) \times 5 = 2 \times 5 \pm 3 \times 5$
	$(a \pm b) \div c = a \div c \pm b \div c$	$(2 \pm 3) \div 5 = 2 \div 5 \pm 3 \div 5$
連乘、連除規律	$a \times b \times c = a \times (b \times c)$	$3 \times 7 \times 5 = 3 \times (7 \times 5)$
	$a \div b \div c = a \div (b \times c)$	$3 \div 7 \div 5 = 3 \div (7 \times 5)$
	$a \times b \div c = a \times (b \div c)$	$3 \times 7 \div 5 = 3 \times (7 \div 5)$
	$a \div b \times c = a \div (b \div c)$	$3 \div 7 \times 5 = 3 \div (7 \div 5)$

注意 $c \div (a \pm b) \neq c \div a \pm c \div b$ ，可以化爲分數去判斷，如下所示：

$$\begin{aligned} c \div (a - b) &= \frac{c}{a - b} \\ \Rightarrow c \div a - c \div b &= \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \end{aligned} \Rightarrow \text{兩數不相等}$$

師說 1

〈整數的交換律及結合律運算〉

演練 1

請計算下列各式：

- $1 - 11 - 111 - 1111 = ?$
- $567 + 1806 - 367 = ?$
- $250 \times 11 \times (-24) = ?$

解

- 原式 $= 1 - (11 + 111 + 1111) = 1 - 1233 = -1232$
- 原式 $= [567 + (-367)] + 1806 = 200 + 1806 = 2006$
- 原式 $= [250 \times (-24)] \times 11 = -66000$

請計算下列各式：

- $11111 + 293 + 507 = ?$
- $12321 + 221 - 321 = ?$
- $200 \times 79 - 200 = ?$

解

- 原式 $= 11111 + (293 + 507) = 11911$
- 原式 $= [12321 + (-321)] + 221 = 12221$
- 原式 $= 200 \times (79 - 1) = 15600$

師說 2

〈分數的交換律及結合律運算〉

演練 2

請計算下列各式：

- $\frac{13}{11} \times 18 + \frac{13}{11} \times 12 - \frac{13}{11} \times 7 - \frac{13}{11} = ?$
- $\frac{2006}{2007} \times 2006 = ?$
- $(3\frac{3}{5} - 4\frac{2}{7}) \times \frac{35}{6} = ?$

解

- 原式 $= \frac{13}{11} \times (18 + 12 - 7 - 1) = \frac{13}{11} \times 22 = 26$
- 原式 $= \frac{2006}{2007} \times (2007 - 1) = 2006 - \frac{2006}{2007} = 2005\frac{1}{2007}$
- 原式 $= \frac{18}{5} \times \frac{35}{6} - \frac{30}{7} \times \frac{35}{6} = 21 - 25 = -4$

請計算下列各式：

- $\frac{17}{23} \times 11\frac{1}{2} \div (2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5}) = ?$
- $(1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 + \frac{1}{100}) = ?$
- $-2\frac{3}{7} \times 7\frac{5}{11} - 6\frac{6}{11} \times 2\frac{3}{7} = ?$

解

- 原式 $= \frac{17}{23} \times \frac{23}{2} \div (\frac{11}{5} + \frac{6}{5}) = \frac{17}{2} \div \frac{17}{5} = \frac{17}{2} \times \frac{5}{17} = \frac{5}{2}$
- 原式 $= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{101}{100} = \frac{101}{2}$
- 原式 $= -(2\frac{3}{7} \times 7\frac{5}{11} + 6\frac{6}{11} \times 2\frac{3}{7}) = -2\frac{3}{7} \times (7\frac{5}{11} + 6\frac{6}{11}) = -2\frac{3}{7} \times 14 = -34$

師說 3

〈分數與小數的四則運算〉

演練 3

26

請計算下列各式：

$$1. 1\frac{3}{4} \div [3 \times (1.6 + 5 \div 3)] \times 4 = ?$$

$$2. 0.5 \div [(\frac{1}{3} + 0.4) \times \frac{3}{11}] = ?$$

解

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= \frac{7}{4} \div [3 \times (\frac{16}{10} + \frac{5}{3})] \times 4 \\ &= \frac{7}{4} \div (3 \times \frac{98}{30}) \times 4 = \frac{7}{4} \times \frac{10}{98} \times 4 \\ &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \frac{1}{2} \div [(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}) \times \frac{3}{11}] \\ &= \frac{1}{2} \div (\frac{11}{15} \times \frac{3}{11}) = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

請計算下列各式：

$$1. 1\frac{2}{3} \div [(0.5 - \frac{1}{4}) \div \frac{21}{44} \times \frac{7}{11}] = ?$$

$$2. 14\frac{1}{5} - (3\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} + 0.5) = ?$$

解

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= \frac{5}{3} \div [(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \times \frac{44}{21} \times \frac{7}{11}] \\ &= \frac{5}{3} \div [\frac{1}{4} \times \frac{4}{3}] = \frac{5}{3} \times 3 = \underline{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \frac{71}{5} - (\frac{7}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{71}{5} - (\frac{21}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{71}{5} - \frac{23}{4} \\ &= \frac{169}{20} = \underline{8\frac{9}{20}} \end{aligned}$$

師說 4

分數的比較大小

演練 4

比較下列各分數的大小：

$$1. \frac{3}{11}, \frac{7}{11}, \frac{9}{11}$$

$$2. \frac{13}{4}, \frac{13}{6}, \frac{13}{8}$$

$$3. -\frac{23}{21}, -\frac{21}{19}, -\frac{19}{17}$$

解

$$1. \underline{\frac{3}{11} < \frac{7}{11} < \frac{9}{11}}$$

$$2. \underline{\frac{13}{4} > \frac{13}{6} > \frac{13}{8}}$$

$$\begin{aligned} 3. -1\frac{2}{21} &> -1\frac{2}{19} > -1\frac{2}{17} \\ &\Rightarrow \underline{-\frac{23}{21} > -\frac{21}{19} > -\frac{19}{17}} \end{aligned}$$

比較下列各分數的大小：

$$1. \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

$$2. \frac{7}{9}, \frac{7+1}{9}, \frac{7}{9+1}$$

$$3. -3 - \frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, -3 + \frac{2}{3}$$

解

$$1. \frac{2}{3} = \frac{12}{18}, \frac{3}{4} = \frac{12}{16}, \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$

$$\frac{12}{18} < \frac{12}{16} < \frac{12}{15} \Rightarrow \underline{\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}}$$

$$2. \frac{7}{9} < \frac{8}{9}, \frac{7}{9} > \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{7}{10} < \frac{7}{9} < \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{7}{9+1} < \frac{7}{9} < \frac{7+1}{9}}$$

$$3. -3 - \frac{1}{3} = -(3\frac{1}{3}) = -\frac{10}{3},$$

$$-3 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3} \Rightarrow -\frac{10}{3} < -\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{-3 - \frac{1}{3} < -\frac{8}{3} < -3 + \frac{2}{3}}$$

師說 5

〈數的四則運算應用題〉

演練 5

1年18班的人數為40人。第一次段考數學科分數，80分以上的人數恰好占全班人數的 $\frac{1}{4}$ ，70幾分的人數恰好占全班人數的 $\frac{1}{2}$ ，60幾分的人數恰好占全班人數的 $\frac{1}{5}$ ，請問：不及格的人數應為幾人？

●解

$$\begin{aligned} \text{不及格人數占全班人數} &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \\ &= 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}, \end{aligned}$$

$$40 \times \frac{1}{20} = 2 \text{ (人)}$$

∴ 不及格的有2人

櫻怡、良宜、宇倫、育杰等四人合資10000元開店，良宜出全部資金的 $\frac{2}{5}$ ，櫻怡出的資金是良宜的 $\frac{3}{4}$ ，宇倫出的資金是櫻怡的 $\frac{1}{3}$ ，剩下的資金由育杰出，則育杰出多少錢呢？

●解

$$\text{良宜占} \frac{2}{5}, \text{櫻怡占} \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

$$\text{宇倫占} \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned} \text{育杰出資} &= 10000 \times \left[1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right)\right] \\ &= \underline{2000 \text{ (元)}} \end{aligned}$$

同步評量 1

(B) 1. 下列算式在哪一個步驟開始出錯呢？

題目： $12 \div 6 + 18 \div 6 + (11 - 13) - 13$

步驟一： $(12 + 18) \div 6 + (11 - 13) - 13$

步驟二： $30 \div 6 + 11 - (13 - 13)$

步驟三： $5 + 11 - 0$

步驟四：15

(A) 步驟一 (B) 步驟二 (C) 步驟三 (D) 步驟四

1. 步驟二應為 $30 \div 6 + 11 - 13 - 13$

(B) 2. $\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = ?$

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{19}{4}$ (C) $\frac{19}{16}$ (D) $\frac{19}{2}$

$$2. \frac{1}{4} + \frac{15}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{4} + \frac{9}{2} = \frac{19}{4}$$

(B) 3. 若 $2\frac{2}{9} + 3\frac{5}{6} + 4\frac{7}{12}$ 的值可化為最簡分數 $\frac{n}{m}$ ，下列敘述何者正確？

(A) m 、 n 均為質數 (B) $m + n$ 為質數
(C) $m + n$ 為3的倍數 (D) $m + n$ 為5的倍數

$$3. \text{原式} = \frac{20}{9} + \frac{23}{6} + \frac{55}{12} = \frac{383}{36} \\ \Rightarrow 383 + 36 = 419 \text{ 為質數}$$

(C) 4. 甲、乙、丙三位選手各罰球7、8、9次，分別命中4、5、6球，則誰的命中率最高？

(A) 甲 (B) 乙
(C) 丙 (D) 一樣高

$$4. \text{甲、乙、丙命中率分別為} \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9} \\ \frac{4}{7} = 1 - \frac{3}{7}, \frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8}, \frac{6}{9} = 1 - \frac{3}{9} \\ \therefore \frac{3}{7} > \frac{3}{8} > \frac{3}{9}, \therefore \frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \frac{6}{9}, \text{丙命中率最高}$$

(A) 5. 牛仔褲的成本為每件400元，且店家依成本加三成作為定價。若褲架上標示售價為定價的20% OFF，則每件物品可賺多少元？

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24

$$5. 400 \times 1.3 \times 0.8 - 400 = 16 \text{ (元)}$$

(C) 6. 育安從家裡到學校的上學途中，會經過育平蛋糕店和小華文具店，走了全程的 $\frac{1}{3}$ 到達育平蛋糕店，又走了剩餘路程的 $\frac{1}{3}$ 到達小華文具店。請問：文具店到學校的路程為全程的幾分之幾？

- (A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{6}{9}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{2}{9}$

$$6. 1 - \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \right) \right] = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

(B) 7. 高鐵每天早上 5:30 從臺北車站發第一班車，已知早上 7:00~9:00 的時段，每 6 分鐘就發一班車，其他時段每 10 分鐘發一班車。請問：高鐵於 7:34~9:34 共發了幾班車呢？

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22

$$7. \begin{cases} 7:34 \sim 8:00 \Rightarrow 5 \text{ 班} \\ 8:00 \sim 9:00 \Rightarrow 10 \text{ 班, 共 18 班車} \\ 9:00 \sim 9:34 \Rightarrow 3 \text{ 班} \end{cases}$$

能力

指數記法與指數律

一 指數記法

1. 指數又稱為次方，係指某相同整數其乘積的次數。
2. 若 a 、 n 為整數， a 稱為底數， n 稱為指數，指數記法如下所示：

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 次}} \quad (a \text{ 自乘 } n \text{ 次})$$

二 指數律

1. 指數律的運算規則

條件	規律		
1. 設 a 、 b 為實數， m 、 n 為整數	$1. a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2. (a^m)^n = a^{m \times n}$	$3. a^n \times b^n = (a \times b)^n$
2. 設 a 為實數， m 、 n 為整數， 且 $m > n$	$1. a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$	$2. 0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$	
3. 設 a 、 b 為實數且不為 0， 且 $m > n > 0$	$1. a^m \div a^n = a^{m-n}$	$2. a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$	
	$3. a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$4. a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \text{ 為整數})$	
	$5. a^m \div a^m = 1 \Rightarrow a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 \Rightarrow a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$		

2. 指數的奇、偶性質與底數正、負數的關係

	偶數次方	正負	奇數次方	正負
底數 為正	$2^2 = 2 \times 2 = 4$	正	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$	正
	$(2)^2 = 2 \times 2 = 4$	正	$(2)^3 = (2) \times (2) \times (2) = 8$	正
底數 為負	$-2^2 = -2 \times 2 = -4$	負	$-2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8$	負
	$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$	正	$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$	負
	$(-2^2) = -(2 \times 2) = -4$	負	$(-2^3) = -(2 \times 2 \times 2) = -8$	負

注意 負數遇到偶數次方要特別注意括號的位置，其值是不同的。

3. 帶有指數之數的大小比較：先把指數或底數化成相同數，再進行比較。

當底數與指數 皆為正整數時	指數相同 → 底數愈大 → 數值愈大
	底數相同 → 指數愈大 → 數值愈大

師說 6

〈指數律的運算〉

演練 6

試求下列各式的值：

- $(-1^2) + (-1^3) + (-1)^4 = ?$
- $(101 - 2 \times 50)^{100} + (3 \times 120)^0 + (\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{6})^{50} = ?$
- $2^3 \times 4^2 \times 8^3 \div 16^5 = ?$
- $2^{12} - 2^{11} = ?$

解

- 原式 $= (-1) + (-1) + 1 = \underline{-1}$
- 原式 $= (1)^{100} + 1 + 0 = \underline{2}$
- 原式 $= 2^3 \times (2^2)^2 \times (2^3)^3 \div (2^4)^5 = 2^{16} \div 2^{20} = \underline{2^{-4}}$
- 原式 $= 2^{11} \times (2 - 1) = \underline{2^{11}}$

試求下列各式的值：

- $(-1)^2 \times (-1)^3 \times (-1)^4 = ?$
- $(15 - 22)^3 \div (9 - 16)^2 - (3 - 4)^2 \times (3^2 - 4^2) = ?$
- $-6^0 + 0^6 + (-6) \times 6^0 = ?$
- $3^{15} + 3^{14} - 3^{16} = ?$

解

- 原式 $= 1 \times (-1) \times 1 = \underline{-1}$
- 原式 $= (-7)^3 \div (-7)^2 - 1 \times (-7) = (-7)^{3-2} + 7 = (-7) + 7 = \underline{0}$
- 原式 $= (-1) + 0 + (-6) \times 1 = (-1) - 6 = \underline{-7}$
- 原式 $= 3^{14} \times (3 + 1 - 3^2) = \underline{-5 \times 3^{14}}$

師說 7

〈指數律的比較大小〉

演練 7

請比較下列各數的大小關係為何？

- $2^{105}, 3^{70}, 5^{35}$
- $64^5, (2^5)^6, 8 \times 32$
- $(0.7)^3, (0.7)^5, (0.7)^7$

解

- $2^{105} = 2^{3 \times 35} = (2^3)^{35} = 8^{35}$ ，
 $3^{70} = 3^{2 \times 35} = (3^2)^{35} = 9^{35}$ ，
 $5^{35} < 8^{35} < 9^{35} \Rightarrow \underline{5^{35} < 2^{105} < 3^{70}}$
- $64^5 = (2^6)^5 = 2^{30}$ ， $(2^5)^6 = 2^{30}$ ，
 $8 \times 32 = 2^3 \times 2^5 = 2^8$ ，
 $2^{30} = 2^{30} > 2^8 \Rightarrow \underline{64^5 = (2^5)^6 > 8 \times 32}$
- $\because 0.7 < 1 \therefore \underline{(0.7)^3 > (0.7)^5 > (0.7)^7}$

請比較下列各數的大小關係為何？

- $3^{42}, 7^{14}, 5^{28}$
- $49^{10}, (7^5)^3, 7 \times 343$
- $(1.2)^3, (1.2)^5, (1.2)^7$

解

- $3^{42} = (3^3)^{14} = 27^{14}$ ， $5^{28} = (5^2)^{14} = 25^{14}$ ，
 $27^{14} > 25^{14} > 7^{14} \Rightarrow \underline{3^{42} > 5^{28} > 7^{14}}$
- $49^{10} = (7^2)^{10} = 7^{20}$ ， $(7^5)^3 = 7^{15}$ ，
 $7 \times 343 = 7 \times 7^3 = 7^4$ ，
 $7^4 < 7^{15} < 7^{20} \Rightarrow \underline{7 \times 343 < (7^5)^3 < 49^{10}}$
- $\because 1.2 > 1 \therefore \underline{(1.2)^3 < (1.2)^5 < (1.2)^7}$

同步評量 2

(B) 1. 若有一數學式為 $-3 \times 3 \times 3 \times 3$ ，可簡記為下列哪一數呢？

- (A) $(-3)^4$ (B) -3^4 (C) $(-3) \times 4$ (D) -3^3

$$1. -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -3^4$$

- (B) 2. 下列哪一個式子其值與 $(-2)^3$ 相等? 2. $(-2)^3 = -8 = -2^3 = -(2 \times 2 \times 2)$
 (A) $(-2) \times (-3)$ (B) $-(2 \times 2 \times 2)$
 (C) $(-2) + (-2) + (-2)$ (D) $(-2) \times 3$
- (B) 3. 下列敘述何者錯誤? 3. $(7+3)^2 - (7-3)^2 = 10^2 - 4^2 = 84$
 (A) 7 個 7 相加等於 7^2 (B) $(7+3)^2 - (7-3)^2 = 7^2$
 (C) 7 個 7 相乘等於 7^7 (D) $100^2 - 99^2 = 2 \times 99 + 1$
- (B) 4. 試計算 $-4^2 - (-5)^2 \div [(\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{2})^2 \times 6]$ 之值為何?
 (A) -2 (B) 2 (C) -18 (D) 18 4. 原式 $= -16 - 25 \div [\frac{1}{9} - \frac{3}{2}]$
 $= -16 - 25 \times (-\frac{18}{25}) = -16 + 18 = 2$
- (C) 5. 試比較 $a = (-0.5)^2$, $b = (-0.5^3)$, $c = (-0.5^4)$, $d = (-0.5)^5$ 的大小為何?
 (A) $a > b > c > d$ (B) $c > a > b > d$ 5. a 為正數, 但 b, c, d 皆為負數, 故 $d > c > b$
 $\Rightarrow a > d > c > b$
 (C) $a > d > c > b$ (D) $a > c > d > b$
- (D) 6. 試比較 $a = (\frac{1}{2})^4$, $b = (\frac{1}{4})^2$, $c = (\frac{1}{8})^0$ 的大小?
 (A) $a > b > c$ (B) $a = b > c$ (C) $a < b < c$ (D) $a = b < c$ 6. $a = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$, $b = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$,
 $c = (\frac{1}{8})^0 = 1 \Rightarrow a = b < c$

能力

十進位制與科學記號

一 十進位制

名稱(位)	兆	億	萬	千	百	十	個
換算	10^{12}	10^8	10^4	10^3	10^2	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
名稱(位)	十分	百分	千分	萬分	十萬分	百萬分	千萬分
換算	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

- 例1: (1) 123456789 此數中「3」為 3×10^6 , 表示為 3 個百萬。
 (2) 123.456789 此小數中「8」為 8×10^{-5} , 表示為 8 個十萬分之一。

二 科學記號

- 科學記號的表示法。設 n 為非零的整數, 其科學記號的表示法如下所示:
 $n = a \times 10^m$ ($1 \leq |a| < 10$, m 為整數)
- 科學記號與位數關係

條件	位數關係
若 $m > 0$	則 n 的整數位數為 $m + 1$ 位
若 $m = 0$	則 n 的整數位數只有 1 位
若 $m < 0$	則 n 的小數點後到第一個不是 0 的數之間有 $ m + 1 $ 個 0

師說 8

〈十進位制與科學記號〉

演練 8

1. $2 \text{ 萬} \times 3 \text{ 萬} \times 4 \text{ 萬} = a \text{ 萬}$ ，請問： $a = ?$
2. 999×189 為幾位數呢？
3. 中央政府負債 4 兆 5 千萬元。(請用科學記號表示)

解

1. $2 \text{ 萬} \times 3 \text{ 萬} \times 4 \text{ 萬} = (2 \times 3 \times 4 \text{ 萬萬}) \text{ 萬}$ ，
 $a = 24 \text{ 萬萬} = \underline{24 \text{ 億}}$
2. $999 \times 189 = (1000 - 1) \times 189 = 189000 - 189$
 $\therefore 189000 = 1.89 \times 10^5$ 為六位數
 $\therefore 999 \times 189$ 也是六位數
3. $4 \text{ 兆} = 4 \times 10^{12}$ ，
 $5 \text{ 千萬} = 5 \times 10^7 = 0.00005 \times 10^{12}$ ，
 $\Rightarrow 4 \text{ 兆 } 5 \text{ 千萬元} = \underline{4.00005 \times 10^{12} \text{ (元)}}$

1. 有一數為 32.43，試問十位的「3」所代表的值是百分位的「3」所代表的值的幾倍？
2. $1 \times 10^a + 2 \times 10^b + 3 \times 10^c + 4 \times 10^d = 24130$ ，且 $a \neq b \neq c \neq d$ ，請問： $a + b + c + d = ?$
3. $2^{1999} \times 5^{1989}$ 是幾位數呢？

解

1. 原式 = $\frac{3 \times 10^1}{3 \times 10^{-2}} = 10^3 = \underline{1000 \text{ (倍)}}$
2. $24130 = 2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1$
對照後可知 $a = 2, b = 4, c = 1, d = 3$ ，
 $\therefore a + b + c + d = 2 + 4 + 1 + 3 = \underline{10}$
3. $2^{1999} \times 5^{1989} = 2^{10} \times (2 \times 5)^{1989} = 1024 \times 10^{1989}$
 $= 1.024 \times 10^{1992}$ ，有 1993 位數

師說 9

〈科學記號的四則運算〉

演練 9

已知 $A = 3 \times 10^{15}$ ， $B = 2 \times 10^{14}$ ，請計算下列各式，並以科學記號表示之。

- (1) $A + B$ (2) $6A - 3B$ (3) $4A \times 3B$

解

- (1) $A + B = 3 \times 10^{15} + 2 \times 10^{14}$
 $= 30 \times 10^{14} + 2 \times 10^{14}$
 $= 32 \times 10^{14} = \underline{3.2 \times 10^{15}}$
- (2) $6A - 3B = 6(3 \times 10^{15}) - 3(2 \times 10^{14})$
 $= 18 \times 10^{15} - 6 \times 10^{14}$
 $= 180 \times 10^{14} - 6 \times 10^{14}$
 $= 174 \times 10^{14} = \underline{1.74 \times 10^{16}}$
- (3) $4A \times 3B = 4 \times (3 \times 10^{15}) \times 3 \times (2 \times 10^{14})$
 $= 12 \times 6 \times 10^{15+14} = 72 \times 10^{29}$
 $= \underline{7.2 \times 10^{30}}$

已知 $A = 6 \times 10^{12}$ ， $B = 3 \times 10^{10}$ ，請計算下列各式，並以科學記號表示之。

- (1) $\frac{1}{3}A - \frac{1}{6}B$ (2) $2A \div B$

解

- (1) $\frac{1}{3}A - \frac{1}{6}B = \frac{1}{3}(6 \times 10^{12}) - \frac{1}{6}(3 \times 10^{10})$
 $= 2 \times 10^{12} - 0.5 \times 10^{10}$
 $= (200 - 0.5) \times 10^{10}$
 $= 199.5 \times 10^{10}$
 $= \underline{1.995 \times 10^{12}}$
- (2) $2A \div B = 2 \times (6 \times 10^{12}) \div (3 \times 10^{10})$
 $= \frac{12 \times 10^{12}}{3 \times 10^{10}} = 4 \times \left(\frac{10^{12}}{10^{10}}\right)$
 $= 4 \times 10^{12-10} = \underline{4 \times 10^2}$

師說 10

〈科學記號的應用〉

演練 10

公益彩券選號共有 5240000 種組合，得到頭獎的機會是 $\frac{1}{5240000}$ ，錢臻多想中頭獎，決定買下 5240000 種組合，一組 50 元，則她共要花多少錢？(以科學記號表示)

解

- $5240000 = 5.24 \times 10^6$ ，
 $50 \times 5.24 \times 10^6 = 262 \times 10^6 \text{ (元)}$
 $= \underline{2.62 \times 10^8 \text{ (元)}}$

鹿林慧星與地球最近的距離為 6 千萬公里，若一光年為 9.6×10^{15} 公尺，則該慧星與地球相距多少光年？

解

- $\frac{6 \times 10^7 \text{ 公里}}{9.6 \times 10^{15} \text{ 公尺}} = \frac{6 \times 10^7 \text{ 公里}}{9.6 \times 10^{12} \text{ 公里}} = 0.625 \times 10^{-5}$
 $= \underline{6.25 \times 10^{-6} \text{ (光年)}}$

同步評量 3

- (B) 1. 2.3×10^4 乘開後為 5 位數，則 2.3×10^{-4} 乘開後，數字「2」位於哪一位數呢？
 (A) 千分位 (B) 萬分位 (C) 千位 (D) 萬位
 $1. 2.3 \times 10^{-4} = 0.00023$ ，
 2 出現在萬分位
- (D) 2. 計算 $533 \times 10^{-2} - 1130 \times 10^{-3} + 0.0008 \times 10^3$ 之值？(以科學記號表示)
 (A) 0.5×10 (B) 0.5×10^2 (C) 5×10 (D) 5×10^0
 $2. 原式 = 5.33 - 1.13 + 0.8 = 5 = 5 \times 10^0$
- (A) 3. 計算 $0.000025 \times 10^{11} \times 64 + 0.95 \div (5 \times 10^{-9}) = ?$
 (A) 3.5×10^8 (B) 3.5×10^{-8}
 (C) 3×10^8 (D) 3×10^{-8}
 $3. 2.5 \times 10^{-6} \times 10^{11} \times 64 + \frac{0.95}{5 \times 10^{-9}} = 16 \times 10^7 + 1.9 \times 10^8 = 1.6 \times 10^8 + 1.9 \times 10^8 = 3.5 \times 10^8$
- (D) 4. 已知 1 奈米 = 10^{-9} 米，那麼請求出 0.0636 公尺是幾奈米？(請以科學記號的形式表示)
 (A) 6.36×10^4 (B) 6.36×10^5 (C) 6.36×10^6 (D) 6.36×10^7
 $4. \frac{6.36 \times 10^{-2}}{10^{-9}} = 6.36 \times 10^7$ (奈米)
- (B) 5. x 為一個小數，其小數點向左移 3 位後記成科學記號是 3.54×10^{-7} ，則 x 的小數點向右移 2 位記成科學記號為何？
 (A) 3.54×10^{-3} (B) 3.54×10^{-2} (C) 3.54×10^{-1} (D) 3.54×10^3
 $5. x = 3.54 \times 10^{-7} \times 10^3 = 3.54 \times 10^{-4}$ ；
 小數點向右移兩位後新的小數為 $3.54 \times 10^{-4} \times 10^2 = 3.54 \times 10^{-2}$
- (D) 6. 假設光纖傳遞資料的速度為每秒 3×10^5 個 *bits*，在不考慮其他因素下，仁鴻下載一首 6×10^5 個 *bytes* 的歌曲需要多少時間？(1 *bytes* = 8 *bits*)
 (A) 2 秒 (B) 3 秒 (C) 8 秒 (D) 16 秒
 $6. 6 \times 10^5$ (*bytes*) = $6 \times 10^5 \times 8 = 48 \times 10^5$ (*bits*)
 $\frac{48 \times 10^5}{3 \times 10^5} = 16$ (秒)



基本觀念題

- (B) 1. $1\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} \div \frac{7}{11} = ?$
 (A) $\frac{11}{3}$ (B) $\frac{22}{3}$ (C) $\frac{11}{6}$ (D) $\frac{3}{22}$
 $1. \frac{7}{4} \times \frac{8}{3} \times \frac{11}{7} = \frac{22}{3}$
- (C) 2. $(2\frac{1}{3})^2 \div (\frac{7}{15})^2 \times (\frac{3}{5})^2 = ?$
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
 $2. 原式 = (\frac{7}{3})^2 \div (\frac{7}{15})^2 \times (\frac{3}{5})^2 = (\frac{7}{3})^2 \times (\frac{15}{7})^2 \times (\frac{3}{5})^2 = 3^2 = 9$
- (B) 3. 試計算 $10^{23} \times 10^{-19} \div 10^{-3} = ?$
 (A) 10 (B) 10^7 (C) 10^{35} (D) 10^{49}
 $3. 原式 = 10^{23+(-19)-(-3)} = 10^7$
- (C) 4. $\frac{1}{2 \times 10^4} + \frac{0.0036}{4 \times 10^2} = ?$
 (A) 1.4×10^{-4} (B) 14×10^{-5} (C) 5.9×10^{-5} (D) 5.9×10^{-4}
 $4. 原式 = (0.5 \times 10^{-4}) + (\frac{3.6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^2}) = (5 \times 10^{-5}) + (0.9 \times 10^{-5}) = 5.9 \times 10^{-5}$
- (C) 5. 在下列選項中，最接近 $2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$ 的值為何？
 (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18
 $5. (3+4+5+6) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = 18 - 1\frac{17}{60} = 16\frac{43}{60} \approx 17$

(C) 6. $980 \times 12.5 = 980 \times (\square \div 8) = 980 \div 8 \times \triangle = \text{甲}$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) $\square + \triangle = 1000$ (B) 甲 = 12500 (C) $\square \times 2 = 200$ (D) $(\square + \triangle) \times 2 = 2000$
6. $980 \times 12.5 = 980 \times (\frac{100}{8}) = 980 \times 100 \div 8 = 980 \div 8 \times 100, \square = 100, \triangle = 100$

(A) 7. 已知A、B、C三數均為正數，若 $A \times \frac{16}{17} = B \times \frac{17}{18} = C \times \frac{18}{19}$ ，則此三數的大小為何？

- (A) $A > B > C$ (B) $A > C > B$ (C) $A < B < C$ (D) $A < C < B$
7. $\because \frac{16}{17} < \frac{17}{18} < \frac{18}{19}$ ，且A、B、C為正數， $\therefore A > B > C$

(C) 8. 若 $A = (\frac{1}{2})^{20}$ ， $B = (\frac{1}{4})^{12}$ ， $C = (\frac{1}{8})^6$ ，則A、B、C三數的大小為何？

- (A) $B > C > A$ (B) $A > B > C$ (C) $C > A > B$ (D) $C > B > A$
8. $A = (2^{-1})^{20} = 2^{-20}$ ； $B = (2^{-2})^{12} = 2^{-24}$ ； $C = (2^{-3})^6 = 2^{-18}$ ，故 $C > A > B$

(B) 9. 若 $a = -1\frac{1}{2}$ ，則 a 、 a^2 、 $\frac{1}{a}$ 、 $(\frac{1}{a})^2$ 四數中，值最大的是哪一個呢？

- (A) a (B) a^2 (C) $\frac{1}{a}$ (D) $(\frac{1}{a})^2$
9. $a = -\frac{3}{2}$ ， $a^2 = \frac{9}{4}$ ， $\frac{1}{a} = -\frac{2}{3}$ ， $(\frac{1}{a})^2 = \frac{4}{9}$

(C) 10. x 的 $\frac{1}{2}$ 的 $\frac{2}{3}$ 的 $\frac{3}{4}$ 的 $\frac{4}{5}$ 是 210，則 x 的 $\frac{1}{3}$ 是多少？

- (A) 105 (B) 210 (C) 350 (D) 420
10. $(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5})x = 210 \Rightarrow \frac{1}{5}x = 210 \Rightarrow x = 1050 \therefore \frac{1}{3}x = 350$

(B) 11. 999×9999 為幾位數呢？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9
11. $999 \times 9999 = (1000 - 1) \times 9999 = 9999000 - 1$ 為 7 位數

(B) 12. 某工程光緯獨作 15 日完工，承凱獨作 18 日完工。光緯每日比承凱每日多做全工程的多少？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{90}$ (C) $\frac{1}{60}$ (D) $\frac{1}{80}$
12. $\frac{1}{15} - \frac{1}{18} = \frac{6-5}{90} = \frac{1}{90}$

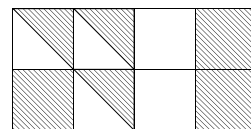
(B) 13. 英文字典共 2500 頁，厚 4 公分，則平均每頁的厚度為多少公分呢？

- (A) 1.6×10^{-2} (B) 1.6×10^{-3} (C) 1.6×10^{-4} (D) 16×10^{-4}
13. $\frac{4}{2500} = 0.0016 = 1.6 \times 10^{-3}$ (公分)

(D) 14. 如右圖，將矩形分成八塊大小相同的正方形，則斜線區域面積占原長方形面積的幾分之幾呢？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$

14. 將矩形中的小正方形看成兩個相等三角形，則矩形共有 16 個三角形，斜線部分占了 9 個



(B) 15. 一杯 200 克的咖啡，其咖啡因含量標示為 300ppm 以下，則此杯咖啡的咖啡因總含量最多不超過多少公克？(以科學記號表示； $1\text{ppm} = \frac{1}{1000000}$)

- (A) 0.6×10^{-1} (B) 6×10^{-2} (C) 60×10^{-3} (D) 60000×10^{-6}
15. $200 \times 300\text{ppm} = 200 \times 300 \times 10^{-6} = 60000 \times 10^{-6} = 6 \times 10^{-2}$ 公克

歷屆基測
試題

- (A) 1. 計算 $\frac{2}{3} \times (1 + \frac{1}{2}) - \frac{3}{2} \div (\frac{1}{2} - 1)$ 之值為何? 97 基測二
 (A) 4 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$ 1. 原式 = $(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}) - \frac{3}{2} \times (-2) = 1 + 3 = 4$

- (A) 2. 計算 $0.20523 - 0.20252$ 之值為何? 97 基測二
 (A) 2.71×10^{-3} (B) 2.71×10^{-4} 2. $0.20523 - 0.20252 = 0.00271 = 2.71 \times 10^{-3}$
 (C) 2.71×10^{-5} (D) 2.71×10^{-6}

- (A) 3. 若 a 、 b 兩數滿足 $10^{2a+1} = 1000^{b-1} = 1000000000$ ，則 $a+b=?$ 97 基測二
 (A) 8 (B) 15 3. $10^{2a+1} = 1000^{b-1} = 10^9$
 (C) $\frac{25}{2}$ (D) $\frac{43}{6}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2a+1=9 \\ 3b-3=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=8$

- (D) 4. 下列哪一個式子計算出來的值最大? 97 基測一
 (A) $8.53 \times 10^9 - 2.17 \times 10^8$ 4. (A) $8.53 \times 10^9 - 0.217 \times 10^9 = 8.313 \times 10^9$
 (B) $8.53 \times 10^{10} - 2.17 \times 10^9$ (B) $8.53 \times 10^{10} - 0.217 \times 10^{10} = 8.313 \times 10^{10}$
 (C) $9.53 \times 10^9 - 2.17 \times 10^8$ (C) $9.53 \times 10^9 - 0.217 \times 10^9 = 9.313 \times 10^9$
 (D) $9.53 \times 10^{10} - 2.17 \times 10^9$ (D) $9.53 \times 10^{10} - 0.217 \times 10^{10} = 9.313 \times 10^{10}$

- (C) 5. 計算 $48 \div (\frac{8}{15} + \frac{24}{35})$ 之值為何? 97 基測一
 (A) 75 (B) 160 (C) $\frac{315}{8}$ (D) $90 \frac{24}{35}$ 5. 原式 = $48 \div (\frac{56}{105} + \frac{72}{105}) = 48 \times \frac{105}{128} = \frac{315}{8}$

- (D) 6. 若三個正數 a 、 b 、 c 的關係式為 $a + \frac{a}{101} = b - \frac{b}{87} = c$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為何? 96 基測二
 (A) $a > b > c$ (B) $c > b > a$ (C) $a > c > b$ (D) $b > c > a$ 6. 原式 $\Rightarrow a(1 + \frac{1}{101}) = b(1 - \frac{1}{87}) = c, \therefore 1 + \frac{1}{101} > 1 > 1 - \frac{1}{87}, \therefore a < c < b$

- (B) 7. 在算式 $21 - (-\frac{50}{87} \square 24)^2$ 的 \square 中，填入下列哪一個運算符號，可使計算出來的值是最小的? 96 基測一
 (A) + (B) - (C) \times (D) \div 7. $\therefore 21 - (-\frac{50}{87} \square 24)^2$ 要最小， $\therefore (-\frac{50}{87} \square 24)^2$ 要最大，故為(B)

模塊學力基測
試題

- (B) 1. 試計算 $\frac{1}{(-2)} + \frac{2}{(-2)^2} + \frac{4}{(-2)^3} + \frac{8}{(-2)^4}$ 之值為何?
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 1. 原式 = $-\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - \frac{4}{8} + \frac{8}{16}$
 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$ = $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

- (B) 2. $A \times \frac{3}{5} = B \div 2 \frac{1}{2}$ ，若 $A > 0$ ， $B > 0$ ，則下列何者正確?
 (A) $A > B$ (B) $A < B$ 2. $\frac{3}{5}A = \frac{2}{5}B, \therefore \frac{3}{5} > \frac{2}{5}, \therefore A < B$
 (C) $A = B$ (D) 無法比較

- (C) 3. 下列計算式何者錯誤？
- (A) $25 - 3 \times [3^2 + 2 \times (-3)] + 5 = 21$
- (B) $[(-2)^3 \times (-3)^2 - (-18) \div 3 + 5] - (-1)^{10} = -62$
- (C) $[(-2)^3 \times (4 - 12) - (6 - 11) \times 4] \div (-2)^2 = -21$
- (D) $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1 = 100^2$
- 3.(C)原式 $= [-8 \times (-8) - (-5) \times 4] \times \frac{1}{4}$
 $= [64 + 20] \times \frac{1}{4} = 21$
- (A) 4. 設 $4^2 \times 10^3 \times 20 = 2^a \times 5^b$ ，求 $a + b = ?$
- (A) 13 (B) 10 (C) 7 (D) 5
- 4.原式 $= 2^4 \times (2 \times 5)^3 \times (2^2 \times 5) = 2^9 \times 5^4$
 $\Rightarrow a + b = 9 + 4 = 13$
- (C) 5. 請問： 17^{2007} 是 17^{2006} 的多少倍？
- (A) 2006 (B) 2007 (C) 17 (D) 10
5. $\frac{17^{2007}}{17^{2006}} = 17^{(2007-2006)} = 17$
- (B) 6. 計算 $(8.5 \times 10^{-6}) + (5.9 \times 10^{-8})$ 的值，並以科學記號表示出來。
- (A) 8.559×10^{-5} (B) 8.559×10^{-6}
- (C) 8.559×10^{-7} (D) 8.559×10^{-8}
- 6.原式 $= 850 \times 10^{-8} + 5.9 \times 10^{-8} = (850 + 5.9) \times 10^{-8}$
 $= 855.9 \times 10^{-8} = 8.559 \times 10^{-6}$
- (A) 7. 在電腦的容量規格中， $1Kb = 2^{10} \text{bytes}$ ， $1Mb = 2^{10}Kb$ ， $1Gb = 2^{10}Mb$ ，若小錠買了一顆 $8Gb$ 的隨身碟，相當於多少 *bytes*？
- (A) 2^{33} (B) 2^{34} (C) 2^{35} (D) 2^{36}
7. $8Gb = 8 \times 2^{30} = 2^3 \times 2^{30} = 2^{33} \text{ (bytes)}$
- (D) 8. $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{100}) = ?$
- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{50}$ (D) $\frac{1}{100}$
- 8.原式 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$
- (D) 9. 右表是史努比博士用顯微鏡觀察五種病毒大小的記錄表，請由大到小排列出五種病毒的大小順序。
- | | |
|---|-----------------------|
| A | 7.1×10^{-6} |
| B | 8.2×10^{-4} |
| C | 1.42×10^{-4} |
| D | 1.64×10^{-3} |
| E | 9×10^{-5} |
- (A) $D > C > B > E > A$
- (B) $D > B > C > A > E$
- (C) $A > B > C > E > D$
- (D) $D > B > C > E > A$
9. $A = 0.071 \times 10^{-4}$; $B = 8.2 \times 10^{-4}$;
 $C = 1.42 \times 10^{-4}$; $D = 16.4 \times 10^{-4}$;
 $E = 0.9 \times 10^{-4}$
 $\therefore 16.4 > 8.2 > 1.42 > 0.9 > 0.071$
 $\therefore D > B > C > E > A$
- (A) 10. 設 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ ，下列何者正確？
- (A) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b - c}$
- (B) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{c}$
- (C) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b} - a \times \frac{1}{c}$
- (D) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b + c}$
10. $a \div (b - c) = \frac{a}{b - c} = a \times \frac{1}{b - c}$
- (C) 11. 試計算 $5^{19} - (5^{20} + 5^{19}) \div 6$ 為何？
- (A) 5^{38} (B) 5 (C) 0 (D) 5^{-1}
- 11.原式 $= 5^{19} - (5^{19} \times 5 + 5^{19}) \div 6 = 5^{19} - 5^{19}(5 + 1) \div 6$
 $= 5^{19} - 5^{19} = 0$
- (B) 12. 已知 $3^2 = 9$ ， $3^3 = 27$ ， $3^4 = 81$ ， $3^5 = 243$ ，將 3^{201} 乘開後，它的個位數的數字為何呢？
- (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9
12. 3^1 個位數字 3 ; 3^2 個位數字 9 ; 3^3 個位數字 7 ; 3^4 個位數字 1 ;
 3^5 個位數字 3 ; ... (4 個為一循環)
 $\therefore 201 \div 4 = 50 \dots 1 \therefore 3^{201}$ 之個位數字為 3

第 3 單元

因數與倍數

36

1 基測出題機率★★★☆☆ 2 難易度★★☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

- (X) 1. 整數 0 是任意數 a 的倍數, 但 0 不是 a 的因數。
 💡 任意數 a 必須不等於 0, 才是正確敘述, 亦即 0 不是 0 的倍數 能力一
- (O) 2. 若質數 a 有一個大於 1 的因數 b , 則 $a = b$ 。
 💡 任意質數 a 的最大因數是 a 本身
- (O) 3. 因為 1 不是質數, 所以 1 絕對不是任意整數的質因數。
 💡 最小的質數為 2, 所以 1 當然不是任意整數的質因數 能力二
- (X) 4. 任意兩個相異的質數必互質, 且互質的兩數一定是質數。
 💡 互質的兩數不一定是質數, 例如: 3 與 4 互質但 4 不是質數
- (O) 5. 比某一質數小的任何自然數都與此質數互質。
 💡 質數 = $1 \times$ 本身
- (X) 6. 若 a 、 b 為相異的偶數, 則 $(a + 1)(b + 3)$ 必為質數。
 💡 $(a + 1)$ 與 $(b + 3)$ 皆為奇數, 兩奇數之乘積必為奇數, 但不一定是質數
- (X) 7. 沒有公因數的兩數即是互質。
 💡 互質的兩數, 其最大公因數為 1 能力三
- (X) 8. 若 a 、 b 為正整數, 且 $\frac{a}{b} = 3$, 則 $(a, b) = a$ 。
 💡 由 $\frac{a}{b} = 3$ 可知 a 為 b 的倍數 $\Rightarrow a = 3b, (a, b) = (3b, b) = b$
- (O) 9. 若 $a \div b = c$, 且 a 、 b 、 c 都是正整數, 則 a 與 b 的最小公倍數為 a 。
 💡 $\because a \div b = c$ 代表 a 能被 b 與 c 整除 $\therefore a$ 為 a 和 b 的最小公倍數 能力四
- (O) 10. 若 A 、 B 、 a 、 b 、 k 均為自然數, 且 a 、 b 互質, 若 $A = ak, B = bk$, 則 A 、 B 之最小公倍數為 abk 。
 💡 $[A, B] = [ak, bk] = abk$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 因數與倍數

一 因數與倍數的定義

除法原理	「被除數 = 除數 × 商數 + 餘數」，且除數 ≠ 0， $0 \leq \text{餘數} < \text{除數}$ 。
整除	A、B、C 皆為整數，當 $A \div B = C$ (餘數為 0)，亦即 $A = B \times C$ 時，稱 B (或 C) 整除 A 或是 A 能被 B (或 C) 整除。
因數與倍數	當 B 整除 A，則 B 稱為 A 的「 因數 」；反之 A 稱為 B 的「 倍數 」。 即 $A = B \times C$ 其中 $B、C \neq 0$ ，稱 B (或 C) 為 A 的因數；A 為 B (或 C) 的倍數。 例如： $8 \div 2 = 4$ ；2 與 4 皆為 8 的因數，8 是 2 與 4 的倍數。

二 因數與倍數的性質

1. 任何整數皆為 1 的倍數；1 為任何整數的因數，而且 1 是任何整數的**最小正因數**。
2. 任何整數 (除了 0 之外)，就是本身的因數，也是本身的倍數。
3. 0 是任意非零整數的**倍數**；但 0 不是任意整數的**因數** (∵ 分母不可為 0)。
4. 任意整數 (除了 0 之外) 都是 0 的因數。

三 倍數的判別法

2 的倍數判別法	末位數字是 0、2、4、6、8 的整數，則此數為 2 的倍數，例如：1974
5 的倍數判別法	末位數字是 0、5 的整數，則此數為 5 的倍數，例如：1790、1975
3 的倍數判別法	某整數的 數字總和 是 3 的倍數，則此數為 3 的倍數，例如：1974
9 的倍數判別法	某整數的 數字總和 是 9 的倍數，則此數為 9 的倍數，例如：1971
11 的倍數判別法	某整數的 (奇數位數字和) - (偶數位數字和) 的差值是 0 或 11 的倍數，則此數為 11 的倍數，例如：1782、1969

師說 1

〈因數與倍數的判別法 I〉

演練 1

1. 在 123、3462、45783、231110 中，是 2 的倍數有幾個？是 3 的倍數有幾個？
2. 若 A 是正整數，且 A 的所有正因數由大到小排列分別是 $r、s、t、8、7、4、2、1$ ，則 $r、s、t$ 分別是多少呢？
3. 在 200~400 之間 12 的倍數有幾個呢？

解

1. 是 2 的倍數有 3462、231110，共 2 個
是 3 的倍數有 123、3462、45783，共 3 個
2. 由題意可知
 $r \times 1 = s \times 2 = t \times 4 = 8 \times 7 = 56$ ；
此正整數應為 56；
所以 $r = 56, s = 28, t = 14$
3. $200 \div 12 = 16 \cdots 8$ ； $400 \div 12 = 33 \cdots 4$ ，
取 $33 - 16 = 17$ ；共有 17 個

1. 在 231、7895、66330、472098 中，是 5 的倍數有幾個？是 11 的倍數有幾個？
2. 若 B 是正整數，其全部的正因數由小到大排列如下： $1、2、3、e、6、d、9、c、18、b、36、a$ ，試求 $a - b + c - d + e = ?$
3. 在 1974~2007 之間，3 的倍數有幾個呢？

解

1. 是 5 的倍數有 7895、66330，共 2 個
是 11 的倍數有 231、66330、472098，共 3 個
2. $B = 1 \times a = 2 \times 36 = 3 \times b = e \times 18 = 6 \times c = d \times 9$
 $\Rightarrow a = 72, b = 72 \div 3 = 24,$
 $e = 72 \div 18 = 4, c = 72 \div 6 = 12,$
 $d = 72 \div 9 = 8$
 $\Rightarrow a - b + c - d + e = 56$
3. $1974 \div 3 = 658, 2007 \div 3 = 669,$
 $(669 - 658) + 1 = 12$ (個)

師說 2

〈因數與倍數的判別法 II〉

演練 2

38

1. 有一個四位數 $789\square$ ，同時為 2 和 3 的倍數，則 $\square = ?$
2. 巧虎要將 88 顆糖果分給他的好朋友，每一位好朋友都可以分到一樣多的糖果沒有剩下，已知巧虎的好朋友約有 12 位，請問巧虎的好朋友有多少位？

解

1. 2 的倍數時， $\square = 0、2、4、6、8$
3 的倍數時， $\square = 0、3、6、9$
 $\Rightarrow \square = 0$ 或 6
2. $88 = 2 \times 44 = 4 \times 22 = 8 \times 11$
故好朋友有 11 位

1. 有一個七位數 $123\square456$ 能被 9 整除，試求 $\square = ?$
2. 某國中師生共 676 人，要搭遊覽車去校外教學，若每車人數大於 20 人且小於 60 人，且每車人數需相同，試問需要幾輛車？

解

1. $1 + 2 + 3 + \square + 4 + 5 + 6 = 21 + \square$ ，
 $21 + 6 = 27$ 可被 9 整除， $\square = 6$
2. $676 = 1 \times 676 = 2 \times 338 = 13 \times 52$ ，
故每車可坐 52 人 \Rightarrow 共需 13 輛車

同 步 評 量 1

堆顆 堆顆 堆顆 堆顆
1. $42 = \cancel{1} \times 42 = 42 \times 1 = \cancel{2} \times 21 = 21 \times 2 \Rightarrow$ 共 8 種分法，且每堆 5 顆以上共有 5 種分法
 $= \cancel{3} \times 14 = 14 \times 3 = \cancel{6} \times 7 = \cancel{7} \times 6$

1. 楊丞林要將 42 顆糖果分給她的粉絲，而且每堆（包含分成一堆）糖果數目要相同，則她有 8 種分法。若經紀人告訴她每堆至少要有 5 顆以上，則她的分法剩下 5 種。
2. 裴湧駿與影迷的見面會，有六位幸運兒 A、B、C、D、E、F（依序同坐在一圓桌）可以分到巧克力，這包巧克力大約有 40~43 顆，裴湧駿從 A 粉絲依序輪流分給她們，每人每次分一顆，結果 E 粉絲分到最後一顆，則這包巧克力最有可能是 41 顆。
2. E 粉絲排序第五， $E \div 6$ 餘 5； $E = 6 \times \text{商數} + 5$ ；商數應為正整數；所以從 40~43 中選取 41，只有 $41 \div 6$ 餘 5 符合
3. 36、123、190、324、665、47 六個數中，有 a 個是 2 的倍數，有 b 個是 3 的倍數，有 c 個是 4 的倍數，則 $a + b - c =$ 4。

2 的倍數 $\Rightarrow 36、190、324 \Rightarrow a = 3$
3 的倍數 $\Rightarrow 36、123、324 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b - c = 4$
4 的倍數 $\Rightarrow 36、324 \Rightarrow c = 2$

(B) 4. 五位數 $29\square87$ 若為 3 的倍數，則 \square 不為下列何者？

- (A) 1 (B) 3
(C) 4 (D) 7

$4. 2 + 9 + \square + 8 + 7 = 26 + \square$ 須為 3 的倍數， $\therefore \square$ 可為 1、4、7

(C) 5. 97 減去下列哪一個數後是 7 的倍數？

- (A) 2 (B) 4
(C) 6 (D) 8

$5. 97 - 6 = 91, 91 \div 7 = 13$

(C) 6. 下列哪一個敘述是錯誤的？

- (A) 0 是除了 0 以外皆為任意整數的倍數
(B) 1 是任意整數的因數
(C) 因為 $72 = 8 \times 9$ ，所以 8 是 72 的倍數
(D) 因為 $28 = 4 \times 7$ ，所以 28 是 4 的倍數

6.(C) 8 是 72 的因數

能力

質數與質因數分解

一 質數的定義

質數	一個大於 1 的正整數，除了 1 與本身之外沒有其他的因數；亦即只有兩個因數就是 1 與本身。
合數	一個正整數除了 1 與本身之外，還有其他的因數，亦即有三個（含）以上正因數的整數。
質因數	一個正整數分解成一個或一個以上不同質數的相乘積，這些質數稱為該整數的質因數；亦即質因數既是因數也是質數。

二 質數的性質

1. 質數中最小的數是 2；質數中唯一的偶數是 2。
2. 合數中最小的數是 4，最大的數是無限大。
3. 1 沒有質因數。（因為 1 不是質數，所以 1 不是質因數。）
4. 100 以內的質數有 25 個。（要記起來！）

注意 100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

三 標準分解式（質因數分解）

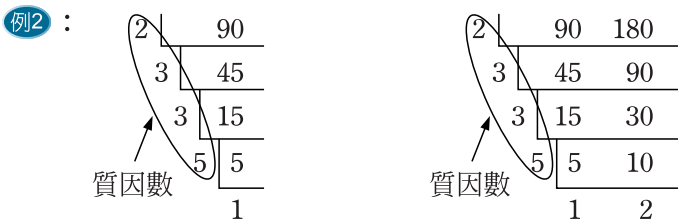
1. 標準分解式的定義：將一個合數，分解成質因數的連乘積，且將質數由小而大排列；相同的質數寫成次方的形式，稱為「標準分解式」，此過程稱為「質因數分解」。
2. 指數記法係指將相同數的連乘積之次數記在該數的右上方。

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ 個}} = a^n$$

← 指數
↑ 底數

例 1：120 = $\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ 個}} \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

3. 質因數分解最常運用「短除法」來分解一個（含）以上的數。



師說 3

〈質數與合數的判別 I〉

演練 3

從 1~25 的整數中，只有 1 個因數的正整數有多少個？只有 2 個因數的整數有多少個？

●解

- (1) $1 = 1 \times 1$ ，1 只有 1 個因數 \therefore 只有 1 個
 (2) 只有兩個因數的必定是質數，
 所以 2、3、5、7、11、13、17、19、23
 共有 9 個

下列整數中 36、38、49、50、55、64、100、113 哪些數是質數？哪些整數的因數個數是偶數個？哪些整數的因數個數是奇數個？

●解

- (1) 是質數的只有 113
 (2) 因為 38 是非完全平方數，所以因數有 1、2、19、38 共 4 個。因為 36 是完全平方數，所以因數有 1、2、3、4、6、9、12、18、36 共 9 個。因此，
 因數個數是偶數個有：38、50、55、113；
 因數個數是奇數個有：36、49、64、100

解題小偏方 因數個數是偶數個必定是非完全平方數，奇數個必定是完全平方數。

師說 4

〈質數與合數的判別 II〉

演練 4

將 50 表示為兩質數和，並使兩質數乘積為最大，則此兩質數應為何數呢？

●解

- $3 + 47 \Rightarrow 3 \times 47 = 141$
 $7 + 43 \Rightarrow 7 \times 43 = 301$
 $13 + 37 \Rightarrow 13 \times 37 = 481$
 $19 + 31 \Rightarrow 19 \times 31 = 589$
 所以此兩質數為 19 和 31

在 15、20、27、31 中，何者不能寫成兩個質數的和？

●解

- $15 = 2 + 13$ 、 $20 = 7 + 13$ 、 $31 = 2 + 29$
27 無法寫成兩個質數的和

師說 5

〈質因數分解〉

演練 5

- 下列各數 55、57、58、59 哪一個有最小的質因數？
- 有一數 $A = 82 \times 83 \times 84$ 之標準分解式為何？

●解

1. $55 = 5 \times 11$ ， $57 = 3 \times 19$ ，
 $58 = 2 \times 29$ ， $59 = 1 \times 59$ 。
 因為 2 是最小的質數，
 所以有最小質因數的數為 58
 2. $A = 82 \times 83 \times 84$
 $= (2 \times 41) \times 83 \times (2^2 \times 3 \times 7)$
 $= 2^3 \times 3 \times 7 \times 41 \times 83$

有一數 $A = 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14$ ，求 A 的標準分解式？A 的質因數和為何？

●解

- (1) $A = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \times 11$
 $\times (2 \times 2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7)$
 $= 2^7 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$
 (2) A 的質因數和
 $= 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41$

解題小偏方 因為 58 為偶數，且最小的質數為 2，因此我們可以直接判斷出 58 有最小質因數。

同步評量 2

1. 最接近 200 的質數為 199。
2. 將 1260 質因數分解可得 $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 。
3. 將 5025 寫成標準分解式 $a^x \times b^y \times c^z$ ，則 $a + b + c = 75$ ， $x + y + z = 4$ 。
3. $5025 = 3 \times 5^2 \times 67$ ， $3 + 5 + 67 = 75$ ， $1 + 2 + 1 = 4$
4. 在 361、342、324、306、289 中，因數個數為偶數個的為何？342、306
4. ∵ 342 和 306 非完全平方數
5. 若 2 和 3 為四位數 $5\square 2\square$ 的因數，且兩個方格內的數字是相同的，則 $\square = 4$ 。
5. \square 必為 0、2、4、6、8，又 $5 + 2 + \square + \square = 3$ 的倍數，只有 4 符合
6. 已知 A 數的質因數分解為 $a^3 \times b \times c$ ，其中 a 、 b 、 c 為相異質數，則 A 數最小為 120。
6. 欲求 A 數最小值，則 a 必為 2， $2^3 \times 3 \times 5 = 120$
7. 設 $22 \times 23 \times 24 \times 25$ 有 a 個相異質因數，24 有 b 個正因數，則 $a = 5$ ， $b = 8$ 。
7. $A = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 11 \times 23$ ，有 5 個相異質因數； $B = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ ，有 8 個正因數
8. 設 $x = 2^y \times 5 \times 11$ ，且 22 是 x 的因數，20 不是 x 的因數，則 $y = 1$ 。
8. ∵ $22 = 2 \times 11$ ， $20 = 2^2 \times 5$ ∴ $y = 1$

能力 公因數與最大公因數

一 公因數與最大公因數

1. **公因數**：當一個整數 a 同時是其他整數 b 、 c 、 d ……的因數時，則 a 稱為這些整數 b 、 c 、 d ……的公因數。
2. **最大公因數**：任意幾個整數的公因數中，最大的數，稱為最大公因數。
3. 最大公因數的表示法：以小括號表示，如 (a, b, c) 。

二 最大公因數的求法

1. **短除法**：找出 90、180 的共同質因數，依序整除，直到沒有共同質因數可以再除為止。

例 3： $(90, 180) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

2	90	180
3	45	90
3	15	30
5	5	10
	1	2

質因數

2. **指數型**：各個整數先分解成標準分解式，找出具有共同的質因數，且這個因數的次方數是最小或相同的，再列出連乘積的式子。

例 4： $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$
 $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
 $(90, 180) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

公因數與最大公因數的性質

42

1. 不論有幾個整數，這些整數的**最大公因數**僅有**1**個。
2. 最大公因數是所有公因數的**倍數**，所有公因數都是最大公因數的**因數**。
3. **互質**：若有二個整數其最大公因數等於1，則稱此二數為互質。

例5： $(24, 36) = 2^2 \times 3 = 12$

12的因數有1、2、3、4、6、12都是24與36的公因數。

例6：互質，但二數都不是質數，如 $(4, 21) = 1$ ； $(6, 55) = 1$ 。

二數都是質數，必定互質，如 $(13, 19) = 1$ ； $(23, 97) = 1$ 。

注意 二相異質數必定互質，但互質的二數未必為質數。

師說 6

〈最大公因數與互質〉

演練 6

1. 165、231的最大公因數為何？此二數的公因數為何？
2. $(2 \times 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 3 \times 5^2 \times 5^3 \times 7) = ?$
3. 有二組數 $(72, 117)$ 、 $(363, 274)$ ，哪一組數是互質？

解

1. $(165, 231) = 33$ ；

其公因數有1、3、11、33

2. 原式 $= (2^3 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5^5 \times 7)$
 $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

3. $(72, 117) = 3^2$ ； $(363, 274) = 1$

故363與274互質

1. 求 $(75, 105, 285) = ?$

2. 求 $(5 \times 7^3 \times 11^2, 5^3 \times 7^2 \times 11, 5^2 \times 7^5 \times 13) = ?$

3. 有三數78、91、130是否互質？若非互質此三數的公因數個數有幾個呢？

解

1. $(75, 105, 285) = 3 \times 5 = 15$

2. 原式 $= 5 \times 7^2 = 245$

3. $(78, 91, 130) = 13$ ，故此三數並非互質。

此三數的最大公因數為13，其公因數為1、13，因此，公因數個數有2個

師說 7

〈最大公因數的應用 I〉

演練 7

五月天想在錄音室中鋪上海綿墊，已知錄音室長560公分，寬320公分，每一塊海綿墊都是正方形且不可裁切，若要全部鋪滿，請問：五月天至少要買幾塊相同的海綿墊才能將錄音室鋪滿？此時海綿墊的邊長為多少？

解

求560與320的最大公因數，為海綿墊的邊長。

$(560, 320) = 2^4 \times 5 = 80$

$\Rightarrow 560 \div 80 = 7, 320 \div 80 = 4, 7 \times 4 = 28$

\therefore 需邊長80公分的海綿墊28塊

5566偶像團體為了要犒賞粉絲，特地製作了一個長32公分、寬28公分、高24公分的長方體蛋糕，為了給粉絲們吃到一樣大的正方體蛋糕又不剩下，請問：至少可切成幾塊小蛋糕呢？每一個小蛋糕的體積是多少呢？

解

(1) $(32, 28, 24) = 4$

$\Rightarrow 32 \div 4 = 8, 28 \div 4 = 7, 24 \div 4 = 6,$

\therefore 正方體蛋糕個數 $= 8 \times 7 \times 6 = 336$ (塊)

(2) 每一個正方體蛋糕體積為

$4 \times 4 \times 4 = 64$ (立方公分)

師說 8

〈最大公因數的應用 II〉

演練 8

有一個三角形的露營場地，每邊長為 120 公尺、160 公尺、180 公尺，童軍隊長要求在四周圍插上火把，每支火把間隔要相同且最大，而三角形營地的三頂點一定要豎立一支火把，請問：共要火把幾支？火把的間隔為多少公尺呢？

●解

$$(120, 160, 180) = 20 \text{ (公尺)}, 120 \div 20 = 6$$

$$160 \div 20 = 8, 180 \div 20 = 9$$

因為植樹原理所以每邊要插 7、9、10 支火把。

又三頂點會重複，所以需要插上

$$(7 + 9 + 10) - 3 = 23 \text{ 支火把}$$

∴ 火把間隔為 20 公尺，共有 23 支火把

黑珍珠蓮霧有 348 個，枇杷有 232 個，水果商打算將全部水果分裝但不超過 60 盒，每盒中都要有兩樣水果，且每一盒的蓮霧要一樣多，枇杷也是。請問：最多可以分裝成多少盒？兩樣水果在每盒中的個數為何？

●解

$(348, 232) = 2 \times 2 \times 29$ ，因為不可超過 60 盒，所以最多僅能裝 $2 \times 29 = 58$ 盒。

$$348 \div 58 = 6, 232 \div 58 = 4$$

∴ 可分裝成 58 盒，每盒裝有 6 個蓮霧、4 個枇杷

同步評量 3

(C) 1. 已知 a 、 b 的最大公因數為 18，請問 a 、 b 的所有正公因數有幾個？

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

$$1. \because 18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$$

∴ a 、 b 的正公因數為 1、2、3、6、9、18，共 6 個

(D) 2. 下列哪兩個數互質？

- (A) 31 與 93 (B) 28 與 91
(C) 21 與 231 (D) 74 與 123

2. (A) 31 與 93 均有因數 31，故不互質

(B) 28 與 91 均有因數 7，故不互質

(C) 21 與 231 均有因數 21，故不互質

(D) 74 與 123 除了 1 之外，無其他正因數，故互質

(B) 3. 下列哪個數與 $3 \times 5^2 \times 7$ 互質？

- (A) 57 (B) 121 (C) 225 (D) 287

3. (A) 57 為 3 的倍數

(B) 121 不是 3 或 5 或 7 的倍數，故互質

(C) 225 為 5 的倍數

(D) 287 為 7 的倍數

(A) 4. 將 36 個修正帶、42 支原子筆、102 個橡皮擦分裝在幾個文具盒中，若同一種文具在每盒中的個數均一樣多，最多可分裝成幾個文具盒？

- (A) 6 (B) 7 (C) 17 (D) 21

$$4. (36, 42, 102) = 6$$

(C) 5. 將一個長 48 公分，寬 18 公分的蜂蜜蛋糕，切成數個底面積相同的正方形小蛋糕，則每一個小蛋糕的底面積最大為多少平方公分？

- (A) 16 (B) 25 (C) 36 (D) 49

$$5. (48, 18) = 6, 6 \times 6 = 36$$

能力 四

公倍數與最小公倍數

一 公倍數與最小公倍數

1. **公倍數**：當一個整數 a 同時是其他整數 b 、 c 、 d ……的倍數時，則 a 稱為這些整數 b 、 c 、 d ……的公倍數。
2. **最小公倍數**：任意幾個整數的公倍數中，最小的數，稱為最小公倍數。
3. 最小公倍數的表示方法：以中括號表示，如 $[a, b, c]$ 。

二 最小公倍數的求法

1. **短除法**：找出 24、36、64 的共同質因數當除數，只要有二數（含）以上的數有共同質因數，都要除盡，直到沒有共同質因數可以再除為止，再將所有共同質因數及最終不能除的數寫成連乘積，即為所求。

例7：

2	24, 36, 64	$[24, 36, 64] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 3 \times 8 = 576$
2	12, 18, 32	
2	6, 9, 16	
3	3, 9, 8	
	1, 3, 8	

質因數

2. **指數型**：各個整數先分解為標準分解式，列出全部的質因數，若有相同的質因數則找出次方數最大的，再列出連乘積的式子。

例8： $24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$, $64 = 2^6$
 $[24, 36, 64] = 2^6 \times 3^2 = 576$

三 公倍數與最小公倍數的性質

- 不論有幾個整數，這些整數的最小公倍數僅有 1 個。
- 最小公倍數是所有公倍數的因數，所有公倍數都是最小公倍數的倍數。
- 已知有 $\frac{c}{a}$ 與 $\frac{d}{b}$ 兩個最簡分數：
 - 若要同乘一個「最小正整數」，使兩數成為整數，此數應為 $[a, b]$ 。
 - 若要同乘一個「最小正分數」，使兩數成為整數，此數應為 $\frac{[a, b]}{(c, d)}$ 。
- 若 a, b 兩數互質，則 a, b 的最小公倍數為 $a \times b$ 。
- 若有 a, b 兩數，則 $a \times b = [a, b] \times (a, b)$ 。

師說 9

〈最小公倍數的計算〉

演練 9

- 試求 105, 220, 231 的最小公倍數。
- 試求 $2^2 \times 3^3$, $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ 的最小公倍數。(以標準分解式表示)
- 有兩分數 $2\frac{1}{26}$, $2\frac{3}{65}$ 同時乘上一個正分數，使其兩數成為正整數，則所乘之數最小為何？

解

- $[105, 220, 231]$
 $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 4620$
- $[2^2 \times 3^3, 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11] = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$
- $2\frac{1}{26} = \frac{53}{26}$, $2\frac{3}{65} = \frac{133}{65}$, $[26, 65] = 130$
 $(53, 133) = 1$, 所乘的最小整數為 130

- 試求 88, 189 的最小公倍數。

- 若 $[300, 360, 432] = 2^a \times 3^b \times 5^c$, 求 $a + b + c = ?$
- 若 A, B 為正整數, $A \times B = 7524$, A 與 B 的最大公因數為 6, 則 A 與 B 的最小公倍數為何？

解

- $\because 88 = 2^3 \times 11$, $189 = 3^3 \times 7$ 兩數互質
 $\therefore [88, 189] = 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11 = 16632$
- $[300, 360, 432] = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$
 $\Rightarrow a + b + c = 9$
- $\because A \times B = [A, B] \times (A, B)$
 $\therefore [A, B] = 7524 \div 6 = 1254$

師說 10

〈最小公倍數的應用〉

演練 10

子睿、莉婷、羿嘉三人同時同地出發，依同方向繞周長 1980 公尺的圓形水池競走，每分鐘子睿走 330 公尺；莉婷走 220 公尺；羿嘉走 198 公尺，試問幾小時後三人相會於原點？又相會時子睿走了多少公里？

●解

- (1) $1980 \div 330 = 6$, $1980 \div 220 = 9$,
 $1980 \div 198 = 10$
 $\Rightarrow [6, 9, 10] = 90$ (分) = 1.5 小時
- (2) $90 \div 6 = 15$,
 $1980 \times 15 = 29700$ (公尺) = 29.7 (公里)

勝峰、棋凱、正義三位同學，體育課跑 360 公尺的操場，從起跑線沿同方向出發，勝峰每分鐘跑 72 公尺、棋凱每分鐘跑 90 公尺、正義每分鐘跑 60 公尺，則幾分鐘之後三人會在起跑處會合呢？

●解

- 勝峰跑一圈需 $360 \div 72 = 5$ (分)
 棋凱跑一圈需 $360 \div 90 = 4$ (分)
 正義跑一圈需 $360 \div 60 = 6$ (分)
 $\therefore [5, 4, 6] = 60$ (分)

同步評量 4

(B) 1. 試求 56 與 75 的最小公倍數為何？

- (A) 2100 (B) 56×75
 (C) $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ (D) $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

1. $56 = 2^3 \times 7$, $75 = 3 \times 5^2$, 兩數互質
 $[56, 75] = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 56 \times 75$

(C) 2. 試求 $2^3 \times 3^2 \times 7$ 與 $2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ 的最小公倍數為何？

- (A) $2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$ (B) $2^3 \times 3^3 \times 7$
 (C) $2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11$ (D) $2^2 \times 3^2 \times 7$

2. $[2^3 \times 3^2 \times 7, 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11]$
 $= 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11$

(D) 3. 若 a, b 為正整數， $a \times b = 3366$ ， $[a, b] = 306$ ，則 $(a, b) = ?$

- (A) 3 (B) 6
 (C) 9 (D) 11

3. $a \times b = [a, b] \times (a, b)$
 $\Rightarrow 3366 = 306 \times (a, b) \Rightarrow (a, b) = 11$

(D) 4. $\frac{1}{12}$ 與 $\frac{1}{18}$ 分別乘以下列哪一正整數後，皆都變成整數？

- (A) 24 (B) 38
 (C) 48 (D) 72

4. 此正整數 $= [12, 18] = 2^2 \times 3^2 = 36$,
 凡為 36 倍數皆可， $72 = 36 \times 2$

(A) 5. 長方形磁磚，每塊長 40 公分、寬 60 公分，若磁磚不分割，以這些磁磚拼成一個最小正方形，則需要幾塊長方形磁磚？

- (A) 6 (B) 8
 (C) 12 (D) 16

5. $[40, 60] = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$
 $\frac{120}{40} \times \frac{120}{60} = 2 \times 3 = 6$ (塊)

(B) 6. 八卦山長隧道，隧道長 6400 公尺，隧道的兩側每隔 100 公尺裝燈一盞（兩端都裝），今為增強照明，改為每隔 80 公尺裝燈一盞，請問：施工時有多少盞燈不必移動？

- (A) 33 (B) 34
 (C) 35 (D) 36

6. $[80, 100] = 2^4 \times 5^2 = 400$, $6400 \div 400 = 16$,
 $(16 + 1) \times 2 = 34$ (盞)



基本觀念題

(B) 1. 下列敘述何者正確？

- (A) 除了 1 及自己本身之外無其他正因數的自然數稱為質數
- (B) 恰有兩個正因數的自然數稱為質數
- (C) 不是質數的自然數稱為合數
- (D) 質數均為奇數

1. (A) 自然數包含 1, 1 不為質數
(C) 1 不是質數也不是合數
(D) 質數中唯有 2 是偶數

(A) 2. 下列何者是 $2^2 \times 3$ 的倍數？

- (A) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (B) $2^3 \times 5$ (C) 2×3^2 (D) $2 \times 3^2 \times 7$

2. $2^2 \times 3$ 的倍數 $\Rightarrow 2^2 \times 3^3 \times 5$

(B) 3. 下列哪一個數的質因數僅有 2、3、7 呢？

- (A) 24 (B) 42 (C) 28 (D) 82

3. $42 = 2 \times 3 \times 7$

(B) 4. $(84, 120, 210) + [12, 15, 45]$ 的值為下列何者？

- (A) 168 (B) 186 (C) 268 (D) 286

4. $(84, 120, 210) = 2 \times 3 \times 6$,
 $[12, 15, 45] = 3^2 \times 4 \times 5 = 180 \Rightarrow 6 + 180 = 186$

(C) 5. 右列短除法的過程，何者敘述正確？

- (A) 21 是三數最大公因數
- (B) $3 \times 7 \times 19$ 是三數的最小公倍數
- (C) 3 是三數的最大公因數
- (D) $1 \times 7 \times 19$ 是三數的最小公倍數

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 21, 147, 57} \\ 7 \overline{) 7, 49, 19} \\ 1, 7, 19 \end{array}$$

5. 3 是三數的最大公因數， $3 \times 7^2 \times 19$ 是三數的最小公倍數

(D) 6. 下列各數何者可以用兩個相異質數之和表示呢？

- (A) 2 (B) 3
- (C) 4 (D) 5

6. $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3 = 2 + 2$, $5 = 1 + 4 = 2 + 3$,
又 1 不為質數，故只有 5 符合

(D) 7. 已知 $A = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 、 $B = 6 \times 5 \times 7$ ，則下列敘述何者有誤？

- (A) $[A, B] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ (B) $(A, B) = 2 \times 3 \times 5$
- (C) B 有 4 個相異質因數 (D) B 有 14 個正因數

7. B 有 16 個正因數

(C) 8. 假設 x 為正整數，使得 $\frac{57}{x}$ 也是正整數的 x 有多少個？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

8. 當分子為分母的倍數時，則此分數為一整數，又 57 的因數有 1、3、19、57 四個，故 x 有四個

(A) 9. 若有 a 、 b 兩數， $a = 3^3 \times 7^2 \times 11$ ， $b = 5^3 \times 7^3 \times 11^2$ ，則 a 、 b 的正公因數有幾個？

- (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

9. $(a, b) = 7^2 \times 11$ ，公因數有 1、7、11、49、77、 $7^2 \times 11$ ，共 6 個

(D) 10. 判斷下列何者不是 1599 的因數呢？

- (A) 13 (B) 41 (C) 123 (D) 202

10. $1599 = 3 \times 13 \times 41$ ，又 $123 = 3 \times 41$
故 202 不為 1599 的因數

(A) 11. 若 9、15、16、35、50 均為 x 的因數，則 x 的最小值為何？

- (A) $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ (B) $2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7$
- (C) $2 \times 3 \times 5$ (D) $2 \times 3^2 \times 5$

11. $9 = 3^2$, $15 = 3 \times 5$, $16 = 2^4$,
 $35 = 5 \times 7$, $50 = 2 \times 5^2$
 x 的最小值 $= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

- (C) 12. 有三個正分數 $\frac{35}{12}$ 、 $\frac{49}{30}$ ，分別乘以一個正分數 a 之後，都成為整數，則 a 的值可能為下列何者？
 (A) $\frac{30}{7}$ (B) $\frac{7}{30}$ (C) $\frac{60}{7}$ (D) $\frac{7}{60}$ 12. $a = \frac{[12, 30]}{(35, 49)} = \frac{60}{7}$
- (D) 13. 老師發給每一位同學一張長、寬分別為 12、15 公分的衛生紙，請問：要多少張才能組合出一個正方形呢？
 (A) 38 (B) 32 (C) 26 (D) 20 13. $[12, 15] = 60, 60 \div 12 = 5, 60 \div 15 = 4, 5 \times 4 = 20$
- (D) 14. 施努筆老師要在 1 年 18 班進行分組教學，他發現如果 4 人一組、5 人一組、8 人一組都可以將班上同學編組完成，請問：該班最少有多少人呢？
 (A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 40 14. $[4, 5, 8] = 2^3 \times 5 = 40$
- (C) 15. 有一瓶藥水 924 c.c.，用滴管（最小單位為 1c.c.）平均分裝於若干個杯子內，若每個杯子內的藥水 c.c. 數均為 x ，則 x 不可能為下列何者？
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 15. $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$ ，沒有 5 這個因數

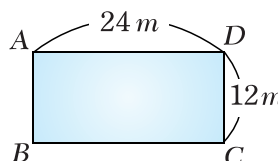


- (B) 1. 小王有一包糖果，若平均分成 21 堆，剩 17 顆；若平均分成 7 堆，則剩幾顆？
 (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 6 1. 設平分成 21 堆時，每堆有 a 顆糖果，則有 $21a + 17$ 顆糖果，平分成 7 堆
 $\Rightarrow (21a + 17) \div 7 = 3a + 2 + \frac{3}{7} \Rightarrow$ 可平分成 $(3a+2)$ 堆，剩 3 顆 97 基測一
- (B) 2. 有一個三位數，其百位、十位、個位數字分別為 1、 a 、 b 。若此數與 72 的最大公因數為 12，則 $a + b$ 可能為下列哪一數？
 (A) 2 (B) 5 (C) 8 (D) 14 2. 100~200 之間，12 的倍數有 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192，其中滿足題意的有 132 和 156
 $a + b$ 可能為 $3 + 2 = 5$ 或 $5 + 6 = 11$ 97 基測一
- (C) 3. 有 30 張分別標示 1~30 號的紙牌。先將號碼數為 3 的倍數的紙牌拿掉，然後從剩下的紙牌中，拿掉號碼數為 2 的倍數的紙牌。若將最後剩下的紙牌，依號碼數由小到大排列，則第 5 張紙牌的號碼為何？
 (A) 7 (B) 11 (C) 13 (D) 17 3. $[2, 3] = 6$ ，依序拿掉 2、3、6 的倍數後，剩下的數由小到大排列為：1、5、7、11、13、17、...，故第 5 張紙牌的號碼為 13 96 基測一
- (D) 4. 小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼（例如，生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 與 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145）。已知小華的密碼為 2030，求小華出生在幾月分？
 (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 12 4. $2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 29, 5 + 7 = 12, 2 + 29 = 31$ 94 基測一
- (A) 5. 設「 $a \ominus b$ 」代表大於 a 且小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \ominus 15 = 2$ 。若 $30 \ominus c = 2$ ，則 c 可能為下列哪一個數？
 (A) 38 (B) 42 (C) 46 (D) 50 5. 由 $30 \ominus c = 2$ 可知，大於 30 且小於 c 的有 2 個質數；大於 30 的前兩個質數是 31、37，所以 c 可能為 38 94 基測一



- (B) 1. 下列四個數中哪一個數與 77 互質？
 (A) 35 (B) 34 (C) 33 (D) 22
 1. $77 = 7 \times 11$ ∴ 34 非 7 或 11 的倍數 ∴ 77 與 34 互質
- (C) 2. 求 a 、 b 的最大公因數，計算過程如右圖，則下列何者正確？
 (A) $a + b + c = 267$ (B) $b - d = 100$ (C) $a + b = 245$ (D) $d > c$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) a, b} \\ \underline{28, c} \\ d, 3 \end{array}$$

 2. $d = 28 \div 7 = 4, c = 3 \times 7 = 21,$
 $a = 28 \times 5 = 140, b = 21 \times 5 = 105$
- (A) 3. 你的 YAHOO 電子郵件信箱必須有四位數密碼輸入才能打開，已知密碼 $abcd$ 分別是在 $2520 = 2^a \times b^2 \times c \times d$ 的質因數分解中，請問：此信箱密碼為何？
 (A) 3357 (B) 3372 (C) 2357 (D) 2375
 3. $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
- (A) 4. 若 $(甲, 72) = 12, [甲, 72] = 360$ ，求甲 = ？
 (A) 60 (B) 50 (C) 40 (D) 30
 4. $甲 \times 72 = 12 \times 360, 甲 = 60$
- (B) 5. 符號「甲◎乙」代表甲、乙的最小公倍數除以最大公因數，例如： $12 \odot 16 = 48 \div 4 = 12$ ，請問： $64 \odot 224 = ?$
 (A) 7 (B) 14 (C) 28 (D) 32
 5. $[64, 224] = 32 \times 2 \times 7 = 448,$
 $(64, 224) = 32, 448 \div 32 = 14$
- (D) 6. 老師拿出一張長 240cm、寬 150cm 的圖畫紙，欲剪出 n 個正方形做為抽籤之用，正方形大小相同，但紙張不可以剩下，則 n 的最小值為何？
 (A) 24 (B) 30 (C) 36 (D) 40
 6. $(240, 150) = 30, 240 \div 30 = 8,$
 $150 \div 30 = 5, 8 \times 5 = 40$
- (B) 7. 有一正整數 $64 = a \times b, a、b$ 皆是大於 0 的整數，求 $a + b$ 的最小值為何？
 (A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14
 7. $64 = 8 \times 8, 8 + 8 = 16$ (最小值)
- (C) 8. 學校舉行模擬考從早上 6 時起，每 45 分敲一下下課鐘，每 50 分敲一下模擬考結束鐘，請問：下課鐘與模擬考結束鐘何時齊鳴呢？
 (A) 上午 11:30 (B) 中午 12:30 (C) 下午 1:30 (D) 下午 2:30
 8. 鐘聲齊鳴的時間是 $[45, 50] = 450$ ；
 早上 6 時到下午 1 時共 7 小時計 420 分，
 所以 $450 - 420 = 30$ ；下午 1 時 30 分
- (C) 9. 正整數 a 與 1176 的最大公因數為 42，且 140 與 a 的最大公因數為 70，則 a 的最小值為何？
 (A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 250
 9. ∴ $(a, 1176) = 42, (140, a) = 70,$
 ∴ $a = [42, 70] = 210$
- (B) 10. 已知 $x = 2 \times 3^{\square} \times 5$ ，假設 540 是 x 的倍數，但 450 不是 x 的倍數，則 $\square = ?$
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
 10. $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5, 450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ ，因為 540 是 x 的倍數，
 則 \square 可為 1、2、3，又 450 不為 x 的倍數，故 \square 只能為 3
- (A) 11. 一年 18 班教室的內圍長 24 公尺、寬 12 公尺，甲、乙、丙三人比賽，分別以每秒 3 公尺、4 公尺、6 公尺的速率從頂點 A 出發，沿 ABCD 的順序繞著教室的內圍青蛙跳，請問：幾秒後三人同時在 A 點相會？
 (A) 72 (B) 62 (C) 52 (D) 42

 11. 周長 $24 + 24 + 12 + 12 = 72$ (公尺)
 $72 \div 3 = 24; 72 \div 4 = 18; 72 \div 6 = 12;$
 $[24, 18, 12] = 72$ (秒)

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try!

說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

- (X) 1. *i-cash* 卡片的長為 a 公分, 寬比長短 2 公分, 則其周長為 $a(2a - 2)$ 。
 💡 周長 $= 2 \times [a + (a - 2)] = 2(2a - 2)$ 能力一
- (O) 2. 有一工程, 甲獨做需 x 天完成, 乙獨做需 3 天完成, 則甲、乙合作需 $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$ 天才可完成。
 💡 \because 甲、乙合作一天完成總工程的 $\frac{1}{x} + \frac{1}{3}$ \therefore 甲、乙合作需 $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$ 天才可完成
- (X) 3. 海角七億電影票房低迷, 每張票原價 a 元, 在第一次促銷降價 10% 後, 為了吸引人潮再折扣 20%, 則票價變為 $a \times 70\%$ 。
 💡 $a \times 0.9 \times 0.8 = 0.72a = a \times 72\%$
- (X) 4. $\frac{2x - 1}{3} + \frac{3x + 2}{4} = 4(2x - 1) + 3(3x + 2) = 8x - 4 + 9x + 6 = 17x + 2$ 。
 💡 分式的化簡不可以去分母, $\frac{2x - 1}{3} + \frac{3x + 2}{4} = \frac{17x + 2}{12}$ 能力二
- (O) 5. 有一瓶 80 c.c. 的優碘溶液, 重量百分濃度為 3%, 若要將其濃度降為 2%, 則設再加入 x c.c. 的水, 可列式為 $(80 \times 0.03) \times 100 = 2(80 + x)$ 。
 💡 $\frac{80 \times 0.03}{80 + x} = \frac{2}{100} \Rightarrow (80 \times 0.03) \times 100 = 2(80 + x)$
- (X) 6. 一元一次方程式 $-9x + 14x + 3 + 1 = 2x + 3x + 4$ 的解為 $x = 0$ 。
 💡 $ax + b = 0 \Rightarrow$ 當 $a = b = 0$, 則 x 為任意數, 無限多解 \rightarrow 恆等式 能力三
- (O) 7. 若 $ax = bx$, 則 a 不一定等於 b 。
 💡 \because 若 $x = 0$, 在 $a \neq b$ 時, $ax = 0, bx = 0, ax = bx$
- (X) 8. $3x + 8 - \frac{3}{x} = 0$ 為一元一次方程式。
 💡 同乘 $x \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow$ 一元二次方程式
- (X) 9. 若 x 為整數, 且 $|x + 1| + |x - 1| = 0$, 則 x 的值為 1 與 -1 。
 💡 $\because x - 1 = 0$ 且 $x + 1 = 0$, 則 $x = 1$ 或 -1 , 但 x 不可能同時為 1 和 -1 , $\therefore x$ 不存在
- (O) 10. 若有 6 個連續整數, 其前 3 個數之和為 24, 則後 3 個數之和為 33。
 💡 令此 6 個連續遞增的整數為 $x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4, x + 5; x + x + 1 + x + 2 = 24, 3x = 21 \Rightarrow x = 7; (7 + 3) + (7 + 4) + (7 + 5) = 33$

數學

健康狀況檢核表

※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 以符號列式

一 兩數相乘的記法

數字與文字符號相乘的記法	數字寫在文字之前，「 \times 」可寫成「 \cdot 」或省略不寫 例如： $x \times (-3) = (-3) \cdot x = -3x$
文字與文字符號相乘的記法	相同的文字符號相乘可改寫成指數形式，不同的文字符號相乘應按照字母順序編寫，且「 \times 」可省略不寫。 例如： $2 \times x \times x = 2x^2$ ； $a \times x \times 3 \times p \times z = 3apxz$
文字除以數字的記法	「 \div 」可以省略不寫，並將該數寫成分數形式與文字符號相乘 例如： $x \div 4 = x \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$

二 以符號代表數學式

條件	符號表示法
n 為整數	則偶數以 $2n$ 表示，奇數以 $2n + 1$ 表示
連續三整數	則以 $n - 1$ 、 n 、 $n + 1$ 或 n 、 $n + 1$ 、 $n + 2$ 表示
連續三偶數或三奇數	則以 $n - 2$ 、 n 、 $n + 2$ 表示

師說 1

〈依題意以符號列式〉

演練 1

請依下列各題之題意列出數學式：

- 有糖果 y 顆平均分給同學吃，若每位同學平均分得 6 顆後，還剩下 3 顆，則同學共有幾位？
- 有一長方形的周長為 50，若長為 x ，則此長方形的面積該如何表示？
- 若雞蛋一打 x 元，則買 20 顆雞蛋需要多少錢？

解

- $(y - 3) \div 6 = \frac{y - 3}{6}$ (位)
- 寬 $= \frac{50}{2} - x = 25 - x$ ，
面積 $= x(25 - x)$ (平方單位)
- $x \div 12 \times 20 = \frac{5}{3}x$ (元)

試以文字符號表示下列各題的解：

- 奇鼎國中福利社將每罐成本為 x 元的優酪乳加六成作為定價，再以定價打 8 折售出，請問：每罐優酪乳賺或賠多少元呢？
- 若有一只王建民用過的棒球手套，按原價打 6 折後賣 x 元，則此手套原價是多少？
- 邱薏仁買了 5 支原子筆，若一打原子筆需要 a 元，則邱薏仁付 100 元可找回多少元？

解

- $x \times 1.6 \times 0.8 = 1.28x \Rightarrow 1.28x - x = 0.28x$
 \Rightarrow 每罐賺 $0.28x$ (元)
- 原價 $\times 0.6 = x$
 $\Rightarrow x \div 0.6 = x \div \frac{3}{5} = x \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}x$ (元)
- 一支原子筆為 $\frac{a}{12}$ 元
 $\Rightarrow 100 - 5 \times \frac{a}{12} = 100 - \frac{5}{12}a$ (元)

解題小偏方

設方程式的重點在於：將想求的數設為 x ，依照問題所給定條件寫成方程式，不需要考慮太多的枝節而被語意給困住。

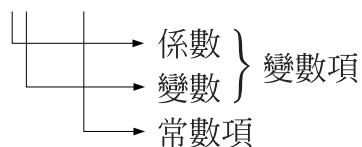
同步評量 1

- (D) 1. 人輔、紀晴、小鐘一起去唱 KTV 共花了 800 元，又共同買了飲料花了 x 元，則每人平均須分攤多少元？
 (A) $800 + x$ (B) $\frac{800}{3} + x$ (C) $800 + \frac{x}{3}$ (D) $\frac{800 + x}{3}$
- (C) 2. 維尼的爺爺年齡比維尼的爸爸多了 40 歲，而維尼的爸爸年齡是維尼的 2 倍，若維尼今年是 x 歲，則爺爺的年齡該如何表示？
 (A) $x + 40$ (B) $(x + 40) \times 2$ (C) $2x + 40$ (D) $2 \times 40 + x$
- (B) 3. 小嫻在資訊展的時候，用 x 元買了一臺 85 折的促銷電腦，則這臺電腦原售價為多少元？
 (A) $\frac{x}{85}$ (B) $\frac{100}{85}x$ (C) $0.85x$ (D) $8.5x$
- (C) 4. 已知大諒哥的身高是小亮哥的 $\frac{11}{9}$ 倍少 9 公分，若小亮哥的身高為 x 公分，則大諒哥的身高為多少公分？
 (A) $\frac{11x - 9}{9}$ (B) $\frac{11}{9}x - 1$ (C) $\frac{11}{9}x - 9$ (D) $\frac{11}{9}(x - 9)$

能力 一次式的運算

一 加減法運算

1. 一次式的型態： $3x - 5 \Rightarrow$ 一元一次式



注意 在 x 的多項式中， x 的次方相同的項，稱為同類項，常數是 x^0 項。

(1) x 與 $3x$ 是同類項，(2) $\frac{1}{x}$ 與 x 不是同類項，(3) \sqrt{x} 與 $2x$ 不是同類項。

2. 同類項才能相加減。

例 1 : $2x + 3y - x + 2y - 5$
 $= (2x - x) + (3y + 2y) - 5 = x + 5y - 5$

二 乘除法運算

1. 運算三律

- (1) 交換律： $a \times b = b \times a$
- (2) 結合律： $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- (3) 分配律： $a \times (b \pm c) = ab \pm ac$

2. 除法運算：先將除數變為倒數，再與被除數相乘。

3. 去括號運算

- (1) 由左運算到右，先乘除後加減，先做小括號再做中括號最後處理大括號。
- (2) 括號前若為「減號」，去括號後，括號內的運算符號也要「變號」。

師說 2

〈一次式的化簡〉

演練 2

52

- $(-6x) \div (-\frac{2}{3}) = ?$
- $(-8y) \div 4 - 3 = ?$
- $2(3x - 1) + (5x - 2) = ?$
- $x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = ?$

解

- 原式 $= 6x \times \frac{3}{2} = 9x$
- 原式 $= \frac{(-8y)}{4} - 3 = -2y - 3$
- 原式 $= 6x - 2 + 5x - 2 = 11x - 4$
- 原式 $= \frac{16x - 8x + 4x - 2x + x}{16} = \frac{11}{16}x$

- $3(2x - 3) - 4(3x + 2) = ?$
- $(-\frac{1}{2}) \times (-10x) + (3x - 5) = ?$
- $(-7x + 8) \div (-4) = ?$
- $\frac{4x - 1}{5} - \frac{1 - 2x}{3} + \frac{-3x}{4} = ?$

解

- 原式 $= 6x - 9 - 12x - 8 = -6x - 17$
- 原式 $= 5x + 3x - 5 = 8x - 5$
- 原式 $= \frac{-7x + 8}{(-4)} = \frac{7}{4}x - 2$
- 原式 $= \frac{48x - 12 - 20 + 40x - 45x}{60}$
 $= \frac{43x - 32}{60}$

解題小偏方

◎注意括號前的減號(負號)： $-(-3x + 4) = 3x - 4$

◎注意分式中的減號： $\frac{-3(2x + 4)}{6} - \frac{-2(3x + 4)}{6} = \frac{-6x - 12 + 6x + 8}{6} = -\frac{2}{3}$

師說 3

〈一次式的運算〉

演練 3

- 設 $A = 3x + 2$, $B = -4x + 3$, $C = x + 7$, 試化簡 $\frac{3}{2}A - \frac{1}{4}B + \frac{C}{8} = ?$ (以 x 表示)
- 教室布置, 佩恩獨做要 3 天才能完成, 育真獨做要 5 天才能完成, 若佩恩先做 x 天 ($x < 3$), 則育真接手還要幾天才能完成教室布置?

解

$$1. \frac{3}{2}(3x - 2) - \frac{1}{4}(-4x + 3) + \frac{1}{8}(x + 7)$$

$$= \frac{9x - 6}{2} + \frac{4x - 3}{4} + \frac{x + 7}{8}$$

$$= \frac{36x - 24 + 8x - 6 + x + 7}{8} = \frac{45x - 23}{8}$$

2. 設教室布置為 1, 佩恩一天做 $\frac{1}{3}$,

育真一天做 $\frac{1}{5}$,

$$(1 - \frac{1}{3}x) \div \frac{1}{5} = (1 - \frac{1}{3}x) \times 5$$

$$= 5 - \frac{5}{3}x \text{ (天)}$$

- 設 $P = 3x - 2$, $Q = \frac{2}{3}P - x$, $R = \frac{3}{4}Q + x$, 試化簡 $2P - 3Q + 4R = ?$ (以 x 表示)
- 臺北與臺南相距 200 公里, 小華從臺南到臺北, 去程每小時 x 公里, 回程每小時 100 公里, 請問: 來回的平均時速為何? (以 x 表示)

解

$$1. R = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}P - x) + x = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}x$$

$$2P - 3Q + 4R$$

$$= 2P - 3(\frac{2}{3}P - x) + 4(\frac{1}{2}P + \frac{1}{4}x)$$

$$= 2P - 2P + 3x + 2P + x$$

$$= 2P + 4x = 2(3x - 2) + 4x = 10x - 4$$

$$2. \frac{200}{x} + \frac{200}{100} = \frac{200}{x} + 2,$$

$$400 \div (\frac{200}{x} + 2) = 400 \times (\frac{x}{200 + 2x})$$

$$= \frac{200x}{100 + x} \text{ (公里/小時)}$$

同步評量 2

(D) 1. 下列選項何者正確？

- (A) $-(x-2) = -x-2$ (B) $(3x-1) \times 4 = 12x-1$ (C) $-2(-3x+4) = 6x+8$ (D) $-3(2x-1) = -6x+3$

1. (A) $-(x-2) = -x+2$

(B) $(3x-1) \times 4 = 12x-4$

(C) $-2(-3x+4) = 6x-8$

(D) 2. 化簡 $\frac{1+x}{2} + \frac{2-x}{3} - \frac{x-2}{4} = ?$

- (A) $\frac{-x+16}{9}$ (B) $\frac{-x+16}{12}$
 (C) $\frac{-x+20}{9}$ (D) $\frac{-x+20}{12}$

2. 原式 = $\frac{6+6x}{12} + \frac{8-4x}{12} - \frac{3x-6}{12}$
 $= \frac{6+6x+8-4x-3x+6}{12} = \frac{-x+20}{12}$

(B) 3. 有一梯形，上底為 $(3a-1)$ 公分、下底為 $(5a-3)$ 公分、高為 8 公分，則此梯形的面積為多少平方公分？

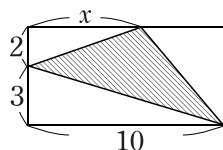
- (A) $16a-8$ (B) $32a-16$
 (C) $16a-4$ (D) $32a-4$

3. 梯形面積 = $\frac{(\text{上底}+\text{下底}) \times \text{高}}{2}$
 $= \frac{[(3a-1)+(5a-3)] \times 8}{2} = 4 \times (8a-4) = 32a-16$

(A) 4. 如右圖，求矩形內斜線部分的三角形面積為何？

- (A) $\frac{3}{2}x+10$ (B) $\frac{3}{2}x-85$ (C) $\frac{x}{2}+10$ (D) $\frac{x}{2}-85$

4. $10 \times (2+3) - \frac{2 \times x}{2} - \frac{3 \times 10}{2} - \frac{(10-x) \times 5}{2} = 50 - x - 15 - 25 + \frac{5}{2}x = 10 + \frac{3x}{2}$



能力

一元一次方程式的應用

一 一元一次方程式的標準式

若一數學式型如： $ax+b=0$ ，則稱為一元一次方程式。

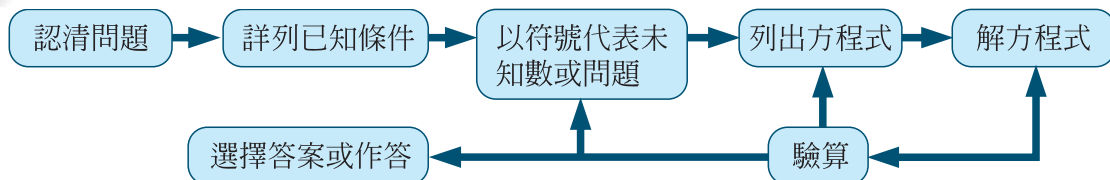
二 標準式的解（根）

標準式 $ax+b=0$ 的條件	解的表示法	
當 $a \neq 0$	則 $x = -\frac{b}{a}$	恰有一解
當 $a=b=0$	則 $x =$ 任意數	無限多解
當 $a=0, b \neq 0$	則 $x =$ 無解	無解

三 等量公理（假設 $a=b$ ）

1. 等量加法： $a+c=b+c$ 2. 等量減法： $a-c=b-c$
 3. 等量乘法： $a \times c=b \times c$ 4. 等量除法： $a \div c=b \div c, (c \neq 0)$

四 考試中應用問題的解法與步驟

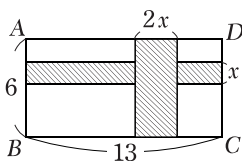


師說 4

〈面積問題的列式〉

演練 4

如圖，這是海灣共和國的國旗，試求斜線部分面積為何？

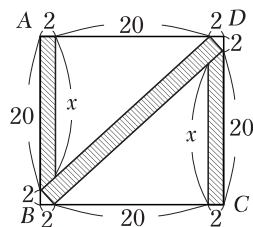


解

$$13x + 6(2x) - 2x \cdot x = 13x + 12x - 2x^2$$

$$= \underline{25x - 2x^2} \text{ (平方單位)}$$

如圖，這是K 龍星共和國的國旗，試求斜線部分面積為何？



解

$$(24 \times 22) - 2(20x \cdot \frac{1}{2}) - 2(2 \times 2 \times \frac{1}{2})$$

$$= 528 - 20x - 4 = \underline{524 - 20x} \text{ (平方單位)}$$

師說 5

〈解一元一次方程式〉

演練 5

1. 解方程式 $3(x - 2) - 2(x + 3) = -12$
2. 若方程式 $2x - 3 = x + 3$ 與 $x - a = 2 - ax$ 有相同的解，則 $a = ?$
3. $\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + x \right) \right] \right\} = 1$ ，求 $x = ?$

解

1. $3(x - 2) - 2(x + 3) = -12$
 $3x - 6 - 2x - 6 = -12$
 $x = -12 + 12 = \underline{0}$
2. $2x - 3 = x + 3$, $x = 6$ 代入 $x - a = 2 - ax$,
 $6 - a = 2 - 6a$, $a = -\frac{4}{5}$
3. 原式 $\Rightarrow \frac{1}{60} \left(\frac{1}{2} + x \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + x = 60$
 $\Rightarrow x = \underline{59\frac{1}{2}}$

1. 解方程式 $\frac{3}{2}x + 7 = \frac{2}{3}x + 12$
2. 若方程式 $4x - (21 - x) = 69$ 與 $5x + 3 = ax - 15$ 有相同解，求 $a = ?$
3. $2\{4[2(3x + 1) - 1] + 5\} - 2 = -32$ ，求 $x = ?$

解

1. $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = 12 - 7$
 $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)x = 5$, $\frac{5}{6}x = 5$, $x = \underline{6}$
2. $4x - 21 + x = 69$, $5x = 90$, $x = 18$
 代入 $5x + 3 = ax - 15$, $a = \underline{6}$
3. 原式 $\Rightarrow 2\{24x + 4 + 5\} - 2 = -32$
 $\Rightarrow 48x + 18 - 2 = -32$
 $\Rightarrow 48x = -32 - 16$
 $\Rightarrow x = \underline{-1}$

師說 6

〈一元一次方程式的應用 I〉

演練 6

1. 有一口井不知其深度，若以繩子折成兩折測量，多出 $2\frac{1}{2}$ 公尺，若折成三折測量，不夠 1 公尺，請問：繩子全長為多少公尺？

解

1. 設繩長為 x 公尺 $\Rightarrow \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + 1$
 $\Rightarrow \frac{1}{6}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} \times 6 = \underline{21}$ (公尺)

1. 建銘用身上所有錢的 $\frac{1}{3}$ 買了 2 只價格相同的手錶，再用剩下錢數的 $\frac{1}{2}$ 買了 3 枝萬寶龍筆，結果剩下 200000 元，則建銘所買的手錶，每只多少錢？

解

1. 設建銘身上有 x 元，
 則 $x - \left[\frac{1}{3}x + \left(\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{2} \right) \right] = 200000$
 $\Rightarrow x = 600000$, $600000 \times \frac{1}{3} = 200000$
 \Rightarrow 買 2 只手錶的錢，
 則 1 只錶 = $200000 \div 2 = \underline{100000}$ (元)

2. 一只公仔玩偶以定價七五折售出，賠本80元；以定價九折售出，可賺220元，若假設定價為 x 元，則成本為多少元？

解

2. 定價 x 元，七五折售出售價為 $0.75x$
 \therefore 賠本80元 \therefore 成本為 $(0.75x + 80)$ 元，
 九折售出賺220元，成本為 $0.9x - 220$
 $\Rightarrow 0.75x + 80 = 0.9x - 220$ ，
 $-0.15x = -300 \therefore x = 2000$ (元)
 成本為 $0.75 \times 2000 + 80 = 1580$ (元)

2. 學生分配宿舍，若8人住一間，則空下一間房間，若6人住一間，則有8人沒有房間可住，則學生共有多少人？

解

2. 設房間有 x 間，依題意列式：
 $8(x - 1) = 6x + 8, 8x - 8 = 6x + 8$ ，
 得 $x = 8$ ，
 則學生人數為 $8 \times (8 - 1) = 56$ (人)

師說 7

〈一元一次方程式的應用 II〉

演練 7

1. 一個二位數的十位數字與個位數字的和為17，若將此數的十位數字與個位數字互調後所得的新數比原數小9，求原數為何？
2. 已知小明與小華共有風之谷的點數1350點，若小明給小華25點後，則小明所有的點數恰好是小華所有點數的 $\frac{4}{5}$ 倍，試問小華原有多少點數？

解

1. 設原數之個位數字為 x ，十位數字為 $17 - x$
 $\begin{cases} \text{原數} = 10(17 - x) + x \\ \text{新數} = 10x + (17 - x) \end{cases}$
 $\Rightarrow 10x + (17 - x) + 9 = 10(17 - x) + x$
 $\Rightarrow 18x = 144 \Rightarrow x = 8$
 \Rightarrow 原數 = $10(17 - 8) + 8 = 98$

2. 設小明原有 x 點，小華原有 $1350 - x$ 點
 後來小明有 $x - 25$ 點，小華有 $1350 - x + 25$ 點
 $x - 25 = \frac{4}{5}(1350 - x + 25)$ ，
 $x - 25 = 1100 - \frac{4}{5}x, \frac{9}{5}x = 1125$
 $\Rightarrow x = 625$ ，小華 = $1350 - 625 = 725$ (點)

1. 臺北與嘉義兩地相距280公里，小熊開車從嘉義到臺北，他先以時速60公里前進了 $\frac{3}{7}$ 的路程，再以時速80公里完成剩下的路程，試問他開車的平均速度為何？
2. 某一個正整數與其本身相加、相減、相除所得的和、差、商，相加後為2137，試問此正整數為何？

解

1. $\begin{cases} \frac{3}{7} \times 280 = 60t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \\ \frac{4}{7} \times 280 = 80t_2 \Rightarrow t_2 = 2 \end{cases}$
 \Rightarrow 平均速度 = $\frac{\text{距離}}{t_1 + t_2} = \frac{280}{2 + 2}$
 $= 70$ (公里/小時)

2. 令此正整數為 a ，
 $a + a = 2a, a - a = 0, \frac{a}{a} = 1$
 $\Rightarrow 2a + 0 + 1 = 2137, a = 1068$

同步評量 3

(B) 1. 方程式 $\frac{x - 600}{3} = \frac{x - 200}{4}$ ，求 $x = ?$

- (A) - 1800 (B) 1800 (C) - 3000 (D) 3000

1. $\frac{x - 600}{3} = \frac{x - 200}{4}$
 $\Rightarrow 4x - 2400 = 3x - 600, x = 1800$

(B) 2. 方程式 $\frac{3}{4}x - m = \frac{3x - 2}{5}$ ，若 $x = 4$ 時，則 $m = ?$

- (A) - 1 (B) 1
 (C) 3 (D) 5

2. $\frac{3}{4}(4) - m = \frac{3(4) - 2}{5}, m = 1$

- (C) 3. 如果有 3 個連續的整數，它們的和比最大數的 2 倍多 20，則最小數為多少？
 (A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 23 3. 設最小數為 x ，則 $x + (x + 1) + (x + 2) = 2(x + 2) + 20$ ，
 $3x + 3 = 2x + 24$ ， $x = 21$
- (A) 4. 小明週末去看電影，拿了一張 30 元的折價卷和 200 元去買電影票，因小明是學生，故電影票打 8 折，最後售價員找了 30 元給小明，試問電影票定價為多少元？
 (A) 250 (B) 260 (C) 280 (D) 300 4. 設電影票定價為 x 元
 $\Rightarrow 200 + 30 - 0.8x = 30$ ， $x = 250$
- (B) 5. 一個二位數其數字和為 8，將十位數與個位數對調之後，所得的新數比原數大 18，則原數為何？
 (A) 53 (B) 35 (C) 26 (D) 62 5. 設原數的個位數字為 x ，則十位數字為 $8 - x$ ，
 $10(8 - x) + x + 18 = 10x + 8 - x$ ，
 $80 - 10x + x + 18 = 10x + 8 - x \Rightarrow x = 5$ ，故原數為 35



基本觀念題

- (A) 1. 姊妹兩人相差 3 歲，若妹妹今年 a 歲，則姊姊今年幾歲？
 (A) $(a + 3)$ (B) $(a - 3)$ (C) $3a$ (D) $\frac{a}{3}$ 1. \therefore 姊姊比妹妹大 3 歲
 \therefore 姊姊今年 $(a + 3)$ 歲
- (C) 2. 曉琪和小鼎都有 x 元，曉琪把所有錢的一半給小鼎，則小鼎就有多少元？
 (A) $2x$ (B) $\frac{1}{2}x$ (C) $\frac{3}{2}x$ (D) $\frac{5}{2}x$ 2. $\therefore x$ 元的一半為 $\frac{1}{2}x$ 元，
 \therefore 小鼎有 $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ (元)
- (B) 3. 鋼筆一枝的價格是原子筆一枝價格的 15 倍，若原子筆一枝 x 元，則鋼筆一枝的價格是多少元？
 (A) $(x + 15)$ (B) $15x$ (C) $\frac{x}{15}$ (D) $(x - 15)$ 3. 鋼筆的價格 = 原子筆的價格 $\times 15 = x \times 15 = 15x$ (元)
- (C) 4. 奇鼎公司有男生 x 人，若從惠菁 (女生) 眼中所見女生人數為男生人數的 8 倍，則該公司的總人數有多少人？
 (A) $8x + 1$ (B) $9x - 1$ (C) $9x + 1$ (D) $9x$ 4. $x + (8x + 1) = 9x + 1$
- (C) 5. 五個連續偶數的和比其最大數的 4 倍少 2，則其最小數為多少？
 (A) 14 (B) 12 (C) 10 (D) 8 5. 設五數中最小數為 x ，則最大數為 $x + 8$ ，
 且 $x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8 = 4(x + 8) - 2$ ， $5x + 20 = 4x + 30$ ， $x = 10$
- (D) 6. 化簡 $\frac{-4x + 3}{3} - \frac{2 - 3x}{2} - 6$ 為下列何者？
 (A) $\frac{-17x - 36}{6}$ (B) $\frac{-17x - 6}{6}$ (C) $\frac{x - 6}{6}$ (D) $\frac{x - 36}{6}$ 6. 原式 = $\frac{-8x + 6 - 6 + 9x}{6} - 6 = \frac{x}{6} - 6 = \frac{x - 36}{6}$

(A) 7. 方程式 $0.95x + 1.1(800 - x) = 800 + 17$, 求 $x = ?$

- (A) 420 (B) 240
(C) 210 (D) 120

7. 原式 $\Rightarrow 0.95x + 880 - 1.1x = 817$
 $\Rightarrow 0.15x = 63 \Rightarrow x = 420$

(D) 8. 下列各選項的列式何者正確？

- (A) 四個連續偶數，最小數為 x ，則最大數為 $x + 4$
(B) 將一盒巧克力分給 x 個人，若每人分 5 個，則不足 4 個，所以這盒巧克力共有 $(5x + 4)$ 個
(C) 若 5 年前 x 歲的志中，他爸爸年齡為志中的 3 倍，則爸爸今年應為 $3x - 5$ 歲
(D) 大雄和 3 位同學書店，買鉛筆每人 x 元，買膠水共花了 45 元，則每人應平均分攤 $\frac{4x + 45}{4}$

8. (A) 最小數為 x ，最大數為 $x + 4$
(B) $(5x - 4)$ 個
(C) $(3x + 5)$ 歲

(D) 9. 便利商店以每組 x 元的成本價，買進招財公仔若干組，依照下列哪一種銷售方式，便利商店每賣一組公仔就可賺 $0.28x$ 元呢？

- (A) 成本加八成作定價，照定價打六折出售
(B) 成本加六成作定價，照定價打六折出售
(C) 成本加八成作定價，照定價打八折出售
(D) 成本加六成作定價，照定價打八折出售

9. (D) $(1 + 0.6) \times 0.8x - x = 1.28x - x = 0.28x$

(B) 10. 解一元一次方程式 $x + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}x - 3$ 的過程如下，在哪一個過程中開始發生錯誤呢？

- (A) $x - \frac{3}{2}x = -3 - \frac{2}{3}$ (B) $6x - 4x = -18 - 4$
(C) $2x = -22$ (D) $x = -11$

10. (B) $6x - 9x = -18 - 4$

(A) 11. 有一分數並不是最簡分數，分子與分母的和是 119，約成最簡分數為 $\frac{4}{13}$ ，則原分數為多少呢？

- (A) $\frac{28}{91}$ (B) $\frac{91}{28}$
(C) $\frac{11}{119}$ (D) $\frac{119}{11}$

11. 設此分數為 $\frac{4x}{13x}$ ，則 $4x + 13x = 119$ ，
 $17x = 119, x = 7 \Rightarrow$ 此分數為 $\frac{28}{91}$

(C) 12. 仁鴻在考試時，考卷有一部份被同學撕破了，另一部分在印刷時被墨水弄髒而無法辨識題目，則下列何者正確？

- (A) 被撕破的數為 27
(B) 被撕破的數為 22
(C) 被污染的數為 -27
(D) 被污染的數為 30

12. $\frac{x}{2} - 2 = 13$
 $\frac{x}{2} = 15, x = 30 \Rightarrow$ 被撕破的數
被污染的數： $-30 + 3 = -27$

	x		
算式		-5	
$\frac{x}{2} - 2$		$-\frac{9}{2}$	13
$-x + 3$		8	

(C) 13. 父親生前有土地 800 坪，其遺囑交代要分給弟弟的土地為哥哥土地的 2 倍還多 50 坪，請問：哥哥有土地多少坪呢？

- (A) 150 (B) 200 (C) 250 (D) 300

13. 設哥哥有 x 坪，弟弟有 $2x + 50$ 坪，
 $x + (2x + 50) = 800, 3x + 50 = 800$ ，
 $x = 250$ (坪)

(D) 14. 距今四年前母親年齡的 2 倍為兒子年齡的 5 倍，距今四年後母親年齡為兒子年齡的 2 倍，若四年前母親 x 歲，則四年後兒子多少歲？

- (A) 16 (B) 20
(C) 22 (D) 24

14. 母親四年前 x 歲，兒子為 $\frac{2}{5}x$ 歲， $x+8=2(\frac{2}{5}x+8)$ ，
 $\frac{x}{5}=8$ ， $x=40$ (歲)，四年後兒子 $=\frac{2}{5}\times 40+8=24$ (歲)

(D) 15. 奇鼎國中段考試卷有選擇題 25 題，答對一題得 4 分，答錯一題倒扣 1 分，不答不給分，若阿比僅做 20 題，得 60 分，則他答對多少題？

- (A) 23 (B) 21
(C) 18 (D) 16

15. 阿比一共做了 20 題，設答對 x 題，答錯 $20-x$ 題，則由題目敘述可得 $4x+(-1)\times(20-x)=60$ ，
 $5x=80$ ， $x=16$ 。故阿比答對 16 題



(A) 1. 阿信帶 500 元去買每本 x 元的作業簿，買 $(x+2)$ 本，並找回 17 元。依題意可列出下列哪一個方程式？

- (A) $x(x+2)=500-17$ (B) $x(x-2)=500+17$
(C) $x(x+2)=500+17$ (D) $x(x-2)=500-17$

1. $500-x(x+2)=17 \Rightarrow x(x+2)=500-17$

97 基測二

(B) 2. 甲、乙、丙三個袋子，各裝有相同數量的球。今從甲袋取出 3 球放入乙袋，再從乙袋取出 5 球放入丙袋，此時丙袋的球數為乙袋的 2 倍。求三袋中共裝多少球？

- (A) 15 (B) 27
(C) 33 (D) 45

2. 已知甲 = 乙 = 丙 = x ，甲 - 3 = 乙 + 3
(乙 + 3) - 5 = 丙 + 5 $\Rightarrow 2[(乙 + 3) - 5] = 丙 + 5 \Rightarrow 2乙 - 4 = 丙 + 5$
 $\Rightarrow 2x - 4 = x + 5$ ， $x = 9$ ， $3x = 27$

97 基測二

(A) 3. 下列何者為一元一次方程式 $2x - \frac{9-x}{3} = 11$ 的解？

- (A) $x = 6$ (B) $x = 14$
(C) $x = \frac{20}{7}$ (D) $x = \frac{42}{5}$

3. 原式 $\Rightarrow 6x - (9-x) = 33$
 $\Rightarrow 6x - 9 + x = 33 \Rightarrow 7x = 42$
 $\Rightarrow x = 6$

96 基測二

(D) 4. 解方程式 $(3x+2)+2[(x-1)-(2x+1)]=6$ ，得 $x=?$

- (A) 2 (B) 4
(C) 6 (D) 8

4. 原式 $\Rightarrow 3x+2+2[-x-2]=6$ ，
 $3x+2-2x-4=6$ ， $x=8$

96 基測一

(D) 5. 已知甲、乙、丙三人各有一些錢，其中甲的錢是乙的 2 倍，乙比丙多 1 元，丙比甲少 11 元，求三人的錢共有多少元？

- (A) 30 (B) 33
(C) 36 (D) 39

5. 設乙有 x 元，甲有 $2x$ 元，丙有 $(x-1)$ 元，
($x-1$) - $2x = -11$ ， $-x-1 = -11$ ，
 $x = 10$ ，三人共有 $x+2x+x-1 = 4x-1 = 39$ (元)

96 基測一



(D) 1. 請化簡右式 $6 - \frac{3(x-1)}{2} + \frac{2x-3}{3} = ?$

- (A) $\frac{5x}{6} + 39$ (B) $-\frac{5}{6}x + 39$
(C) $\frac{5x+39}{6}$ (D) $\frac{-5x+39}{6}$

1. 原式 $= \frac{36-9(x-1)+2(2x-3)}{6}$
 $= \frac{36-9x+9+4x-6}{6} = \frac{-5x+39}{6}$

(D) 2. 若 $(2\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4}) \times x \times \frac{1}{2} = 9\frac{2}{3}$, 求 $x = ?$

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$
(C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{8}{3}$

$$2. \text{原式} \Rightarrow (\frac{5}{2} + \frac{19}{4}) \times x \times \frac{1}{2} = \frac{29}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{29}{4}x = \frac{29 \times 2}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

(B) 3. 一角之補角為其餘角的 3 倍，則此角為幾度？

- (A) 35° (B) 45°
(C) 55° (D) 65°

3. 設此角為 x° ,
 $180^\circ - x^\circ = 3(90^\circ - x^\circ), x = 45$

(C) 4. 設一線段 $\overline{AB} = a$, 另有一藤條的長度為 x 公分, 若將藤條 4 折後與 \overline{AB} 比較, 則比 \overline{AB} 短 1 公分, 若將藤條 3 折後與 \overline{AB} 比較, 則比 \overline{AB} 長 $\frac{1}{2}$ 公分, 則依題意可列出下列哪一個一元一次方程式？

- (A) $4x - a - 1 = 3x - a + \frac{1}{2}$ (B) $4x + 1 = 3x - \frac{1}{2}$
(C) $\frac{x}{4} + 1 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$ (D) $\frac{x}{4} - 1 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

$$4. \begin{cases} \frac{x}{4} = a - 1 \\ \frac{x}{3} = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{4} + 1 \\ a = \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

故 $\frac{x}{4} + 1 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

(C) 5. 設父親現年是子年的 5 倍, 6 年後父年為子年的 3 倍, 請問：父親現年幾歲呢？

- (A) 28 (B) 29
(C) 30 (D) 31

5. 設子現年 x 歲, 父現年 $5x$ 歲,
 $5x + 6 = 3(x + 6), x = 6 \therefore 5x = 30$ (歲)

(B) 6. 奇鼎國中數學學期成績的算法為：平時成績占 40%，期中考成績占 30%，期末考成績占 30%，如果小嵐的平時成績是 85 分，期中考成績為 50 分，請問：小嵐期末考成績要多少分才能使其學期成績為 70 分呢？

- (A) 65 (B) 70
(C) 76 (D) 80

6. 設小嵐期末考成績為 x 分,
 $85 \times 40\% + 50 \times 30\% + x \times 30\% = 70, x = 70$

(A) 7. 若方程式 $(a + 3)x + 2a - b + 7 = 0$ 無解, 請問：下列何者正確呢？

- (A) $a = -3$ (B) $a = -2$
(C) $a = -1$ (D) $a = 0$

7. (1) 一元一次方程式 $ax + b = 0$ 無解時 $\Rightarrow a = 0, b \neq 0$,
(2) $\therefore (a + 3)x + 2a - b + 7 = 0$ 無解,
 $\therefore a + 3 = 0, a = -3, 2a - b + 7 \neq 0, 2(-3) - b + 7 \neq 0,$
 $-6 - b + 7 \neq 0, b \neq 1$ (其他數皆可)

(B) 8. 一雙成本 x 元的皮鞋, 照成本加四成作為定價, 再依定價七五折售出, 若想賺 100 元, 則每雙定價應為多少元？

- (A) 3200 (B) 2800
(C) 2400 (D) 2200

8. $x \times (1 + 40\%) \times \frac{75}{100} - x = 100,$
 $x \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{4} - x = 100, \frac{21}{20}x - x = 100,$
 $\therefore x = 2000, \text{故定價} = 2000 \times 1.4 = 2800$ (元)

(B) 9. 小奇與小鼎在操場跑步, 小奇 30 秒跑完一圈, 若小奇與小鼎兩人同時同地依相反方向起跑, 經過 12 秒相遇, 則小鼎跑完一圈的所需秒數為何？

- (A) 18 (B) 20
(C) 22 (D) 24

9. 設小鼎跑完一圈操場的時間為 x ,
 $\Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = 20$

(D) 10. 洋基隊在已經比賽過的 60 場賽事中, 贏了 50%。試問該隊應該繼續連贏幾場, 以便使它的成績變為贏 60%？

- (A) 12 (B) 13
(C) 14 (D) 15

10. 目前共勝 $60 \times 50\% = 30$ (場), 設需再勝 n 場,
 $\frac{30 + n}{60 + n} = 60\% \therefore n = 15$ (場)

第 5 單元

二元一次聯立方程式

60

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. 一數學式型如 $5x + 7y = 7y + 8$ 必為二元一次方程式。

💡 $5x + 7y = 7y + 8$ 移項後 $\Rightarrow 5x - 8 = 0$ 為一元一次方程式

能力一

(X) 2. 解 $\frac{3x + y}{3} - \frac{-x + 2y}{4} = \frac{9x + 10y}{12}$ 是否正確?

💡 原式 = $\frac{12x + 4y + 3x - 6y}{12} = \frac{15x - 2y}{12}$

(O) 3. 二元一次方程式 $3x - 2y = 11$, 若 x, y 為 $0 \sim 9$ 的整數, 則滿足 x, y 的值有 3 組。

💡 $\because 3x - 2y = 11, y = \frac{3x - 11}{2}$, 且 x, y 僅能取 $0 \sim 9$ 之中的整數, \therefore 僅有下列三種情形 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}$

(O) 4. 聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4y + 6x = 8 \end{cases}$ 有無限多組解。

💡 當 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \Rightarrow$ 必有無限多組解

能力二

(X) 5. 聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \cdots \text{①} \\ 2y - 2x = 5 \cdots \text{②} \end{cases}$ 可用①式 + ②式消去 y 。

💡 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7 \cdots \text{①} \\ -2x + 2y = 5 \cdots \text{②} \end{cases}$, 應使用①式 - ②式才可消去 y 。

(X) 6. 若 $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 17 \end{cases}$, 則 $xy = 16$ 。

💡 $\begin{cases} x - y = 1 \\ (x - y)(x + y) = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 17 \end{cases} \Rightarrow$ 得 $\begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}, xy = 72$

(X) 7. 若 $(x - 1)^2 + |y + 2| = 0$, 則 $(x + y)^{2007} = 1$ 。

💡 令 $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$, 則 $[1 + (-2)]^{2007} = -1$

(X) 8. 用 1 元或 5 元的硬幣湊成 100 元, 有 20 種湊法。

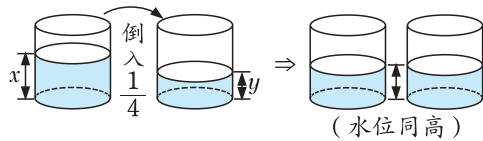
💡 設 1 元 x 個, 5 元 y 個, $x + 5y = 100$ (非負整數解) 由 $100 \div 5 = 20$, 得 $20 + 1 = 21$ 種湊法

能力三

(O) 9. 右圖有兩個大小相同的杯子, 裏面的水位不同高,

則 $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ 。

💡 $(1 - \frac{1}{4})x = y + \frac{1}{4}x, \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$



(O) 10. 有一長方形, 長減少 4, 寬增加 3, 形成與原長方形相同面積的正方形, 則長方形的周長為 50。

💡 設此長方形的長為 x , 寬為 $y \Rightarrow \begin{cases} (x - 4)(y + 3) = xy \\ x - 4 = y + 3 \end{cases} \Rightarrow x = 16, y = 9, \text{周長} = 2(16 + 9) = 50$

數學 健康狀況檢核表

※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

二元一次方程式的列式

一 二元一次方程式

當 a 、 b 、 c 為已知數，且 $ab \neq 0$ ，則 $ax + by + c = 0$ ，亦即當一個等式含有兩個未知數（變數），而且他們的次數皆為一次，稱為二元一次方程式。

二 二元一次方程式的解

- 一個二元一次方程式 $ax + by + c = 0$ 有無限多組解。
- 若限制 x 、 y 的範圍，則解有三種的可能性
 - 無限多組解
 - 有限多組解
 - 無解

若二元一次方程式 $x + 2y = 8$ ，當 x 、 y 有下列情形時，其解的情況：

- 若 $y > 3$ ，則為無限多組解。
- 若 x 、 y 皆為正整數，則僅有三組解： $(6, 1)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(4, 2)$ 。
- 若 x 、 y 皆為正整數，且 $y > 3$ ，則為無解。

三 二元一次方程式的圖形

- 二元一次方程式又名為線性方程式，其圖形在平面坐標上為一直線。
- 二元一次方程式的每一組解，即為直線圖形上的一個點。

師說 1

〈方程式的列式〉

演練 1

- 1 年 28 班共有 29 人，其中男生有 x 人，女生有 y 人；某次月考的數學成績，男生平均 70 分，女生平均 65 分，請列出全班平均分數的二元一次式。
- 已知華氏度數 $= \frac{9}{5} \times$ 攝氏度數 $+ 32$ ，則當攝氏 x 度時，華氏是 y 度，且華氏度數比攝氏度數多 28 度，請列出二元一次聯立方程式。

解

$$1. \text{ 平均分數} = \frac{\text{總分}}{\text{總人數}} = \frac{70x + 65y}{29} \text{ (分)}$$

$$2. \begin{cases} y = \frac{9}{5}x + 32 \\ y = x + 28 \end{cases}$$

- 嘉昌和幼軍到合作社購買同樣的優酪乳和麵包，嘉昌買 3 罐優酪乳及 3 個麵包，付款 27 元，幼軍買 5 罐優酪乳和 2 個麵包，付款 30 元。若優酪乳每罐 x 元，麵包每個 y 元，請列出二元一次聯立方程式。
- 容韓有錢若干元，先用去一部分，剩餘的錢為用去的 3 倍，後來又用去 20 元，所剩餘的錢為原有的 $\frac{1}{2}$ 倍。假設容韓原有 x 元，先用去 y 元，請列出二元一次聯立方程式。

解

$$1. \begin{cases} 3x + 3y = 27 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y = 3y \\ x - y - 20 = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

師說 2

〈二元一次式的化簡〉

演練 2

62

請化簡下列各式：

- (1) $4(-x + y) - 2(2x - y) = ?$
 (2) $7(3x + 2y) - 3(7x + y) = ?$
 (3) $\frac{3}{12}(2x - 3y - 4) - \frac{2}{45}(5x - y - 18) = ?$

解

- (1) 原式 $= -4x + 4y - 4x + 2y = -8x + 6y$
 (2) 原式 $= 21x + 14y - 21x - 3y = 11y$
 (3) 原式 $= \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 1 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{45}y + \frac{4}{5}$
 $= \frac{5}{18}x - \frac{127}{180}y - \frac{1}{5}$

請化簡下列各式：

- (1) $5(x - 2y + 3) - 3(x - 3y) = ?$
 (2) $3(\frac{4}{9}x - \frac{5}{18}y - 4) - 0.4(x - 3y + 1) = ?$
 (3) $0.2(3x + 2y - 14) - 0.6(x - 2y + 8) = ?$

解

- (1) 原式 $= 5x - 10y + 15 - 3x + 9y$
 $= 2x - y + 15$
 (2) 原式 $= \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}y - 12 - \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{2}{5}$
 $= \frac{14}{15}x + \frac{11}{30}y - \frac{62}{5}$
 (3) 原式 $= 0.6x + 0.4y - 2.8 - 0.6x + 1.2y - 4.8$
 $= 1.6y - 7.6$

同步評量 1

(D) 1. 化簡二元一次式 $\frac{2x - 1}{6} - \frac{5y - 7}{2}$ ，下列何者為最適當之答案？

- (A) $\frac{2x - 30y + 41}{6}$ (B) $\frac{2x - 15y - 22}{6}$
 (C) $\frac{2x + 30y + 20}{6}$ (D) $\frac{2x - 15y + 20}{6}$

$$1. \text{原式} = \frac{2x - 1 - 3(5y - 7)}{6}$$

$$= \frac{2x - 1 - 15y + 21}{6} = \frac{2x - 15y + 20}{6}$$

(A) 2. 成凱和他的父母、一個弟弟、一個妹妹到你家牛排餐廳吃牛排；大人每人 x 元，小孩每人 y 元，除了父母外，其他都是小孩，另外餐廳又加收 10% 的服務費；則這一餐成凱全家共花了多少錢呢？

- (A) $(2x + 3y) \times 1.1$ (B) $(3x + 2y) \times 1.1$
 (C) $(2x + 3y) \times 0.1$ (D) $(3x + 2y) \times 0.1$

(B) 3. 已知 2GB 與 1GB 的 MP3 隨身碟每個的價格比為 4 : 3，今天花了 1200 元買回四個 2GB 及三個 1GB 的 MP3 隨身碟，若 2GB 每個 x 元，而 1GB 每個 y 元，則下列哪一組聯立方程式符合題意？

- (A) $\begin{cases} 4x = 3y \\ 4x + 3y = 1200 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x = 4y \\ 4x + 3y = 1200 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ x + y = 1200 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 4y + 3x = 1200 \end{cases}$

(D) 4. 甲原有 x 元，乙原有 y 元，若甲、乙兩人各自將原有錢數的 $\frac{1}{4}$ 交換，則甲的錢數就為乙錢數的 2 倍。依題意可列出二元一次方程式為何？

- (A) $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 2(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y)$ (B) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y)$
 (C) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y = 2(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y)$ (D) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y = 2(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y)$

能力

代入消去法與加減消去法

一 二元一次聯立方程式

若有兩個並列在一起的二元一次方程式，稱為二元一次聯立方程式或二元一次聯立方程組。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0) \end{cases}$$

二 代入消去法求解

由任一方程式中化簡出 $y = ax + b$ 或 $x = ay + b$ 的形式，再代入另一式消去 y 或 x ，即可解出 x 或 y 。

例 1 : $\begin{cases} x - y = 2 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ ，由①得 $y = x - 2$ 將其代入②得 $2x + (x - 2) = 1$
 $\Rightarrow x = 1; y = -1$

三 加減消去法求解

將兩個方程式乘以適當的倍數之後，再相加或相減，消去某一未知數，即可解出另一未知數。

例 2 : $\begin{cases} 3x + y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x - 2y = 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ ， $\textcircled{1} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 2 \cdots \textcircled{3} \\ x - 2y = 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ $\textcircled{3} + \textcircled{2} \Rightarrow 7x = 7$
 $\Rightarrow x = 1$ 代入①得 $y = -2$

四 二元一次聯立方程式解的判別法

聯立方程式	判別法	解的種類	直線關係
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0) \end{cases}$	(1) 若 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	有唯一解	兩相異直線交於一點
	(2) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	有無限多解組	兩相異直線重合
	(3) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	無解	兩相異直線平行

五 特殊型的聯立方程式求解方法

若方程式以 A 、 B 、 C 表示，則有下列情形時的處理方式：

$A = B = C$ 型	$\begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A = C \\ A = B \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases}$
$ A + B = 0$ 或 $A^2 + B^2 = 0$ 型	$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
係數較大且成對型	$\begin{cases} 63x + 37y = 263 \cdots \textcircled{1} \\ 37x + 63y = 237 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ \Rightarrow 可先將① + ② $\Rightarrow 100x + 100y = 500$ $\Rightarrow x + y = 5, x = 5 - y \Rightarrow$ 再代入①或② \Rightarrow 求解

師說 3

〈代入消去法〉

演練 3

利用代入消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

●解

$$(1) \begin{cases} 3x - y = 6 \cdots \textcircled{1} \\ y = -2x + 4 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將}\textcircled{2}\text{式代入}\textcircled{1}\text{式}$$

$$\Rightarrow 3x - (-2x + 4) = 6, 3x + 2x - 4 = 6,$$

$$5x = 10, x = 2 \text{ 代入}\textcircled{1},$$

$$3 \times 2 - y = 6, y = 0 \Rightarrow \underline{x = 2, y = 0}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{6} \cdots \textcircled{1} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將}\textcircled{2}\text{式代入}\textcircled{1}\text{式}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ 代入}\textcircled{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}, y = 0}$$

利用代入消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 3x - 2y = 32 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = 1 \\ 2x - y + \frac{1}{7} = 0 \end{cases}$$

●解

$$(1) \begin{cases} x = 5y + 2 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 2y = 32 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將}\textcircled{1}\text{式代入}\textcircled{2}\text{式}$$

$$\Rightarrow 3(5y + 2) - 2y = 32,$$

$$15y + 6 - 2y = 32, 13y = 26,$$

$$y = 2 \text{ 代入}\textcircled{1}\text{式}, x = 5 \times 2 + 2 = 12$$

$$\Rightarrow \underline{x = 12, y = 2}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y + \frac{1}{7} = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將}\textcircled{2}\text{式代入}\textcircled{1}\text{式}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + 7(2x + \frac{1}{7}) = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + 14x = 0,$$

$$x = 0, \text{ 代入}\textcircled{1}\text{式} \Rightarrow y = \frac{1}{7} \Rightarrow \underline{x = 0, y = \frac{1}{7}}$$

師說 4

〈加減消去法〉

演練 4

利用加減消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 5x + 7y = 29 \\ 8x - 7y = 10 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 13x + 31y = 8 \\ 31x + 13y = 80 \end{cases}$$

●解

$$(1) \begin{cases} 5x + 7y = 29 \cdots \textcircled{1} \\ 8x - 7y = 10 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow 13x = 39, x = 3, \text{ 代入}\textcircled{2}$$

$$8 \times 3 - 7y = 10, y = 2 \Rightarrow \underline{x = 3, y = 2}$$

$$(2) \begin{cases} 13x + 31y = 8 \cdots \textcircled{1} \\ 31x + 13y = 80 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } 44x + 44y = 88 \Rightarrow x + y = 2 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } -18x + 18y = -72$$

$$\Rightarrow -x + y = -4 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 得 } 2y = -2 \Rightarrow y = -1 \text{ 代入}\textcircled{3} \text{ 得 } x = 3$$

$$\Rightarrow \underline{x = 3, y = -1}$$

利用加減消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -4x + 5y = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{1}{9}x - 9y = -78 \\ 9x - \frac{1}{9}y = 242 \end{cases}$$

●解

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ -4x + 5y = 7 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow y = 1,$$

$$\text{代入}\textcircled{1} \text{ 得 } 4x + 3 = 1, x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}, y = 1}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{9}x - 9y = -78 \cdots \textcircled{1} \\ 9x - \frac{1}{9}y = 242 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{82}{9}x - \frac{82}{9}y = 164 \Rightarrow x - y = 18 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } \frac{80}{9}x + \frac{80}{9}y = 320 \Rightarrow x + y = 36 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 得 } 2x = 54, x = 27$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3} \text{ 得 } 2y = 18, y = 9 \Rightarrow \underline{x = 27, y = 9}$$

師說 5

〈特殊型的求解〉

演練 5

1. 若 $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} ax + by = 9 \\ 2ax - by = 0 \end{cases}$ 有相同的解，則 $a + b = ?$
2. 若 $(2x - 5y + 2)^2 + |6x + 3y - 3| = 0$ ，試求 $4x + 2y = ?$

解

1. $\begin{cases} x - 2y = -5 \cdots ① \\ 2x - y = -1 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ② \text{ 代入 } ① \text{ 得}$
 $x - 2(2x + 1) = -5 \Rightarrow -3x = -3$
 $\Rightarrow x = 1$ ，代入 $②$ 得 $2 - y = -1$ ， $y = 3$ ，
 將 $x = 1$ 與 $y = 3$ 代入下式，
 $\begin{cases} ax + by = 9 \\ 2ax - by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 9 \cdots ③ \\ 2a - 3b = 0 \cdots ④ \end{cases}$
 $\Rightarrow ③ + ④ \Rightarrow 3a = 9$ ， $a = 3$ ，
 代入 $③$ 得 $3 + 3b = 9$ ， $b = 2$
 $\Rightarrow a + b = 3 + 2 = 5$
2. $(2x - 5y + 2)^2 + |6x + 3y - 3| = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 2 = 0 \\ 6x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -2 \cdots ① \\ 6x + 3y = 3 \cdots ② \end{cases}$
 $① \times 3 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 15y = -6 \cdots ③ \\ 6x + 3y = 3 \cdots ② \end{cases} \quad ② - ③$
 $\Rightarrow 18y = 9$ ， $y = \frac{1}{2}$ 代入 $①$ 得 $x = \frac{1}{4}$
 $\therefore 4x + 2y = 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = 2$

1. 解方程組 $\frac{x+1}{20} = \frac{x+y}{17} = \frac{y+1}{21}$ 的 $x, y = ?$
2. 若 $|3x - 4y + 14| + (-2x - 3y + 2)^2 = 0$ ，試求 $y - x = ?$

解

1. $\frac{x+1}{20} = \frac{x+y}{17} \Rightarrow 17x + 17 = 20x + 20y$
 $\Rightarrow 3x + 20y = 17 \cdots ①$
 $\frac{x+y}{17} = \frac{y+1}{21} \Rightarrow 21x + 21y = 17y + 17$
 $\Rightarrow 21x + 4y = 17 \cdots ②$
 $② \times 5 - ①$ 得 $102x = 68$ ， $x = \frac{2}{3}$ 代入 $①$
 $\Rightarrow 3 \times \frac{2}{3} + 20y = 17$ ， $y = \frac{3}{4}$
2. $\because |3x - 4y + 14| + (-2x - 3y + 2)^2 = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 14 = 0 \\ -2x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -14 \cdots ① \\ -2x - 3y = -2 \cdots ② \end{cases}$
 由 $① \times 2 + ② \times 3$
 $\Rightarrow -17y = -34$ ， $y = 2$ 代入 $①$ 得 $x = -2$
 $\therefore y - x = 2 - (-2) = 4$

同步評量 2

- (B) 1. 何者為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ 的解？
 (A) $x = 1, y = 1$ (B) $x = 1, y = -1$ (C) $x = -1, y = 1$ (D) $x = -1, y = -1$
 $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \cdots ① \\ 3x + 2y = 1 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ② \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 9 \cdots ① \\ 6x + 4y = 2 \cdots ③ \end{cases}$
 $① + ③ \Rightarrow 11x = 11$ ， $x = 1$ ，代入 $②$ 得 $y = -1$
- (C) 2. 解聯立方程式 $\begin{cases} 0.3x = 0.2y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \end{cases}$ ，若以數對 (x, y) 表示為何？
 (A) $(2, 3)$ (B) $(-2, -3)$ (C) $(4, 6)$ (D) $(8, 12)$
 $\begin{cases} 0.3x = 0.2y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{10}x - \frac{1}{5}y = 0 \cdots ① \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \cdots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \times 10 \\ ② \times 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \cdots ③ \\ \frac{4}{3}x + 2y = \frac{52}{3} \cdots ④ \end{cases}$
 $\Rightarrow ③ + ④ \Rightarrow \frac{13}{3}x = \frac{52}{3}$ ， $x = 4$ ，代入 $①$ ，得 $y = 6$
- (B) 3. 解聯立方程式 $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 3(2x - y + 2) \\ 2(4x + 2y + 3) = 7x + y + 9 \end{cases}$ ，則 $3x - 2y$ 之值為何？
 (A) -21 (B) -13 (C) 0 (D) 13
 $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 3(2x - y + 2) \\ 2(4x + 2y + 3) = 7x + y + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - y = 7 \cdots ① \\ x + 3y = 3 \cdots ② \end{cases}$
 $\Rightarrow ② \times 3 \Rightarrow \begin{cases} -3x - y = 7 \cdots ① \\ 3x + 9y = 9 \cdots ③ \end{cases} \Rightarrow ① + ③ \Rightarrow 8y = 16$ ， $y = 2$ 代入 $②$
 $\Rightarrow x + 6 = 3$ ， $x = -3 \Rightarrow 3x - 2y = 3 \times (-3) - 2 \times 2 = -13$

(D) 4. 設 x 、 y 的聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = 5 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ 的解為 $x = 4$ ， $y = 1$ ，則 $|a - b|$ 為何？

- (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ 4. $\begin{cases} ax + by = 5 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \cdots ① \\ a + 4b = 0 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ① + ② \Rightarrow 5a + 5b = 5 \Rightarrow a + b = 1$ ，同乘以 4
 $\Rightarrow 4a + 4b = 4 \cdots ③$ ， $③ - ①$ 得 $3b = -1$ ， $b = -\frac{1}{3}$ 代入 $①$ 得 $4a - \frac{1}{3} = 5$ ， $a = \frac{4}{3}$ ，
 (C) $-\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ $|a - b| = \left| \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right| = \frac{5}{3}$

(B) 5. 若 $(x + 3y + 3)^2 + (x + 7y + 11)^2 = 0$ ，則 x 、 y 之值為下列哪一個選項？

- (A) $x = -3$ ， $y = 2$ (B) $x = 3$ ， $y = -2$ 5. $(x + 3y + 3)^2 + (x + 7y + 11)^2 = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x + 7y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -3 \cdots ① \\ x + 7y = -11 \cdots ② \end{cases}$
 (C) $x = 2$ ， $y = -3$ (D) $x = -2$ ， $y = -3$ $② - ① \Rightarrow 4y = -8$ ， $y = -2$ ，代入 $①$ 得 $x = 3$

(C) 6. 解聯立方程式 $\begin{cases} \frac{1}{7}x - 7y = -46 \\ 7x - \frac{1}{7}y = 146 \end{cases}$ ，求 $x + y = ?$

- (A) 14 (B) 21 6. $\begin{cases} \frac{1}{7}x - 7y = -46 \cdots ① \\ 7x - \frac{1}{7}y = 146 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① + ② \text{ 得 } \frac{50}{7}x - \frac{50}{7}y = 100, x - y = 14 \cdots ③ \\ ② - ① \text{ 得 } \frac{48}{7}x + \frac{48}{7}y = 192, x + y = 28 \cdots ④ \end{cases}$
 (C) 28 (D) 42 $③ + ④$ 得 $2x = 42$ ， $x = 21$ ， $y = 7$ ， $x + y = 28$

能力

二元一次聯立方程式的應用

一 解應用問題的流程

看清楚題意，設 x 、 y 為未知數

找出條件式，列出二元一次方程式

解方程式

驗算、作答

二 各種應用問題的型態

1. 賺賠問題

- (1) 售價 = 定價 \times 折扣
 (2) 賺 (賠) = 售價 - 成本 = 利潤
 (3) 賺率 = (利潤 \div 成本) $\times 100\%$

2. 速度問題

- (1) 距離 = 速度 \times 時間 ($s = v \times t$)

(2)

	距離 (s)	速度 (v)	時間 (t)
單位	公里 (km)	公里/小時 (km/hr)	小時 (hr)
	公尺 (m)	公尺/分 (m/min)	分鐘 (min)
	公尺 (m)	公尺/秒 (m/s)	秒 (s)

- (3) 平均速度 = 總路程 \div 總時間

3. 水流問題

- (1) 順流速度 = 船速 + 水速 (2) 逆流速度 = 船速 - 水速

4. 濃度問題

濃度 = $\frac{\text{溶質}}{\text{溶液}} \times 100\%$

ps. 溶液 = 溶質 + 溶劑

師說 6

〈算人數的應用問題〉

演練 6

奇鼎國中 3 年 5 班男女學生共有 50 人，在上次段考中，全班的平均分數是 80 分；男生的平均分數是 75 分，女生的平均分數是 85 分，求男生有多少人？女生有多少人？

●解

設男生有 x 人，女生有 y 人，

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 75x + 85y = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 15x + 17y = 800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 25, y = 25$$

男生有 25 人，女生有 25 人

奇鼎國中 2 年 18 班有男女生各若干人，從其中一個男生眼中所見，男生人數比女生人數的 2 倍多 6 人；從其中一個女生眼中所見，男生人數是女生人數的 3 倍；請問：全班共有多少人？

●解

設男生 x 人，女生 y 人，由題意可設聯立方程組為

$$\begin{cases} x - 1 = 2y + 6 \\ x = 3(y - 1) \end{cases} \Rightarrow x = 27, y = 10$$

$$27 + 10 = 37 \text{ (人)}$$

師說 7

〈速度的應用問題〉

演練 7

小鼎和小奇一起參加路跑，若總路程 10 公里，小奇的速度是小鼎的 2 倍，且小奇比小鼎早 30 分鐘回到終點，試問小奇和小鼎的時速各為幾公里？

●解

設小奇時速 x (km/hr)，小鼎時速 y (km/hr)，

$$\text{根據速度公式 } t = \frac{s}{v}, \begin{cases} x = 2y \\ \frac{10}{y} - \frac{10}{x} = 0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 20, y = 10$$

小奇時速 20 km/hr，小鼎時速 10 km/hr

已知基隆河長度 20 公里，救生艇順流而下需 2 小時，逆流而上需 5 小時，試問水速和船速為幾公里？

●解

設船速為 x (km/hr)，水速為 y (km/hr)，

$$\text{根據速度公式 } s = v \times t, \begin{cases} (x + y) \times 2 = 20 \\ (x - y) \times 5 = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 3$$

船速 7 km/hr，水速 3 km/hr

師說 8

〈分配的應用問題〉

演練 8

小奇班上有 40 位同學，他想要在生日時請客，因此到你家便利商店花了 175 元買果凍和巧克力共 40 個。若果凍每 2 個 15 元，巧克力每 3 個 10 元，則他共買了多少個果凍？

●解

設小奇買 x 個果凍、 y 個巧克力，則

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \frac{15}{2}x + \frac{10}{3}y = 175 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 40 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 9x + 4y = 210 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 4 \text{ 得 } 4x + 4y = 160 \cdots \textcircled{3}, \textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ 得 } 5x = 50$$

$\therefore x = 10$ ，共買了 10 個果凍

史努比買了一大瓶保特瓶裝的可口可樂請查理布朗喝，已知未開前的重量為 1850 公克，打開之後喝掉 $\frac{1}{3}$ 時，再測量只剩 1250 公克，請問：可口可樂不含瓶子共重多少公克呢？

●解

設保特瓶重 x 公克，可樂重 y 公克，

$$\text{則依題意列聯立方程式 } \begin{cases} x + y = 1850 \\ x + \frac{2}{3}y = 1250 \end{cases}$$

利用加減消去法解得 $x = 50, y = 1800$

\therefore 可樂重 1800 公克

師說 9

濃度問題

演練 9

將濃度 5% 的咖啡 x 公克與濃度 8% 的紅茶 y 公克，混合成濃度 6.8% 的咖啡紅茶 1000 公克，則 $x、y = ?$

解

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \dots\dots\dots ① \\ 0.05x + 0.08y = 1000 \times 0.068 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 5000 & \dots\dots\dots ③ \\ 5x + 8y = 6800 & \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

④ - ③ 得 $3y = 1800, y = 600, x = 400$
 \therefore 5% 的咖啡 400 公克，8% 的紅茶 600 公克

老師說「我的咖啡要加 21% 的奶精 60 公克。」，桌上有 10% 及 30% 的奶精兩種，試問你必須各取多少公克才能混合成老師所要的奶精呢？

解

設取 10% 的奶精 x 公克，30% 的奶精 y 公克

$$\begin{cases} x + y = 60 & \dots\dots\dots ① \\ 0.1x + 0.3y = 0.21 \times 60 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

② 整理後得 $x + 3y = 126 \dots\dots ③$
 ③ - ① 得 $2y = 66, y = 33$ 代入 ①, $x = 27$
 \therefore 10% 的奶精 27 公克，30% 的奶精 33 公克

同步評量 3

(D) 1. 有一個相框周長為 34 公分，且長比寬的 2 倍多 2 公分，求此相框的面積為多少平方公分？

- (A) 54 (B) 56
(C) 58 (D) 60

1. 設寬為 x 公分，長為 y 公分，

$$\begin{cases} 2(x + y) = 34 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$
 $\Rightarrow x = 5, y = 12, \text{面積} = x \times y = 60$

(B) 2. 阿嬤給安安 1800 元的壓歲錢，剛好可以買 4 臺小汽車及 3 組樂高，但安安卻買 3 臺小汽車及 4 組樂高及 100 元的玩偶，請問：小汽車一臺多少元？

- (A) 400 (B) 300
(C) 250 (D) 200

2. 設小汽車一臺 x 元，樂高一組 y 元

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1800 & \dots\dots\dots ① \\ 3x + 4y + 100 = 1800 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$
 \Rightarrow ① - ② 得 $x - y = 100$ 代入 ① 得 $x = 300$ ，小汽車一臺 300 元

(A) 3. 有一個二位數，十位數字的 2 倍與個位數字的和是 15，它的個位數字與十位數字對調後所得的新數比原數大 27，則原二位數為多少？

- (A) 47 (B) 57
(C) 63 (D) 74

3. 設十位數字是 x ，個位數字是 y ，
 則
$$\begin{cases} 2x + y = 15 \\ 10y + x = (10x + y) + 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 15 \\ x - y = -3 \end{cases}$$
 解得 $x = 4, y = 7, \therefore$ 原二位數為 47

(A) 4. 小平與小安各有零用錢若干元，若小平給小安 80 元後，則小平的錢恰好是小安的 3 倍；若小安給小平 40 元後，則小平的錢恰好是小安的 9 倍，請問：小平與小安的零用錢共多少元？

- (A) 800 (B) 700
(C) 600 (D) 500

4. 設小平原有 x 元，小安原有 y 元

$$\begin{cases} x - 80 = 3(y + 80) & \dots\dots\dots ① \\ x + 40 = 9(y - 40) & \dots\dots\dots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 320 \\ x - 9y = -400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 680 \\ y = 120 \end{cases} \Rightarrow x + y = 800$$

(C) 5. 設 $A、B、C、D$ 是數線上由左而右相異四點，它們的坐標依次為 $x、-3、y、5$ ，如果 \overline{AB} 比 \overline{CD} 的 2 倍少 1， \overline{AC} 比 \overline{BD} 多 2，則下列何者正確？

- (A) $\overline{AB} = 11$ (B) $x + y = 6$
(C) $\overline{CD} = 3$ (D) $\overline{AC} = 6$

5. $\overline{AB} = -3 - x, \overline{CD} = 5 - y, \overline{AC} = y - x, \overline{BD} = 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 - x = 2(5 - y) - 1 \\ y - x = 8 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -12 \\ x - y = -10 \end{cases}$$
 解得 $x = -8, y = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 5, \overline{CD} = 3, \overline{AC} = 10$



基本觀念題

(B) 1. 若聯立方程 $\begin{cases} 3x + 6y = 11 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$; 則 $a + 3b = ?$

- (A) -4 (B) 4
(C) 3 (D) 5

$$1. \begin{cases} 3x + 6y = 11 \cdots ① \\ 4x - 3y = 11 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ② \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 11 \cdots ① \\ 8x - 6y = 22 \cdots ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ① + ③ \Rightarrow 11x = 33, x = 3,$$

$$y = \frac{1}{3} \Rightarrow a + 3b = 4$$

(C) 2. 聯立方程 $\begin{cases} 0.3x = 0.2y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \end{cases}$ 的解以數對 (x, y) 表示為何?

- (A) (4, 3) (B) (-2, -3)
(C) (4, 6) (D) (8, 12)

$$2. \begin{cases} 0.3x = 0.2y \cdots ① \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ① \times \frac{10}{9} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y = 0 \cdots ③ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \cdots ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow ② - ③ \text{ 得 } \frac{1}{2}y + \frac{2}{9}y = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{9}{18}y + \frac{4}{18}y = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{13}{18}y = \frac{13}{3}$$

(B) 3. 解聯立方程 $\begin{cases} 3x - y = 1 \cdots ① \\ x + 2y = 4 \cdots ② \end{cases}$ 的解法中下列何者正確?

- (A) 由①式得 $y = -3x + 1$, 代入②式, 可得 $x = -\frac{2}{5}$
(B) 由①式 $\times 2 +$ ②式, 可得 $x = \frac{6}{7}$
(C) 由①式 $-$ ②式 $\times 3$, 可得 $y = \frac{11}{5}$
(D) 由②式得 $x = 4 - 2y$, 代入①式, 可得 $y = \frac{11}{5}$

$$3. \begin{cases} 3x - y = 1 \cdots ① \\ x + 2y = 4 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ① \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 2 \cdots ③ \\ x + 2y = 4 \cdots ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow ③ + ② \Rightarrow 7x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$$

(A) 4. 解下列二元一次聯立方程 $2x + y - 7 = -1 = 3x - 2y - 10$ 的 x, y 各為多少?

- (A) $x = 3, y = 0$ (B) $x = 0, y = 3$
(C) $x = 2, y = 1$ (D) $x = 1, y = 2$

$$4. \begin{cases} 3x - 2y - 10 = -1 \cdots ① \\ 2x + y - 7 = -1 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 9 \cdots ③ \\ 2x + y = 6 \cdots ④ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ③ + ④ \times 2 \Rightarrow 7x = 21, x = 3, \text{ 代入 } ④, y = 0$$

(C) 5. 一中街夜市某攤位, 賣一塊香雞排可賺 15 元, 賣一份炸薯條可賺 10 元, 已知賣出的炸薯條份數是香雞排塊數的兩倍, 而且一個晚上共賺 3850 元, 下列哪一個式子與題意不符合?

- (A) 假設香雞排賣了 x 塊, 則 $15x + 20x = 3850$
(B) 假設炸薯條賣了 x 份, 則 $\frac{15}{2}x + 10x = 3850$
(C) 假設香雞排賣了 x 塊, 炸薯條賣了 y 份, 則 $\begin{cases} x = 2y \\ 15x + 10y = 3850 \end{cases}$
(D) 假設炸薯條賣了 x 份, 香雞排賣了 y 塊, 則 $\begin{cases} x = 2y \\ 15y + 10x = 3850 \end{cases}$

(B) 6. 50 元、10 元硬幣共 44 枚, 恰好可換一張 1000 元紙鈔, 則 50 元硬幣共有幾枚?

- (A) 8 (B) 14
(C) 16 (D) 20

$$6. \text{ 設 50 元硬幣有 } x \text{ 枚, 10 元硬幣有 } y \text{ 枚, } \begin{cases} x + y = 44 \cdots ① \\ 50x + 10y = 1000 \cdots ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow ② - ① \times 10 \Rightarrow 40x = 560, x = 14$$

(B) 7. 設有甲、乙兩數，甲數除以乙數得商為 7，餘數為 4，甲的 3 倍除以乙的 2 倍得商為 11，餘數為 4，試求甲、乙兩數之和？

- (A) 58 (B) 68
(C) 52 (D) 62

$$7. \text{ 設甲為 } x, \text{ 乙為 } y, \begin{cases} x = 7y + 4 \cdots \textcircled{1} \\ 3x = 22y + 4 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 3 \Rightarrow y = 8, x = 60, x + y = 68$$

(D) 8. 九二一大地震時，救難隊搬了 5 箱泡麵，準備分給 y 位民眾，已知每箱泡麵有 x 包，第一次分發 2 箱，平均每人分得 3 包泡麵，最後剩 6 包，第二次再拿剩下的 3 箱來發，結果每人共分得 8 包泡麵，最後還是剩 6 包，則一箱泡麵有多少包？

- (A) 20 (B) 28
(C) 46 (D) 30

$$8. \begin{cases} 2x = 3y + 6 \cdots \textcircled{1} \\ 5x = 8y + 6 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \times 5 \Rightarrow 10x = 15y + 30 \cdots \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow 10x = 16y + 12 \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{4} - \textcircled{3} \Rightarrow y = 18, x = 30$$

(D) 9. 學生分配宿舍，如果 6 人住一間，則有 2 人無宿舍可住；如果 7 人住一間，則剩餘宿舍 2 間，請問：學生共有幾個人？

- (A) 38 (B) 58
(C) 78 (D) 98

$$9. \text{ 設有宿舍 } y \text{ 間，學生 } x \text{ 人，} \begin{cases} 6y + 2 = x \\ 7(y - 2) = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 6y = 2 \cdots \textcircled{1} \\ x - 7y = -14 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow y = 16, x = 98$$

(D) 10. 奇鼎國中實施紙類資源回收。去年 12 月分一、二年級共回收 38 公斤；今年元月分二年級比一年級多回收 6 公斤，只知與 12 月分比較，一年級增加 50%，二年級減少 25%，試問下列何者正確？

- (A) 12 月分二年級比一年級多回收 6 公斤
(B) 元月分二年級回收 28 公斤
(C) 元月分一年級回收 18 公斤
(D) 12 月分一年級回收 10 公斤

$$10. \text{ 設 12 月分一年級回收 } x \text{ 公斤，二年級回收 } y \text{ 公斤，}$$

$$\text{則 } \begin{cases} x + y = 38 \\ 1.5x - 0.75y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 38 \\ 2x - y = -8 \end{cases}, \text{ 解得 } x = 10, y = 28,$$

$$\text{元月分：} 1.5x = 15 \text{ (公斤)}, 0.75y = 21 \text{ (公斤)}$$

(D) 11. 下列式子的化簡，何者正確？

- (A) $3x - 7y = -4xy$
(B) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{7}y = 21x + 20y$
(C) $2x \cdot (\frac{1}{3}y) = 2\frac{1}{3}xy$
(D) $\frac{3x+2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9x+2}{6}$

11. (A) $3x - 7y \Rightarrow$ 無須化簡
(B) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{7}y \Rightarrow$ 無須化簡
(C) $2x(\frac{1}{3}y) = \frac{2}{3}xy$
(D) $\frac{3x+2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9x+2}{6}$

(B) 12. 若 $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ bx - ay = 4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ ax - by = 5 \end{cases}$ 有相同的解，求 $a - b = ?$

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

$$12. \begin{cases} x + 3y = -1 \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}, \textcircled{1} \times 3 \Rightarrow 3x + 9y = -3 \cdots \textcircled{3}, \textcircled{3} - \textcircled{2} \Rightarrow 5y = -5,$$

$$y = -1, x = 2 \text{ 代入下式 } \begin{cases} bx - ay = 4 \\ ax - by = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + a = 4 \cdots \textcircled{4} \\ 2a + b = 5 \cdots \textcircled{5} \end{cases}, \textcircled{4} \times 2$$

$$\Rightarrow 4b + 2a = 8 \cdots \textcircled{6}, \textcircled{6} - \textcircled{5} \Rightarrow 3b = 3, b = 1, a = 2, \therefore a - b = 1$$

(D) 13. 已知 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 都是 $ax + by = 12$ 的解，求 $a - b = ?$

- (A) -12 (B) 12
(C) -24 (D) 24

$$13. \begin{cases} 5a + 4b = 12 \cdots \textcircled{1} \\ 3a + 2b = 12 \cdots \textcircled{2} \end{cases}, \textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{ 得 } a = 12 \text{ 代入 } \textcircled{2}$$

$$\text{得 } b = -12 \Rightarrow a - b = 12 - (-12) = 24$$

- (B) 14. 瑞靚班上共有 36 人，數學平時考全班平均 63 分，若男生平均 70 分，女生平均 56 分，則該班男生有多少人？
- (A) 14 (B) 18
(C) 22 (D) 26

14. 令男生 x 人，女生 y 人

$$\begin{cases} x + y = 36 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 70x + 56y = 63 \times 36 \cdots \textcircled{2} \end{cases}, \textcircled{1} \times 56 \Rightarrow 56x + 56y = 2016 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \Rightarrow 14x = 252, x = 18, \text{男生有 18 人}$$

- (A) 15. 若聯立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \\ ax = 3y + a \end{cases}$ ，其 x 、 y 之值的和為 1，求 $a = ?$
- (A) -3 (B) 3
(C) $\frac{99}{34}$ (D) $-\frac{99}{34}$

15. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \cdots \textcircled{1} \\ x + y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 36 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 2y = 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } x = 34, y = -33$

$$34a = -99 + a, 33a = -99, a = -3$$



- (C) 1. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + \frac{5}{6}y = 7 \\ y = 18 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$ ，則 $a + b = ?$ 97 基測二
- (A) 0 (B) 7
(C) 14 (D) 22

1. $\begin{cases} 2x + \frac{5}{6}y = 7 \cdots \textcircled{1} \\ y = 18 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow y = 18 = b \text{ 代入 } \textcircled{1}$

$$2x + \frac{5}{6}(18) = 7, 2x = -8, x = -4 = a,$$

$$\therefore a + b = (-4) + 18 = 14$$

- (D) 2. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$ ，則 $a + b = ?$ 97 基測一
- (A) 1 (B) 6
(C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{12}{5}$

2. $\begin{cases} 2x - y = 3 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 4y = 3 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow 5y = 3, y = \frac{3}{5} = b$

$$x = \frac{9}{5} = a, \therefore a + b = \frac{9}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

- (C) 3. 若大軍買了數支 10 元及 15 元的原子筆，共花費 90 元，則這兩種原子筆的數量可能相差幾支？
- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5

3. 設 10 元買 x 支，15 元買 y 支

$$\Rightarrow 10x + 15y = 90 \Rightarrow 2x + 3y = 18$$

x	3	6
y	4	2
$ x - y $	1	4

97 基測一

- (D) 4. 某水果店販賣西瓜、梨子及蘋果，已知一個西瓜的價錢比 6 個梨子多 6 元，一個蘋果的價錢比 2 個梨子少 2 元。判斷下列敘述何者正確？ 97 基測一
- (A) 一個西瓜的價錢是一個蘋果的 3 倍
(B) 若一個西瓜降價 4 元，則其價錢是一個蘋果的 3 倍
(C) 若一個西瓜降價 8 元，則其價錢是一個蘋果的 3 倍
(D) 若一個西瓜降價 12 元，則其價錢是一個蘋果的 3 倍

4. 設梨子一個賣 x 元，
西瓜一個賣 $(6x + 6)$ 元，
蘋果一個賣 $(2x - 2)$ 元

$$3(2x - 2) = 6x - 6 = (6x + 6) - 12$$

\therefore 一個蘋果價錢的 3 倍
= 一個西瓜降價 12 元

- (A) 5. 已知 x 、 y 的關係式為 $\frac{x - y}{3} - \frac{x - 2y}{4} = \frac{x - 3}{12}$ ，求 $y = ?$ 96 基測二
- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$
(C) 1 (D) 3

5. 原式 $\Rightarrow 4(x - y) - 3(x - 2y) = x - 3$

$$\Rightarrow 4x - 4y - 3x + 6y = x - 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

- (C) 6. 小亞有紅牌 16 張，黑牌 18 張，混合後分成甲、乙兩堆。若甲堆比乙堆多 12 張，且甲堆中的紅牌比乙堆中的黑牌多 5 張，則甲堆中的黑牌比乙堆中的紅牌多幾張？
- (A) 2 (B) 5
(C) 7 (D) 10

6. 令乙堆中的黑牌有 x 張，乙堆中的紅牌有 y 張，
甲堆中的黑牌比乙堆中的紅牌多 a (張)，

	紅	黑
甲	$x + 5$	$y + a$
乙	y	x

$(x + 5) + (y + a) = (y + x) + 12,$
 $x + y + 5 + a = x + y + 12, 5 + a = 12, a = 7$

96 基測二

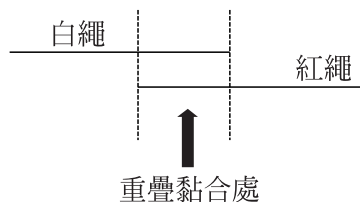
(D) 7. 張老闆以每顆 a 元的單價買進水蜜桃 100 顆。現以每顆比單價多兩成的價格賣出 70 顆後，再以每顆比單價低 b 元的價格將剩下的 30 顆賣出。求全部水蜜桃共賣多少元？(用 a 、 b 表示)

96 基測一

- (A) $70a + 30(a - b)$
 (B) $70 \times (1 + 20\%) \times a + 30b$
 (C) $100 \times (1 + 20\%) \times a - 30(a - b)$
 (D) $70 \times (1 + 20\%) \times a + 30(a - b)$

7. 比單價多兩成且賣出 70 顆： $70 \times (1 + 20\%) \times a$ (元)，
 比單價低 b 元賣剩下的 30 顆：共賣 $30(a - b)$ (元)，
 故共賣 $70 \times (1 + 20\%) \times a + 30(a - b)$ (元)

(B) 8. 如右圖，將一白繩的 $\frac{3}{8}$ 與一紅繩的 $\frac{1}{3}$ 重疊並以膠帶黏合，形成一條長為 238 公分的繩子。求未黏合前，兩繩長度相差多少公分？



- (A) 14
 (B) 17
 (C) 28
 (D) 34

8. 設白繩、紅繩長分別為 x 、 y ， $\therefore \frac{3}{8}x = \frac{1}{3}y$
 $\Rightarrow y = \frac{9}{8}x$ ， $x + \frac{2}{3}y = 238$ ， $\therefore x + \frac{2}{3} \times \frac{9}{8}x = 238$ ，
 $\frac{7}{4}x = 238$ ， $x = 136$ ， $y = \frac{9}{8} \times 136 = 153$
 $\therefore y - x = 153 - 136 = 17$

94 基測一

模 擬 學 力 基 測 試 題

(D) 1. 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 6y - 4x = 9 \end{cases}$ 的解為何呢？

- (A) $x = 4$ ， $y = 0$ (B) $x = 0$ ， $y = 0$
 (C) $x = 0$ ， $y = 4$ (D) 無解

1. 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 2x - 3y = \frac{-9}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{8}{\frac{-9}{2}} \Rightarrow$ 無解

(B) 2. 解下列二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x - y) = 4 \\ 3(x + 2y) + 3(x - y) = 1 \end{cases}$ ，求 x 、 y 為何？

- (A) $x = \frac{1}{9}$ ， $y = \frac{5}{9}$
 (B) $x = \frac{-1}{9}$ ， $y = \frac{5}{9}$
 (C) $x = \frac{5}{9}$ ， $y = \frac{1}{9}$
 (D) $x = \frac{5}{9}$ ， $y = \frac{-1}{9}$

2. 原式 $= \begin{cases} -x + 7y = 4 \cdots \textcircled{1} \\ 6x + 3y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} \times 6 + \textcircled{2}$
 $\Rightarrow y = \frac{5}{9}$ 代入 $\textcircled{2}$ 得 $x = \frac{-1}{9}$

(C) 3. 解 $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{y - 3x}{5} = 1 \\ \frac{7x + y}{5} - y = -1 \end{cases}$ ，則 $x^2 + y^2 = ?$

- (A) 105 (B) 115
 (C) 125 (D) 135

3. 化簡得 $\begin{cases} 19x - 8y = 15 \cdots \textcircled{1} \\ 7x - 4y = -5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{2} \times 2 : 14x - 8y = -10 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{3} : 5x = 25 \therefore x = 5$
 代入 $\textcircled{2} : 35 - 4y = -5, 4y = 40, y = 10$
 $\therefore x^2 + y^2 = 25 + 100 = 125$

(B) 4. 二元一次方程式 $x + 3y = 12$ 共有幾個正整數解呢？

- (A) 2 (B) 3
 (C) 4 (D) 5

4. $x = 12 - 3y$

x	9	6	3
y	1	2	3

- (D) 5. 小鼎解一聯立方程式 $\begin{cases} y - 2x = -7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$ ，結果他看錯式中的 -7 ，解得 $y = -10$ ，請問：小鼎是將 -7 誤看成多少呢？
- (A) 4 (B) 5
(C) 6 (D) 7

5. 將 $y = -10$ 代入 $2x - 3y = 13$ 式中得 $x = -\frac{17}{2}$ ，
將 $y = -10, x = -\frac{17}{2}$ 代入 $y - 2x = -7$
得 $-10 + 17 = 7$ ，故誤看成 7

- (A) 6. 家榮和媽媽到銀行去提領 3000 元的美金共有 45 張鈔票，其中含有 50 元及 100 元面額的鈔票，請問：50 元的鈔票有幾張呢？
- (A) 30 (B) 25
(C) 20 (D) 15

6. 設 50 元有 x 張，100 元有 y 張， $\begin{cases} x + y = 45 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 50x + 100y = 3000 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow \textcircled{1} \times 100 - \textcircled{2} \Rightarrow 50x = 1500 \Rightarrow x = 30$

- (C) 7. 家億到麥當勞買餐點，他發現若點 4 杯可樂及 3 份薯條則不夠 27 元；若點 3 杯可樂及 2 份薯條，則剩下 16 元，已知一份薯條比一杯可樂多 7 元，則一杯可樂多少元？
- (A) 16 (B) 17
(C) 18 (D) 19

7. 設一杯可樂 x 元，一份薯條 y 元，
則 $\begin{cases} y = x + 7 \\ 4x + 3y - 27 = 3x + 2y + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 7 \\ x + y = 43 \end{cases} \Rightarrow x = 18, y = 25$

- (A) 8. 奇鼎大學招收數學碩士班，錄取人數是到考人數的 $\frac{1}{3}$ ，而且比缺考人數多 5 人，已知有 $\frac{1}{5}$ 的人數缺考，請問：報名的人數是多少人呢？
- (A) 75 (B) 73
(C) 65 (D) 63

8. 設到考人數 x 人，缺考人數 y 人，報名人數 $x + y$ 人，
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 5 \\ y = \frac{1}{5}(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow x + y = 75 \text{ (人)}$

- (D) 9. 有一條鮪魚將其分成魚頭、魚身及魚尾三個部分，如果魚尾重 3 公斤，魚頭重量等於魚尾加上魚身一半的重量，魚身重量等於魚尾加上魚頭的重量，請問：此條鮪魚有多少公斤呢？
- (A) 21 (B) 22
(C) 23 (D) 24

9. 設魚頭 x 公斤，魚身 y 公斤 $\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y}{2} \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 12 \end{cases}$
 $\Rightarrow x + y + 3 = 9 + 12 + 3 = 24$

- (A) 10. 飆速網咖的收費標準為：基本費用每次 30 元（可使用 x 分鐘），超過 x 分鐘後，超過的部分每分鐘收費 y 元，啓倫第一次到此店上網 40 分鐘花費 50 元，第二次到同一家店上網 1 小時花費 70 元，則 $x = ?$
- (A) 20 (B) 40
(C) 30 (D) 50

10. $\begin{cases} 30 + (40 - x)y = 50 \\ 30 + (60 - x)y = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (40 - x)y = 20 \cdots \textcircled{1} \\ (60 - x)y = 40 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} : \frac{40 - x}{60 - x} = \frac{1}{2}, 80 - 2x = 60 - x, x = 20$

- (B) 11. 有一群大陸客到新竹科學園區參觀太陽能機車，今有太陽能機車若干臺且試車場有 40 公尺長，但由於太陽能機車少於人數，所以採取輪流騎乘，則每人可騎 30 公尺；若人數增加 4 名，機車減少 3 輛，則每人可騎 20 公尺，請問：原來有太陽能機車多少輛呢？
- (A) 10 (B) 15
(C) 20 (D) 25

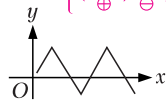
11. 設原有大陸客 x 人，太陽能機車 y 輛
 $\Rightarrow \begin{cases} 30x = 40y \\ 20(x + 4) = 40(y - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x = 40y \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 20x + 80 = 40y - 120 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow \textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } 20x + 80 = 30x - 120 \Rightarrow 10x = 200, x = 20, y = \frac{30 \times 20}{40} = 15$

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(○) 1. 若 $a \neq 0$, 則 A 點坐標 (a, a) 必落在第一象限或第三象限內。💡 若 a 不為 0, a 應同時為正或負

能力一

(×) 2. 直角坐標上以 x 軸為對稱軸, 則點 $(-3, -2)$ 的對稱點為 $(3, 2)$ 。💡 以 x 軸為對稱軸, 對稱點應為 $(-3, 2)$ (×) 3. 坐標平面上兩點 $A(p, q)$ 、 $B(r, s)$, A 到 B 的距離 $\overline{AB} = \sqrt{(p+r)^2 - (q+s)^2}$ 。💡 $\overline{AB} = \sqrt{(p-r)^2 + (q-s)^2}$ (×) 4. 設點 (bc, ac) 在第四象限內, 則點 $(\frac{b}{a}, \frac{a}{c})$ 在第一象限內。💡 $bc > 0, ac < 0 \Rightarrow \begin{cases} c > 0, b > 0, a < 0 \\ c < 0, b < 0, a > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{則 } (\frac{b}{a}, \frac{a}{c}) \Rightarrow \begin{cases} (\frac{\oplus}{\ominus}, \frac{\oplus}{\ominus}) \\ (\frac{\ominus}{\oplus}, \frac{\ominus}{\oplus}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\ominus, \ominus) \\ (\ominus, \ominus) \end{cases} \Rightarrow \text{第三象限內}$ (○) 5. 右圖符合 y 為 x 的函數圖形。💡 作一條垂直 x 軸直線, 僅與圖形有一交點

能力二

(○) 6. 若線型函數 $y = f(x)$ 的圖形垂直 y 軸, 且經過 $(0, -\frac{1}{3})$, 則 $f(x) = -\frac{1}{3}$ 。💡 $f(x) = y = ax + b$, 且圖形垂直 y 軸, 故 $f(x) = y = -\frac{1}{3}$ (○) 7. 函數式 $y = x^2$ 中, y 是 x 的函數, 但 x 不是 y 的函數。💡 $y = x^2$, y 是 x 的函數, 為多對一函數

x	2	-2
y	4	4

(○) 8. 二元一次方程式 $6x + 4y = 16$ 與 $12x = 10 - 8y$ 兩直線互相平行。💡 兩平行直線方程式的 x 與 y 之係數經過化簡後應相同

能力三

(○) 9. 以下兩直線方程式: $y = 2x$ 及 $2x + 3y = 0$ 的圖形皆通過原點。💡 令 $x = 0$, 分別代入 $y = 2x$ 及 $2x + 3y = 0$, 可得 y 皆為 0, 故皆通過原點(×) 10. 當 $a > 0, b < 0$ 時, 直線 $y = ax + b$ 通過二、三、四象限。💡 直線通過 $P_1(0, b)$ 、 $P_2(-\frac{b}{a}, 0)$, 此時 P_1 會在 y 軸的負半軸, P_2 會在 x 軸的正半軸上, 故直線通過一、三、四象限

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 直角坐標

一 直角坐標

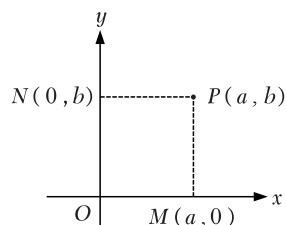
平面上兩條互相垂直的數線，以原點為交點，所構成的平面稱為**坐標平面**，亦稱為**直角坐標平面**。

1. 數線的說明

水平的數線	橫軸	x 軸	往右為正
垂直的數線	縱軸	y 軸	往上為正

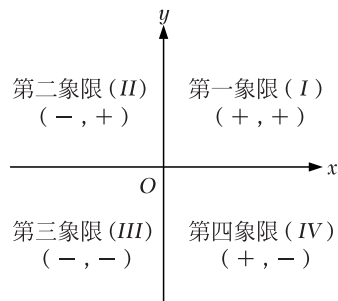
二 點坐標

過坐標平面上任一點 P ，分別做垂直於 x 軸與 y 軸的直線，分別交於 $M(a, 0)$ 與 $N(0, b)$ ，則 P 點可用數對 (a, b) 表示位置，亦即 (a, b) 為 P 點之坐標。



三 象限

- 兩條坐標軸可將坐標平面分成六部分： x 軸、 y 軸、**第一象限**、**第二象限**、**第三象限**、**第四象限**。象限根據坐標位置關係有正、負性質的差異。
- 象限的命名：由逆時針方向分別取名為第一、第二、第三、第四象限，或者用羅馬數字代表，如： I 、 II 、 III 、 IV 亦可（如右圖所示）。

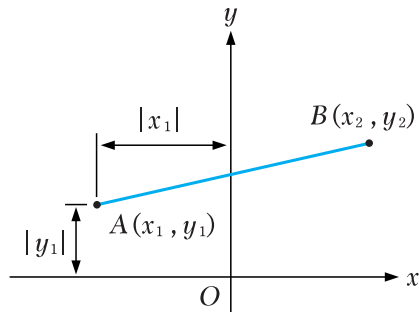


注意 坐標軸上的點不屬於任何一象限。亦即當 x 或 y 坐標為 0 的點，不屬於任一象限，例如： $(5, 0)$ 或 $(0, 13)$ 皆不屬於任何一象限。

四 坐標上兩點距離與中點坐標

假設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 為平面上相異兩點：

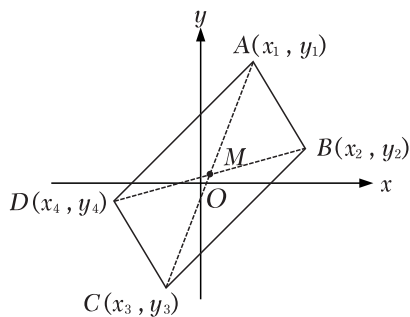
- 則：
- A 點到 x 軸距離 $\Rightarrow |y_1|$
 - A 點到 y 軸距離 $\Rightarrow |x_1|$
 - A 點到原點 $O(0, 0)$ 的距離 $\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
 - $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 - \overline{AB} 中點坐標 $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$



五 平行四邊形坐標關係

76

若平行四邊形 $ABCD$ 其四頂點坐標分別為
 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $D(x_4, y_4)$ ，
 則有下列性質： $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ， $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$



師說 1

〈坐標與象限的關係〉

演練 1

已知坐標 $A(3, a)$ 在 x 軸上， $B(d-2, -7)$ 在 y 軸上，且點 $(b+c, c+2)$ 是原點。

請問：(1) a 、 b 、 c 、 d 為何？

(2) 點 $(a+b, c+d)$ 在第幾象限呢？

解

(1) $A(3, a)$ 在 x 軸上 $\Rightarrow a = 0$

$B(d-2, -7)$ 在 y 軸上 $\Rightarrow d-2 = 0, d = 2$

$C(b+c, c+2)$ 是原點

$\Rightarrow b+c = 0, c+2 = 0 \Rightarrow c = -2, b = 2$

$\Rightarrow a = 0, b = 2, c = -2, d = 2$

(2) $\because a+b = 2, c+d = 0$

\Rightarrow 在 x 軸上 (不在任何象限)

1. 假設 $a > 0, b < 0$ ，則下列各點 $A(a, b)$ 、 $B(-a, b)$ 、 $C(a, -b)$ 分別在第幾象限？

2. 已知 $A(a, b)$ 在坐標平面上的第二象限，則 $(\frac{b}{a}, b^2)$ 在第幾象限呢？

解

1. $A(+, -)$ 在第四象限， $B(-, -)$ 在第三象限， $C(+, +)$ 在第一象限

2. $\because A(a, b)$ 在第二象限

$\Rightarrow a < 0, b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0, b^2 > 0$

$\therefore (\frac{b}{a}, b^2)$ 在第二象限

師說 2

〈直角坐標〉

演練 2

已知 $ABCD$ 為平行四邊形，其坐標分別為 $B(-2, -4)$ 、 $C(4, -2)$ 、 $D(1, 5)$ 。

請問：(1) A 點坐標為何？在第幾象限呢？

(2) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積？

解

(1) 設 A 點坐標 (x, y) ，

$$\frac{x+4}{2} = \frac{-2+1}{2} \Rightarrow x = -5,$$

$$\frac{y-2}{2} = \frac{-4+5}{2} \Rightarrow y = 3,$$

$A(-5, 3)$ 在第二象限

(2) $\triangle AED$ 面積 = $\triangle CGB$ 面積

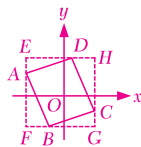
$$= 2 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\triangle DHC$$
 面積 = $\triangle BFA$ 面積 = $3 \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$

平行四邊形 $ABCD$ 面積

$$= EFGH$$
 面積 - $2(\triangle AED$ 面積 + $\triangle DHC$ 面積)

$$= 9^2 - 2(6 + \frac{21}{2}) = 48 \text{ (平方單位)}$$



如圖，已知 $ABCD$ 為平行四邊形，其坐標分別為 $A(-1, 8)$ 、 $B(0.5, 5)$ 、 $C(-1, -6)$ 。

請問：

(1) D 點坐標為何？

(2) 平行四邊形 $ABCD$ 面積為何？

解

$$(1) \begin{cases} (-1) + (-1) = x + 0.5 \\ 8 + (-6) = y + 5 \end{cases}$$

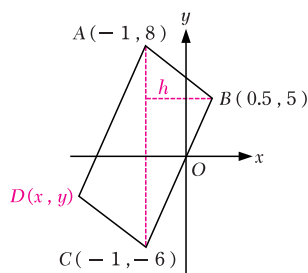
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2.5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D \text{ 點坐標 } (-2.5, -3)$$

$$(2) \overline{AC} = |8 - (-6)| = 14,$$

$$h = |0.5 - (-1)| = 1.5,$$

$$\text{面積} = (14 \times 1.5 \times \frac{1}{2}) \times 2 = 21 \text{ (平方單位)}$$



師說 3

〈兩點距離與中點坐標〉

演練 3

1. 在直角坐標平面上有一點 $A(3, -4)$ ，若 A 到 x 軸的距離是 m ，到 y 軸的距離是 n ，則 $m^2 - n^2 = ?$
2. 在直角坐標平面上，有兩點 $A(3, -5)$ 、 $B(-2, -6)$ ，其距離為何呢？
3. 坐標平面上， $A(2, 3)$ 、 $B(x, y)$ 的中點坐標為 $(-1, 2)$ ，則 $x + y = ?$

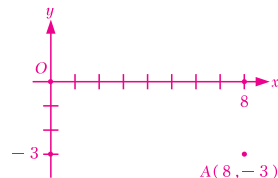
解

1. $m = |-4| = 4$
 $n = |3| = 3$
 $\Rightarrow m^2 - n^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$
2. $AB = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [-5 - (-6)]^2}$
 $= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
3. $\frac{2+x}{2} = -1 \Rightarrow x = -4$ ， $\frac{3+y}{2} = 2 \Rightarrow y = 1$
 故 $x + y = -3$

1. 在直角坐標平面上， A 點位於第四象限，且與 x 軸距離 3 個單位，與 y 軸距離 8 個單位，則 A 點的坐標為何？
2. 有一個三角形的花園，其三點坐標分別為 $A(-5, 2)$ 、 $B(7, -3)$ 、 $C(-3, 6)$ ，請問：此花園的周長為何呢？
3. 坐標平面上有兩點 $A(2, -3)$ 、 $B(-4, -5)$ ，請問： \overline{AB} 的中點坐標為何呢？

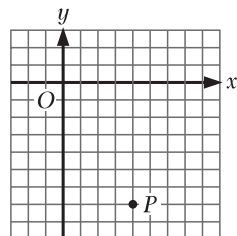
解

1. 如圖，
 A 點 $(8, -3)$
2. $AB = \sqrt{[7 - (-5)]^2 + [(-3) - 2]^2} = 13$
 $BC = \sqrt{[7 - (-3)]^2 + [(-3) - 6]^2} = \sqrt{181}$
 $AC = \sqrt{[(-3) - (-5)]^2 + (6 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$
 $\triangle ABC$ 周長 $= 13 + \sqrt{181} + 2\sqrt{5}$ (單位)
3. $(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{(-3) + (-5)}{2}) = (-1, -4)$



同步評量 1

- (B) 1. 設 $r + s = 0$ 且 $rs \neq 0$ ，則 (r, s) 在第幾象限？
 (A) 一、三 (B) 二、四 (C) x 軸 (D) y 軸
 1. $(+, -)$ 或 $(-, +)$
 \therefore 在第二、四象限
- (D) 2. 下列哪一點與 y 軸距離比到 x 軸的距離小？
 (A) $(-2, 1)$ (B) $(3, -1)$ (C) $(-2, -2)$ (D) $(-1, 2)$
 2. (D) $(-1, 2) \Rightarrow$ 到 y 軸距離 $= |-1| = 1$
 到 x 軸距離 $= |2| = 2$
- (D) 3. 若 $a - b = 1$ ，且 $ab < 0$ ，則點 (a, b) 在坐標平面上第幾象限？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四
 3. $\because ab < 0, \begin{cases} a < 0, b > 0 \\ a > 0, b < 0 \end{cases}$ ，又 $a - b = 1$ ，
 $\therefore a > 0, b < 0 \Rightarrow$ 第四象限
- (D) 4. 設 $r > s$ 且 $|r| = |s|$ ，則點 $(r + s, r - s)$ 在位於何處？
 (A) 第一象限 (B) 第四象限 (C) x 軸上 (D) y 軸上
 4. $r + s = 0 \therefore$ 在 y 軸上
- (A) 5. 滿足 $|x + 2y - 3| + |2x - y - 1| = 0$ 之 (x, y) 在第幾象限？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四
 5. 令 $\begin{cases} x + 2y = 3 \dots ① \\ 2x - y = 1 \dots ② \end{cases}$ ， $② - ① \times 2 \Rightarrow -5y = -5, y = 1$ ，
 代入 ①， $x + 2 = 3, x = 1, \therefore (x, y) = (1, 1)$ 在第一象限
- (B) 6. 右圖的坐標平面中，若 O 為原點，且每個方格的邊長為 0.5 個單位長，則 P 點的坐標該如何表示？
 (A) $(1, -1.75)$
 (B) $(2, -3.5)$
 (C) $(2, 3.5)$
 (D) $(1, 1.75)$
 6. 1 單位長為 2 個方格邊長
 $\Rightarrow (\frac{4}{2}, -\frac{7}{2}) = (2, -3.5)$

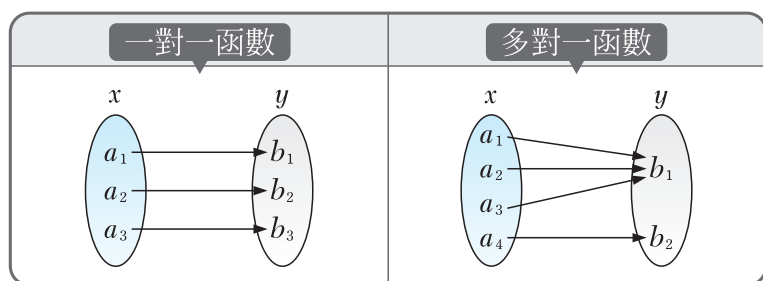


能力二 函數與圖形

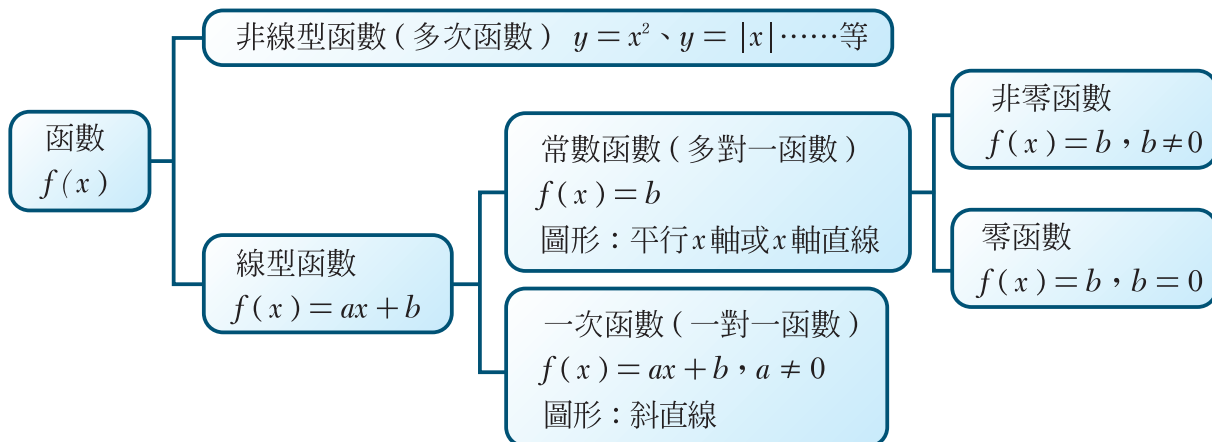
一 函數與變數

若 $y = f(x)$ 是 x 函數，給定自變數 x 一個值 a ，可從其對應關係中得到一個 y 值與它對應時，這個對應值稱為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 時的函數值，以 $f(a)$ 表示。

二 函數對應的種類



三 常見函數的類別



四 函數圖形的判別法

y 為 x 之函數	函數圖形 (僅有一交點)	非函數圖形 (交點 > 1)
<p>作一條 x 軸的垂直線，若與該圖形的交點不只有一個 (交點 > 1)，則此圖形非函數圖形；若僅有一個交點即為函數圖形。</p>		

師說 4

〈函數的意義〉

演練 4

已知函數 x 、 y 的關係如下表所示：請問：當 $x = 10$ 時， $y = b$ ，則 $b = ?$

x	1	2	3	4	5	10
y	8	11	14	17	20	b

解

觀察 x 與 y 的函數對應關係之後，可知每當 x 增加 1 時， y 則增加 3，因此， x 由 5 增加至 10 時， y 應增加 $5 \times 3 = 15$ ，故 $x = 10$ ， $y = 20 + 15 = 35$ ，則 $b = 35$

育偉原本有 5000 元的存款，因為想要買一臺 PS3，所以自 4 月 1 日起，每天存 50 元，設開始存款 x 天之後，他一共存有 y 元，請問 (1) x 與 y 的關係式為何呢？又 y 是否為 x 的函數呢？(2) 到今年暑假 7 月 1 日(含)為止，共可存款多少元呢？

解

- (1) $y = 5000 + 50x$ ，對於每一個 x 值都僅有一個 y 值可對應，所以 y 是 x 的函數
 (2) $y = 5000 + 50 \times 92 = 9600$ (元) … [四月一日到七月一日共 $30 + 31 + 30 + 1 = 92$ 日]

師說 5

〈函數的判別〉

演練 5

下列各式中何者符合 y 是 x 的函數呢？

- (1) $2x + 3y = 5$ (2) $xy = 3, x \neq 0$
 (3) $x^2 = y + 5$ (4) $y^2 + 3x - 2 = 0$

解

- (1) $\because 2x + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$
 $\therefore y$ 是 x 的函數
 (2) $xy = 3, x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$ $\therefore y$ 是 x 的函數
 (3) $x^2 = y + 5 \Rightarrow y = x^2 - 5$ $\therefore y$ 是 x 的函數
 (4) $y^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = -3x + 2$ ，
 $y = \pm \sqrt{-3x + 2}$
 $\therefore y$ 不是 x 的函數
 (\because 每個 x 有兩個對應的 y 值)

下列 x 與 y 的關係式中，何者可以將 y 表示為 x 的函數呢？

- (1) $3|x| + y = 2$ (2) $x^2 + y^2 = 2$
 (3) $y^2 = 5x$ (4) $x^2 = 3y$

解

- (1) $3|x| + y = 2 \Rightarrow y = -3|x| + 2$
 $\therefore y$ 是 x 的函數
 (2) $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - x^2}$
 $\therefore y$ 不是 x 的函數
 (3) $y^2 = 5x \Rightarrow y = \pm \sqrt{5x}$ $\therefore y$ 不是 x 的函數
 (4) $x^2 = 3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2$ $\therefore y$ 是 x 的函數

解題小偏方 要判斷 y 是否為 x 的函數？

- (1) 先將式子化為 $y = ax + b$ 的形式；(2) 判斷每一個 x ，是否都有唯一對應的 y 值

同步評量 2

(C) 1. 下列哪一個式子不可用來表示 y 是 x 的函數呢？

- (A) $y = 5$ (B) $2x - 3 = y$
 (C) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $y = 3x^2 - 1$

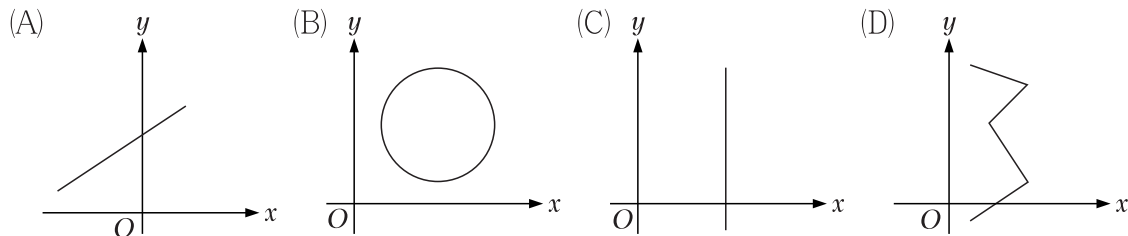
$$1. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{-4}{3}x^2 + 4 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{-4}{3}x^2 + 4}$$

(A) 2. 下表是 1 年 18 班部分同學身高和體重的資料表，下列何者敘述錯誤？

- (A) 體重是身高的函數 (B) 體重是座號的函數
 (C) 身高是座號的函數 (D) 體重身高不成正比亦不成反比

座號	15	16	17	18	19	20	21
體重 (kg)	54	49	54	51	48	48	54
身高 (cm)	149	152	160	153	160	152	156

(A) 3. 請問：下列各圖中，何者為函數圖形？ 3. 只有(A)，任作x軸的垂線，恰好均與圖形交於一點



能力

二元一次方程式的圖形

二元一次方程式圖形的重點

1. 二元一次方程式的標準式： $ax + by = c$ ， $(a \neq 0, b \neq 0)$

與 x 軸的交點坐標	與 y 軸的交點坐標	x 軸的方程式	y 軸的方程式
$(\frac{c}{a}, 0)$	$(0, \frac{c}{b})$	$y = 0$	$x = 0$
圖形垂直 y 軸	圖形垂直 x 軸	圖形通過原點	
$y = c (c \neq 0)$	$x = c (c \neq 0)$	$ax + by = 0$	

2. 直線方程式的求法

兩點式	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
-----	---	--

3. 兩平行線的求法

過點 $Q(x_1, y_1)$ 且平行 $ax + by = k_1$ 的直線方程式	可假設為 $ax + by = k_2 (k_1 \neq k_2)$ ，將 $Q(x_1, y_1)$ 代入得 $k_2 = ax_1 + by_1$	
---	--	--

二元一次方程式圖形快速判斷法則

1. 二元一次方程式通過： $y = ax + b$



條件	圖形	條件	圖形
1. $a > 0$	由左下向右上傾斜 ↗	5. $b > 0$	圖形與 y 軸交點在 原點上方
2. $a < 0$	由左上向右上傾斜 ↘	6. $b = 0$	圖形與 y 軸交點在 原點
3. $ a $ 愈大	愈靠近 y 軸 (傾斜角度大) 陡	7. $b < 0$	圖形與 y 軸交點在 原點下方
4. $ a $ 愈小	愈遠離 y 軸 (傾斜角度小) 平		

2. 若二元一次方程式為一般式： $ax + by + c = 0$ ，則先移項整理為標準式： $y = ax + b$ 再依上表判斷。

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = \boxed{-\frac{a}{b}}x + \boxed{-\frac{c}{b}}$$

$(-\frac{c}{b} : \text{判斷圖形的上下})$
 $(-\frac{a}{b} : \text{判斷圖形的傾斜方向與角度})$

3. 快速解法範例說明

1. $y = 3x$	2. $y = -3x$	3. $y = \frac{3}{2}x$	4. $y = -\frac{3}{2}x$
①通過原點 ②方向 ↗ ③比圖 3 陡	①通過原點 ②方向 ↘ ③比圖 4 陡	①通過原點 ②方向 ↗ ③比圖 1 平	①通過原點 ②方向 ↘ ③比圖 2 平
5. $y = 3x + 1$	6. $y = -3x - 1$	7. $y = \frac{3}{2}x + 1$	8. $y = -\frac{3}{2}x - 1$
①與 y 軸交點 (0, 1) ②方向 ↗ ③比圖 3 陡	①與 y 軸交點 (0, -1) ②方向 ↘ ③比圖 4 陡	①與 y 軸交點 (0, 1) ②方向 ↗ ③比圖 1 平	①與 y 軸交點 (0, -1) ②方向 ↘ ③比圖 2 平

師說 6

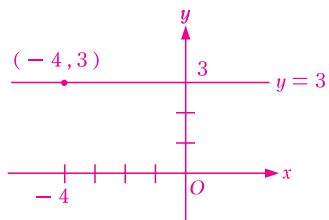
〈求二元一次方程式〉

演練 6

- 通過 $(-4, 3)$ 且與 x 軸平行的直線方程式為何？
- 已知一直線平行 $L: 3x - 4y + 6 = 0$ ，且通過點 $P(-1, 2)$ ，請問：此直線方程式為何？

解

1. 如圖， $y = 3$

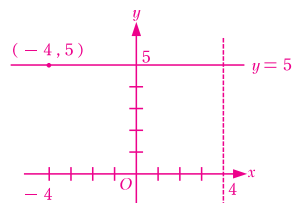


2. 假設平行線之方程式為 $3x - 4y + k = 0$ ，將 $(-1, 2)$ 代入，得 $k = 11$
 $\Rightarrow 3x - 4y + 11 = 0$

- 通過 $(-4, 5)$ 且與 $x = 4$ 垂直的直線方程式為何？
- 若一直線通過原點與兩直線 $3x + 2y = -1$ ， $x - y = 3$ 之交點，則此直線方程式為何呢？

解

1. 如圖， $y = 5$



2. 兩直線之交點 $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \cdots ① \\ x - y = 3 \cdots \cdots ② \end{cases}$
 \Rightarrow 得 $x = 1, y = -2 \Rightarrow$ 交點 $(1, -2)$
 \Rightarrow 所求直線通過 $(0, 0), (1, -2)$
 $\Rightarrow \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} \Rightarrow y = -2x$

師說 7

〈二元一次聯立方程式圖形的繪製〉

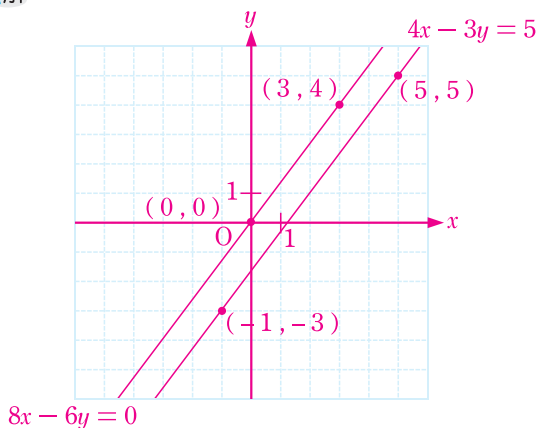
演練 7

82

畫出下列二元一次聯立方程式的圖形，試判斷其解為何？並說明二直線的關係為何？

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 8x - 6y = 0 \end{cases}$$

解



$$\begin{array}{c|c|c} x & 5 & -1 \\ \hline y & 5 & -3 \end{array}, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \cdots \textcircled{1} \\ 8x - 6y = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} \text{ 同除 } 2 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

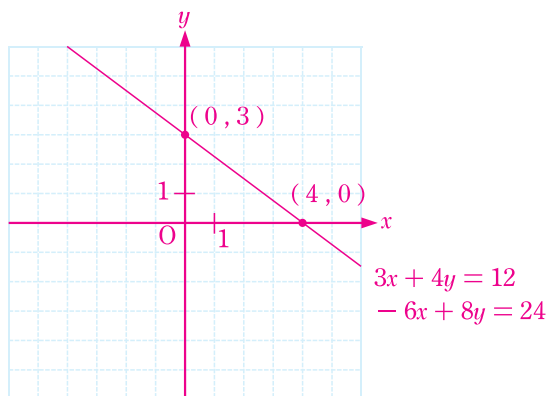
\therefore 兩方程式的 x 項、 y 項係數相同

\therefore 兩直線互相平行

請畫出下列二元一次聯立方程式的圖形，試判斷其解為何？並說明二直線的關係為何？

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$$

解



$$\begin{array}{c|c|c} x & 4 & 0 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}, \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 0 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$

\therefore 兩條直線共線 (重合)

師說 8

〈直線圖形的平移與平行〉

演練 8

將直線 $4x + 3y = 12$ 向右平移 5 個單位後，可得新的直線，試求此直線方程式。

解

$4x + 3y = 12$ 與 x 軸交點為 $(3, 0)$ ，

向右平移 5 個單位後

與 x 軸的交點坐標為 $(8, 0)$ 代入下式，

$4x + 3y = k$ ，得 $k = 32$

$\Rightarrow \underline{4x + 3y = 32}$

將直線 $5x + 7y = 21$ 向下平移 7 個單位後，可得新的直線，試求此直線方程式。

解

$5x + 7y$ 與 y 軸交點為 $(0, 3)$

向下平移 7 個單位後

與 y 軸的交點坐標為 $(0, -4)$ 代入下式，

$5x + 7y = k$ ，得 $k = -28$

$\Rightarrow \underline{5x + 7y = -28}$

師說 9

〈直線方程式的應用〉

演練 9

一直線 $L: x - y - 3 = 0$ 與直線 $M: x + y + 3 = 0$ 互相垂直，並交於一點 P ，請問：直線 L 、 M 與 x 軸圍成的面積為何？

解

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \cdots ① \\ x + y + 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \cdots ① \\ x + y + 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

$$① + ② \text{ 得 } x = 0$$

$$\text{代入 } ① \text{ 得 } y = -3,$$

故 P 點坐標為 $(0, -3)$

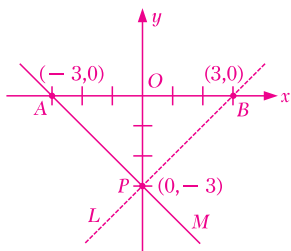
$$x - y - 3 = 0 \qquad x + y + 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -3 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array}$$

由圖，

$$\triangle ABP \text{ 面積} = \overline{AB} \times \overline{OP} \times \frac{1}{2} = 6 \times 3 \times \frac{1}{2} = 9 \text{ (平方單位)}$$



下列二元一次聯立方程式中，請分別說明兩直線方程式的關係。

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases} & (2) & \begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

解

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \text{此二直線互相平行}$$

$$(2) \begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow \text{此二直線相交於一點}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{此二直線重合}$$

同步步 評量 3

(C) 1. 坐標平面上，下列哪一直線通過點 $(-1, 1)$ ？

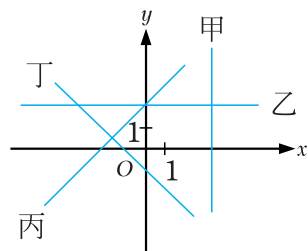
- (A) $3x - y + 5 = 0$ (B) $-x - 4y + 5 = 0$
(C) $x - y + 2 = 0$ (D) $x + y - 2 = 0$

1. (A) $3 \times (-1) - 1 + 5 = 1 \neq 0$
(B) $-(-1) - 4 \times 1 + 5 = 2 \neq 0$
(C) $(-1) - 1 + 2 = 0$
(D) $(-1) + 1 - 2 = -2 \neq 0$

(D) 2. 右圖四條直線中哪一個是 $x + y + 1 = 0$ 的圖形？

- (A) 甲
(B) 乙
(C) 丙
(D) 丁

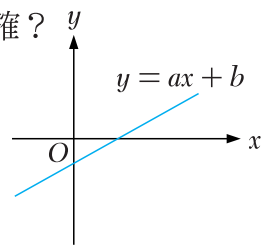
$$2. x + y + 1 = 0, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{取丁}$$



(B) 3. 如右圖，直線 $y = ax + b$ 通過一、三、四象限，則下列何者正確？

- (A) $b - 2a > 0$
(B) $a - b > 0$
(C) $b > 0, a < 0$
(D) $b < 0, a < 0$

$$3. y = ax + b, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{-b}{a} \\ \hline y & b & 0 \end{array} \Rightarrow b < 0, a > 0$$

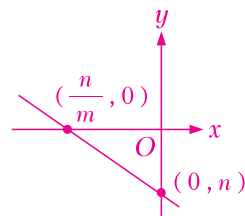


(B) 4. $mx + y = n$ 且 $n < 0, m > 0$ ，則下列哪一個選項可能是正確的圖形？

- (A) (B) (C) (D)

$$4. n < 0, m > 0, mx + y = n$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{n}{m} \\ \hline y & n & 0 \end{array}$$



(C) 5. 若公園的位置在坐標平面上的 $(2, 11)$ ，而大賣場的坐標位置在 $(4, 7)$ ，今小熏騎腳踏車走下列哪一條路線可同時經過公園和大賣場？

- (A) $y = 2x + 3$ (B) $y = 2x - 3$
 (C) $y = -2x + 15$ (D) $y = -2x - 15$

5. 將 $(2, 11)$ 和 $(4, 7)$ 分別代入直線 $y = ax + b$ 中，

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + b \\ 7 = 4a + b \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 15,$$

 故直線方程式為 $y = -2x + 15$

(D) 6. 將點 $A(3, -7)$ 向下平移 a 單位，再向左平移 4 單位後，會落在直線 $3y = 2x + 5$ 上，試求 $a = ?$

- (A) 8 (B) 3 (C) -3 (D) -8

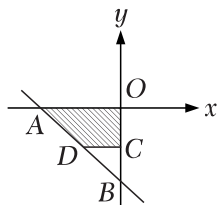
6. $A(3, -7)$ 向下平移 a 單位，向左 4 單位
 $(-1, -7-a)$ 代入 $3y = 2x + 5$
 $\Rightarrow 3(-7-a) = 2(-1) + 5, -21 - 3a = 3, a = -8$

(B) 7. 如右圖，直線 $3x + y + 8 = 0$ 通過 A 點與 B 點，如果 $\overline{CD} \perp y$ 軸且 $\overline{CD} = 2$ ，求梯形 $ADCO$ 面積為何？

- (A) 4
 (B) $\frac{14}{3}$
 (C) 5
 (D) $\frac{16}{3}$

7. D 點之 x 坐標 (-2) 代入 $3x + y + 8 = 0$ ，
 得 $y = -2$ ， $D(-2, -2)$ ，則 $C(0, -2)$
 令 A 點 $(a, 0)$ 代入 $3x + y + 8 = 0$ ，
 得 $a = \frac{-8}{3}$ ， $A(\frac{-8}{3}, 0)$

梯形 $ADCO$ 面積 $= \frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{DC}) \times \overline{CO}$
 $= \frac{1}{2} \times (\frac{8}{3} + 2) \times 2 = \frac{14}{3}$ (平方單位)



基本觀念題

(C) 1. 若 $ab < 0, a > 0$ ，則 $(b - a, -a^2)$ 在第幾象限？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

1. $ab < 0$ 且 $a > 0, \therefore b < 0$
 $\Rightarrow (b - a, -a^2) \Rightarrow (-, -)$
 \Rightarrow 在第三象限

(D) 2. 設 $a, b \neq 0$ ，坐標平面上點 $A(a - 3, b + 2)$ 在第二象限，則點 $B(b + 3, a - 4)$ 在第幾象限？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

2. $\therefore \begin{cases} a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 < 4 \\ b + 2 > 0 \Rightarrow b > -2 > -3 \end{cases} \therefore \begin{cases} b + 3 > 0 \\ a - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ 第四象限

(C) 3. $|m + 8| + |n - 4| = 0$ ，則 $(-n, m)$ 必在第幾象限呢？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

3. $m + 8 = 0$ 且 $n - 4 = 0, m = -8, n = 4,$
 $(-n, m) = (-4, -8)$ 在第三象限

(B) 4. 圓周上有 P, Q 二點， $P(7, 4), Q(-5, -12)$ 連接 \overline{PQ} 通過圓心 O 點，則 O 點坐標 = ?

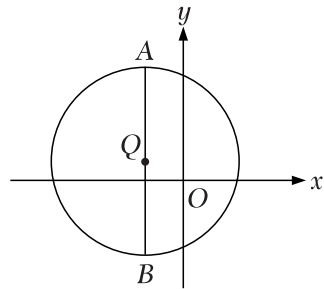
- (A) $(2, -4)$ (B) $(1, -4)$ (C) $(2, 4)$ (D) $(1, 4)$

4. O 點 $(\frac{-5+7}{2}, \frac{-12+4}{2}) = (1, -4)$

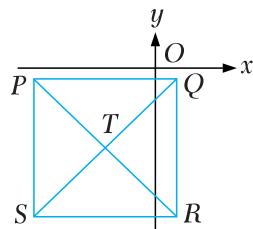
(D) 5. 如右圖，圓心 $Q(-4, 2)$ ，且直徑 \overline{AB} 垂直 x 軸，半徑為 10，則 B 點坐標 = ?

- (A) $(-4, 12)$
 (B) $(-4, -12)$
 (C) $(-4, 8)$
 (D) $(-4, -8)$

5. $2 - 10 = -8 \Rightarrow B$ 點坐標 $(-4, -8)$



- (A) 6. 如右圖，麒仲在坐標平面上畫一個正方形 PQRS，對角線 \overline{PR} 、 \overline{SQ} 交於 T 點，且 $T(-4, -8)$ ， $\overline{PQ} = 14$ ，則 P 點坐標為何呢？



- (A) $(-11, -1)$
 (B) $(11, -1)$
 (C) $(-3, -1)$
 (D) $(3, 1)$

6. $(-4-7, -8+7) = (-11, -1)$

- (C) 7. 在坐標平面上，直線 $L: y = ax + b$ 通過 $(-1, -5)$ 、 $(3, 3)$ 兩點，則 L 與 x 軸的交點坐標是下列哪一個選項？

- (A) $(\frac{2}{3}, 0)$ (B) $(0, \frac{2}{3})$
 (C) $(\frac{3}{2}, 0)$ (D) $(0, 1\frac{1}{2})$

7. $\begin{cases} -5 = -a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3$
 $\Rightarrow y = 2x - 3$, 令 $y = 0$ 代入得 $x = \frac{3}{2}$

- (B) 8. 設兩直線 $L: y = 3x - 24$ ， $M: ax = y + 4$ 的圖形交點在 x 軸上，則 $a = ?$

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 4

8. $y = 3x - 24$, 令 $y = 0$, 則 $x = 8$, 代入 $y + 4 = ax$,
 $\Rightarrow 0 + 4 = 8a, a = \frac{1}{2}$

- (A) 9. 下列何者與直線 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 不是相互平行的？

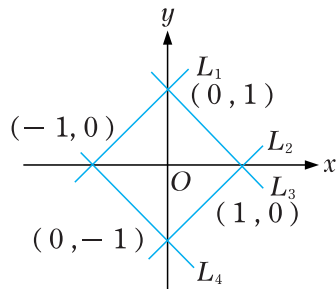
- (A) $y = 2x - 2$ (B) $y = \frac{1}{2}x + 2$ (C) $y = \frac{1}{2}x - 2$
 (D) $2y = x + 1$ (E) $2y = x - 2$

9. (A) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{2}x = -2 \\ y - 2x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{比較係數} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-\frac{1}{2}}{-2}$
 \Rightarrow 相交於一點

- (B) 10. 如右圖，哪一條直線為 $y = x - 1$ 的圖形？

- (A) L_1
 (B) L_2
 (C) L_3
 (D) L_4

10. $y = x - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \end{array} \Rightarrow$ 取 L_2



- (C) 11. $16x + 8y = 56$ 與兩軸所圍成的三角形面積是多少呢？

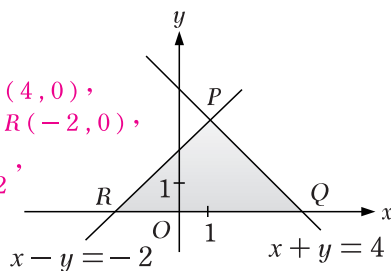
- (A) $\frac{49}{2}$ (B) $\frac{2}{49}$
 (C) $\frac{49}{4}$ (D) $\frac{4}{49}$

11. $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{7}{2} \\ y & 7 & 0 \end{array}$, 面積 $= 7 \times \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{4}$

- (D) 12. 如右圖，請問：P、Q、R 三點的坐標為何？

- (A) $P(3, 1)$ 、 $Q(0, 4)$ 、 $R(-2, 0)$
 (B) $P(1, 3)$ 、 $Q(-4, 0)$ 、 $R(2, 0)$
 (C) $P(-1, 3)$ 、 $Q(4, 0)$ 、 $R(2, 0)$
 (D) $P(1, 3)$ 、 $Q(4, 0)$ 、 $R(-2, 0)$

12. 由 $x + y = 4$ 得 $Q(4, 0)$,
 由 $x - y = -2$ 得 $R(-2, 0)$,
 再由 $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$,
 得 $x = 1, y = 3$
 $\therefore P(1, 3)$



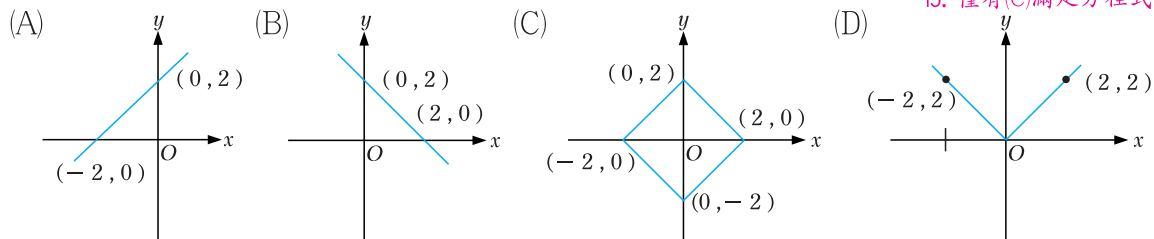
- (C) 13. 一個空水槽，可裝水 200 公升，玟羽用一水管注水入水槽，如果已知 1 分鐘注入水槽的水是 x 公升，注滿水槽需要 y 分鐘，則以 x 的函數來表示 y 可以是下列何者？

- (A) $y = 200x, x > 0$ (B) $y = \frac{200}{x}, x \geq 0$
 (C) $y = \frac{200}{x}, x > 0$ (D) $x = \frac{200}{y}, x > 0$

13. $y = f(x) = \frac{200}{x}, x > 0$

- (A) 14. 在坐標平面上，將直線 $x + 2y = 0$ 往右平行移動兩個單位後，該直線方程式為何？
 (A) $x + 2y - 2 = 0$ (B) $x + 2y = -2$ 14. $\therefore (x-2) + 2y = 0, \therefore x + 2y - 2 = 0$
 (C) $(x + 2) + 2y = 0$ (D) $y = \frac{x-2}{2}$

- (C) 15. 有一方程式為 $|x| + |y| = 2$ ，則其圖形應為下列何者？

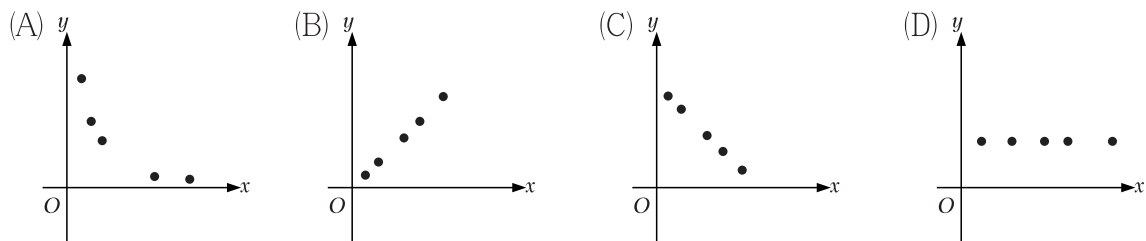


15. 僅有(C)滿足方程式

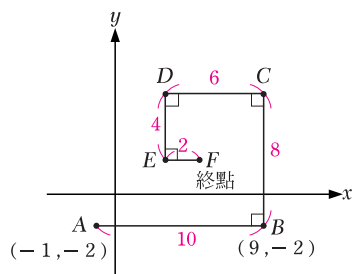


1. 袋中原有 a 球 (不變) 若每次取出 x 球 (自變數)；則袋中剩 y 球 (應變數)，則 a, x, y 的函數關係為 $y = f(x) = a - x$ (x 愈大, y 愈小) \Rightarrow 故為線型函數，圖形為一直線

- (C) 1. 阿美自一袋中取球，以每次取出數球且取後放回的方式，任取 5 次。若某次取出的球數以 x 表示；該次取球未放回前，袋內所剩的球數以 y 表示，且將每次的取球情況寫成數對 (x, y) 並畫在坐標平面上，則此圖可能是下列哪一圖形？ 97 基測二



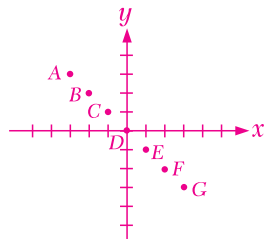
- (B) 2. 小華從右圖的 A 點出發，沿 $ABCDEF$ 路線行走。已知 A、B 兩點坐標分別為 $(-1, -2)$ 、 $(9, -2)$ ，且 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{DE} = 4$ ， $\overline{EF} = 2$ ，則終點 F 坐標為何？



- (A) $(6, 4)$ (B) $(5, 2)$ 97 基測二
 (C) $(4, 1)$ (D) $(2, 1)$
2. $C(9, -2+8) \Rightarrow C(9, 6)$
 $D(9-6, 6) \Rightarrow D(3, 6)$
 $E(3, 6-4) \Rightarrow E(3, 2)$
 $F(3+2, 2) \Rightarrow F(5, 2)$

- (A) 3. 已知 $f(x)$ 為一次函數。若 $f(-3) > 0$ 且 $f(-1) = 0$ ，判斷下列四個式子，哪一個是正確的？ 97 基測一

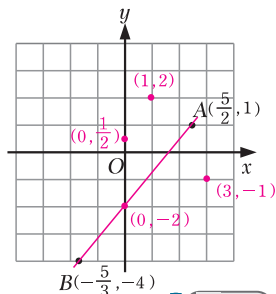
- (A) $f(0) < 0$ 3. A $(-3, f(-3))$
 (B) $f(2) > 0$ B $(-2, f(-2))$
 (C) $f(-2) < 0$ C $(-1, f(-1))$
 (D) $f(3) > f(-2)$ D $(0, f(0))$
E $(1, f(1))$
F $(2, f(2))$
G $(3, f(3))$



- (D) 4. 如右圖，坐標平面上有 $A(\frac{5}{2}, 1)$ 、 $B(-\frac{5}{3}, -4)$ 兩點。過 A、B 兩點作直線 L 後，判斷下列哪一點與直線 L 的距離最短？

- (A) $(3, -1)$
 (B) $(1, 2)$
 (C) $(0, \frac{1}{2})$
 (D) $(0, -2)$

4. 由圖可知， $(0, -2)$ 在直線 L 上，所以距離為 0，最短。

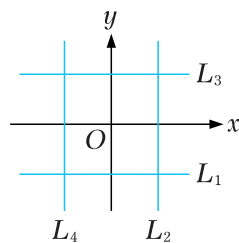


96 基測二

(A) 5. 右圖是四直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 在坐標平面上的位置，其中有一條直線為方程式 $y + 4 = 0$ 的圖形，求此方程式圖形為何？

- (A) L_1
(B) L_2
(C) L_3
(D) L_4

5. $y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4$
 \Rightarrow 圖形通過 y 軸坐標 -4 的位置

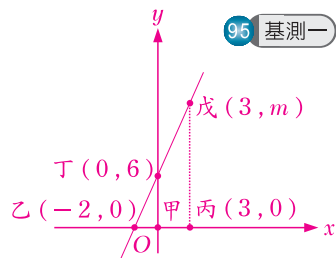


96 基測一

(C) 6. 甲、乙、丙、丁、戊五人各站在不同的位置。已知乙在甲的正西方 2 公尺處，丙在甲的正東方 3 公尺處，丁在甲的正北方 6 公尺處。若戊在丙的正北方 m 公尺處，使得乙、丁、戊的位置恰在一直線上，則 $m = ?$

- (A) 9
(B) 12
(C) 15
(D) 18

6. 設此直線為 $y = ax + b$
 $\begin{cases} 6 = 0 + b \\ 0 = -2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = 3 \end{cases}$
 $\Rightarrow y = 3x + 6$, 代入 $(3, m)$ 得 $m = 15$



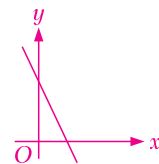
95 基測一

(C) 7. 在坐標平面上，直線 L 的方程式為 $y = -3x + a$ 。若 $a > 0$ ，則 L 不通過第幾象限？

- (A) 一 (B) 二
(C) 三 (D) 四

7. 圖形交於 x^+ 軸、 y^+ 軸

x	0	$\frac{a}{3}$
y	a	0



95 基測一



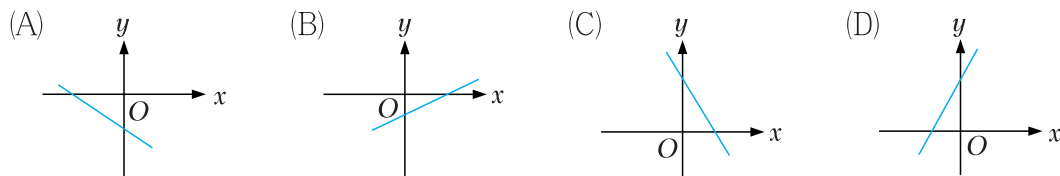
(C) 1. 甲： $y = \frac{500}{x}$ ，乙： $3x - 9y = 0$ ，丙： $y = x$ ，丁： $y = 2x^2$ ，戊： $y = 3x + 1$ ，上述五個函數中，函數圖形通過原點的有幾個？

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

1. 乙、丙、丁共 3 個，甲函數中的 x 不可為 0

(C) 2. 何者是 $y = -2x + 8$ 的圖形？

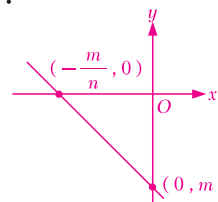
2. $\frac{x}{y} \mid \frac{0}{8} \mid \frac{4}{0}$ ，通過一、二、四象限



(D) 3. 函數 $y = nx + m$ 的圖形通過二、三、四象限，則下列何者正確？

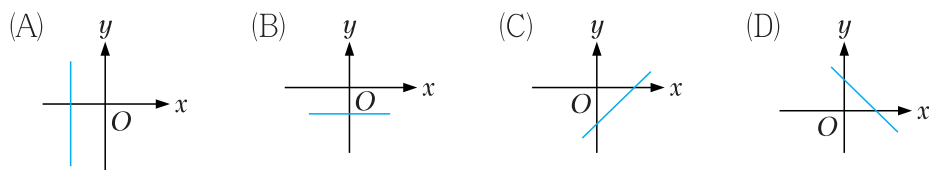
- (A) $m > 0, n > 0$
(B) $m > 0, n < 0$
(C) $m < 0, n > 0$
(D) $m < 0, n < 0$

3. $\frac{x}{y} \mid \frac{0}{m} \mid \frac{-m/n}{0}$
 $m < 0, -\frac{m}{n} < 0 \Rightarrow n < 0$



(A) 4. 下列何者不是線型函數的圖形？

4. 鉛直線非函數圖形



(D) 5. 若 (a, b) 為 $y = -2x + 4$ 與 $y = 5x - 15$ 兩函數圖形的交點，則 (a, b) 表示的點應為何？又其位於第幾象限呢？

- (A) $(\frac{19}{7}, \frac{10}{7})$ ，第一象限
 (B) $(-\frac{19}{7}, \frac{10}{7})$ ，第二象限
 (C) $(-\frac{19}{7}, -\frac{10}{7})$ ，第三象限
 (D) $(\frac{19}{7}, -\frac{10}{7})$ ，第四象限
5. $\begin{cases} y = -2x + 4 \cdots \textcircled{1} \\ y = 5x - 15 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ ②代入①， $5x - 15 = -2x + 4$
 $7x = 19, x = \frac{19}{7}$ ，代入② $y = 5x - 15 = 5 \times \frac{19}{7} - 15 = -\frac{10}{7}$ ，
 \therefore 交點 $(\frac{19}{7}, -\frac{10}{7})$ ，第四象限

(A) 6. 在同一坐標平面上，有兩函數 $y = -6x + 8$ 與 $y = -6x + 4$ ，請問：此兩直線方程式有何關係呢？

- (A) 平行 (B) 垂直 (C) 相交於一點 (D) 相交於兩點
6. $\begin{cases} y = -6x + 8 \\ y = -6x + 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-6}{-6} \neq \frac{8}{4}$ ，兩直線平行

(D) 7. 假設 $A(a, a + 18)$ 、 $B(-2, 6)$ 、 $C(7, 5)$ 三點共線，請問： a 值為何呢？

- (A) 9 (B) -9
 (C) 11 (D) -11
7. 令直線方程式 $y = ax + b$ 將 $(7, 5)$ 、 $(-2, 6)$ 代入 $\Rightarrow \begin{cases} 5 = 7a + b \\ 6 = -2a + b \end{cases}$
 \Rightarrow 得 $a = \frac{-1}{9}, b = \frac{52}{9}$ ，將 $(a, a + 18)$ 代入 $y = \frac{-1}{9}x + \frac{52}{9}$
 $\Rightarrow 9(a + 18) = -a + 52 \Rightarrow$ 得 $a = -11$

(C) 8. 設 a, b 為實數，且 $ab \neq 0$ ，若方程式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 所表示的圖形不通過第四象限，請問： $(a - b, ab)$ 在第幾象限呢？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四
8. \therefore 圖形不通過第四象限 $\therefore a < 0, b > 0$
 $\Rightarrow a - b < 0, ab < 0 \Rightarrow$ 在第三象限

(B) 9. 根據自然課本所提到的溫度變化，由地面算起，每升高 100 公尺，氣溫下降 0.6°C ，若目前地面上的溫度是 26°C ，海拔 x 公尺的高山上是 $y^\circ\text{C}$ 。請根據題意寫出 y 與 x 的關係並求出在海拔 3000 公尺的高山上氣溫多少 $^\circ\text{C}$ ？

- (A) $y = 26 + 0.006x, 18^\circ\text{C}$ (B) $y = 26 - 0.006x, 8^\circ\text{C}$
 (C) $y = 26 + 0.06x, 18^\circ\text{C}$ (D) $y = 26 - 0.06x, 8^\circ\text{C}$
9. (1) $y = 26 - \frac{0.6}{100}x \Rightarrow y = 26 - 0.006x$
 (2) $y = 26 - 0.006x$ ，將 $x = 3000$ 代入 $\Rightarrow y = 26 - 0.006 \times 3000 = 8(^\circ\text{C})$

(C) 10. 喜樂國中第二次段考數學成績低落，史老師利用線型函數 $y = ax + b$ 來提高全班的數學成績，小樂原本考 85 分，提高後變成 100 分，大宏原本考 51 分提高後成為 64 分，請問：詩涵提高後分數是 46 分，詩涵原本考幾分？

- (A) 32 (B) 33 (C) 34 (D) 35
10. 原本考 x 分，調整後成為 y 分
 $y = ax + b$ 得 $\begin{cases} 85a + b = 100 \cdots \textcircled{1} \\ 51a + b = 64 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ ，① - ② 得 $34a = 36, a = \frac{18}{17}$ 代入①，
 $90 + b = 100, b = 10 \Rightarrow y = \frac{18}{17}x + 10$
 提高後分數 $y = 46, 46 = \frac{18}{17}x + 10, \frac{18}{17}x = 36, x = 36 \times \frac{17}{18} = 34$ (分)

(C) 11. 直角坐標平面上有三條直線 $L_1: y = 2x - 4, L_2: x = 3, L_3: ax + 2y = 16$ 有共同的交點，則 $a = ?$

- (A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4
11. 因為 L_1, L_2 有共同的交點，即聯立方程式 $\begin{cases} y = 2x - 4 \cdots \textcircled{1} \\ x = 3 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 有共同的解
 將②式代入①式得： $y = 2 \times 3 - 4 = 2$ ，故 L_1, L_2 的交點為 $(3, 2)$ ，
 又 L_3 亦通過該點，即 $(3, 2)$ 亦為方程式 $ax + 2y = 16$ 的解，
 所以 $3a + 2 \times 2 = 16, 3a = 12, a = 4$

(A) 12. 假設 $\begin{cases} (m - 3)x - 3y = 8 \\ 4x + (n - 1)y = 16 \end{cases}$ 兩直線方程式圖形重合，請問： $m - n = ?$

- (A) 10 (B) -10 (C) 5 (D) -5
12. $\frac{m - 3}{4} = \frac{-3}{n - 1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 5, n = -5, m - n = 10$

第 7 單元

比與比例式

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★★☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

89

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. 若 $a : b$ 成立, 則 $a^2 : ab = a : b$ 。

💡 $a : b$ 成立, a 為任意數, 若 $a = 0$, 則 $a^2 = 0$, $ab = 0$, 但 $0 : 0$ 無意義!

能力一

(X) 2. 若 $a \times b \neq 0$, 且 $a : b = m : 1$, $b : a = n : 1$, 則 $m \div n = 1$ 。

💡 $m \div n = \frac{a}{b} \div \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

(X) 3. 汽油降價 10% 後, 又漲價 10%, 新價與舊價的比值為 1。

💡 令舊價為 a , 則新價為 $(a - 0.1a)(1 + 0.1) = 0.99a$, $\frac{\text{新價}}{\text{舊價}} = \frac{0.99a}{a} = 0.99 = \frac{99}{100}$

(X) 4. 若 y 與 x 成反比, 當 x 值減少 25% 時, 則 y 為原來的 $\frac{3}{4}$ 。

💡 $xy = k$, x 減少 25% $\Rightarrow x$ 為原來的 $\frac{3}{4} \Rightarrow y$ 變為原來 $\frac{4}{3}$

能力二

(O) 5. 速度公式: 距離 (s) = 速度 (v) \times 時間 (t), 可知當速度 (v) 不變時, 距離 (s) 與時間 (t) 成正比。

💡 $s = v \times t \Rightarrow s$ 與 t 成正比; s 與 v 成正比; v 與 t 成反比

(X) 6. 若 $a : b : c = 3 : 5 : 8$, 則 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = 8 : 5 : 3$ 。

💡 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{8} = 40 : 24 : 15$

(X) 7. 若 $3a = 6b = 2c$, 則 $a : b : c = 2 : 3 : 6$ 。

💡 $3a = 6b = 2c = k \Rightarrow a = \frac{k}{3}, b = \frac{k}{6}, c = \frac{k}{2} \Rightarrow a : b : c = 2 : 1 : 3$

(X) 8. 若 $a : b = 4 : 5$, 則可設 $a = 4$, $b = 5$ 代入式子運算即可。

💡 將 a 、 b 以純數字代入運算在觀念上是錯誤的, 應設 $a = 4r, b = 5r$ 才可

(O) 9. 若 $a > b > 0$, 且直角三角形三邊長為 $a - b$ 、 a 、 $a + b$, 則 $\frac{a}{b} = 4$ 。

💡 $(a + b)^2 = (a - b)^2 + a^2 \Rightarrow 4ab = a^2 \Rightarrow a = 4b \Rightarrow \frac{a}{b} = 4$

(O) 10. 若 $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$, 則 $a : d = 15 : 48$ 。

💡 $a : b : c : d$
 $\frac{1}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{4}$
 $\frac{3}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{8}$
 $\frac{5}{15} \quad \frac{6}{30} \quad \frac{4}{40} \quad \frac{6}{48}$
 $\Rightarrow a : d = 15 : 48$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 比與比值

一 比的定義

假設 a 、 b 為同類量（相同單位）的任意兩實數，將 a 、 b 的比寫成 $a:b$ ，「 a 」為比的前項；「 b 」為比的後項且後項不可為 0 ($b \neq 0$)。

二 比的性質

1. 比的乘、除性質

比的前項與後項「同乘」或「同除」一個不為 0 的數，其值不變。

例 1 : $a:b = a \times m : b \times m = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} \quad (m, n \neq 0)$

2. 比值

比的前項 (a) 除以後項 (b) 所得的商即為「比值 ($\frac{a}{b}$)」；比值常用分數型式表示（且要以最簡分數或整數表示），另外比值是同類量相除的結果，故比值沒有單位。

3. 比與比值的迷思概念

(1) 「比」是除法概念的延伸，所以僅在前項與後項「同乘」或「同除」一個不為 0 的數時，其值不變；但是，比的前項與後項「同加」或「同減」一個不為 0 的數時，其值會改變！

(2) 假設 $a:b$ 且 $b \neq 0$ 時，請注意下列情形：

① $a:b = a \times b : b \times b = ab : b^2$

例如： $2:7 = 2 \times 7 : 7 \times 7 = 14:49$

② $a:b = a \times a : b \times a = a^2 : ab$ (不一定成立！當 $a = 0$ 時，不成立)

例如： $\begin{cases} 2:7 = 2 \times 2 : 2 \times 7 = 4:14 \text{ (成立)} \\ 0:7 = 0 \times 0 : 0 \times 7 = 0:0 \text{ (不成立, } \because 0:0 = \frac{0}{0} \text{ 無意義)} \end{cases}$

③ $a:b = a \times a : b \times b = a^2 : b^2$ (僅在 $a = b$ 時才成立)

師說 1

<比與比值>

演練 1

(1) 若 $a = 2$ 、 $b = 5$ ，則 $\frac{(a-b)^2}{ab} : \frac{ab}{(a+b)^2}$ 的比為何？又比值為何呢？

解

$$(1) \frac{(2-5)^2}{2 \times 5} : \frac{2 \times 5}{(2+5)^2} \Rightarrow \frac{9}{10} : \frac{10}{49} \\ \Rightarrow 441 : 100 \Rightarrow \text{比值} = \frac{441}{100}$$

(1) 若 $(x-7):(y+5) = \frac{1}{4}$ ，且 $x \neq 0$ ，求 $(2y+66):6x$ 的比為何？

解

$$(1) \frac{(x-7)}{(y+5)} = \frac{1}{4}, \\ 4x - 28 = y + 5, 4x = y + 33, \\ 2y + 66 : 6x = 2(y + 33) : 6x = 2(4x) : 6x \\ = \underline{4:3}$$

- (2) 設 $a、b、c、d$ 四數中， $3a = 4b, 5c = 6d$ ，
試求 $\frac{3bd - 2ac}{ac + bd} = ?$
- (3) 一圓與一正方形的周長均相等，則其面積比為何？

●解

- (2) 令 $a = 4r, b = 3r, c = 6r, d = 5r$ ，
 $\frac{3(3r)(5r) - 2(4r)(6r)}{(4r)(6r) + (3r)(5r)} = -\frac{3}{39} = -\frac{1}{13}$
- (3) 令正方形邊長為 a
 $4a = 2\pi r, r = \frac{2a}{\pi}$
 $a^2 : (\frac{2a}{\pi})^2 \pi = a^2 : \frac{4a^2}{\pi} = \underline{\underline{\pi : 4}}$

- (2) 設 $a、b、c、d$ 四數中， $7a = 8b, 9c = 11d$ ，
試求 $(a^2 + b^2) : (c^2 - d^2) = ?$
- (3) 將兩塊相同的圓形 *pizza* 的平均分成 10 塊與 8 塊，然後各取一塊，則這 2 小塊的面積比為何？

●解

- (2) 令 $a = 8r, b = 7r, c = 11r, d = 9r$ ，
 $(64r^2 + 49r^2) : (121r^2 - 81r^2) = \underline{\underline{113 : 40}}$
- (3) $\frac{1}{10} : \frac{1}{8} = \underline{\underline{4 : 5}}$

同步評量 1

- (B) 1. 試求 2 分鐘 : 50 秒的比值為何呢？
(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{5}$ (C) $\frac{1}{25}$ (D) $\frac{13}{5}$ 1. 2 分鐘 : 50 秒 = 2×60 秒 : 50 秒 = $120 : 50 = 12 : 5$
 \therefore 比值為 $\frac{12}{5}$
- (B) 2. 請問 $m^2n^3 : mn$ ($m, n \neq 0$) 的比值為下列何者？
(A) mn (B) mn^2 (C) m^2n (D) m^2n^2 2. 比值 = $\frac{m^2n^3}{mn} = mn^2$
- (C) 3. 有一個長方形，其長 : 寬 = 4 : 3，已知寬為 90 公分，求此長方形的長為多少公分？
(A) 100 (B) 110 (C) 120 (D) 130 3. 長 : 寬 = 4 : 3 \Rightarrow 長 : 90 = 4 : 3
 \Rightarrow 長 = $\frac{90 \times 4}{3} = 120$
- (D) 4. 一食鹽水溶液有 600 公克，如果食鹽重量與水重量比是 3 : 197，請問食鹽有幾公克？水有幾公克呢？
(A) 鹽 6 公克；水 594 公克
(B) 鹽 7 公克；水 593 公克
(C) 鹽 8 公克；水 592 公克
(D) 鹽 9 公克；水 591 公克 4. $\frac{\text{食鹽}}{\text{食鹽水}} = \frac{3}{200} \Rightarrow \frac{\text{食鹽}}{600} = \frac{3}{200} \Rightarrow \text{食鹽} = \frac{3 \times 600}{200} = 9$ (克)
水 = $600 - 9 = 591$ (克)

能力

比例式與連比例

一 比例式的意義

若 $a : b = c : d$ ($b \neq 0, d \neq 0$) 成立，則稱 $a : b$ 及 $c : d$ 的比相等或比值相同；同時我們稱 a 和 d 為外項， b 和 c 為內項，這樣的式子稱為**比例式**。

例2 : $1 : 2$ 的比值為 $\frac{1}{2}$ ， $5 : 10$ 的比值為 $\frac{1}{2} \Rightarrow 1 : 2 = 5 : 10$

二 比例式的運算

1. 內項乘積 = 外項乘積

$$\begin{array}{c}
 b \times c \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a : b = c : d \Rightarrow a \times d = b \times c \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a \times d
 \end{array}$$

2. 等號兩邊交叉相乘

$$\begin{array}{l}
 a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\
 \Rightarrow a \times d = b \times c
 \end{array}$$

三 連比例式的意義

若 $xyz \neq 0$ 、 $abc \neq 0$ 則 $x : y : z = a : b : c$ 或 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 稱為連比例式。

四 連比例式的運算

1. 見「比」設 r

$x : y : z = a : b : c$	$\begin{cases} x = ar \\ y = br \\ z = cr \end{cases}$
$x : y : z = ar : br : cr$	

2. 見「=」設 k

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$	$\begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$
$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$	

3. 連比的合併

已知 $a : b$ 及 $b : c$ 時，要合併為連比，先找出相同的「項」，並求其最小公倍數，再擴分後合併，請見以下說明：

例3：假設 $a : b = 3 : 5$ 且 $b : c = 4 : 7$ ，求 $a : b : c = ?$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} a : \underbrace{b} = 3 : \underbrace{5} \\ \underbrace{b} : c = \underbrace{4} : 7 \end{array} \right\} \Rightarrow [5, 4] = 20 \Rightarrow \begin{array}{l} a : b : c \\ 3 \times 4 : 5 \times 4 \\ \underline{4 \times 5 : 7 \times 5} \\ 12 : 20 : 35 \end{array} \\
 \Rightarrow a : b : c = 12 : 20 : 35
 \end{array}$$

五 比例分配

若 $a : b = m : n$ 且 $a + b = p$ ，則 $a = \frac{m}{m+n} \times p$ ， $b = \frac{n}{m+n} \times p$ 。

六 正比與反比

1. 正、反比例式

正比	設 k 為定數，若 y 與 x 成正比	$y = kx$
反比	設 k 為定數，若 y 與 x 成反比	$xy = k$

2. 反比性質（當 x 、 y 、 z 皆不為零時）

(1) $x : y$ 的反比為 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ 或 $y : x$

(2) $x : y : z$ 的反比為 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$ 或 $yz : xz : xy$ ，而非 $z : y : x$ （請注意）。

師說 2

〈比例式〉

演練 2

1. 若 $(x-3):6=(x+7):7$ ，請問 $x=?$
2. $5:7=a:14=15:b$ ，請問： $a+b=?$
3. $(x+2):(y+3)=2:3$ ，且 $x+y=30$ ，試求 $x、y$ 為何？

解

1. $(x-3):6=(x+7):7$
 $\Rightarrow 6(x+7)=7(x-3)$
 $\Rightarrow 6x+42=7x-21$
 $\Rightarrow 42+21=x, x=63$
2. $5:7=a:14 \Rightarrow a=10$
 $5:7=15:b \Rightarrow b=21$
 $\Rightarrow a+b=10+21=31$
3. $(x+2):(y+3)=2:3$
 $\Rightarrow 3x+6=2y+6$
 $\Rightarrow 3x=2y \Rightarrow x:y=2:3$
 設 $x=2r, y=3r, x+y=5r=30 \Rightarrow r=6$
 $\therefore x=12, y=18$

1. 若 $(x-6):(y+3)$ 的比值為 $\frac{2}{5}$ ，且 $y \neq -3$ ，試求 $(5x-36):6y$ 的比與比值為何呢？
2. 若 $\frac{3}{14}:\frac{|2x|}{5}=6:7$ ，請問： $x=?$
3. 若 $(4y-7x):(3x+y)=1:2$ ，請問： $x^2:y^2=?$

解

1. $(x-6):(y+3)=2:5$
 $\Rightarrow 2(y+3)=5(x-6)$
 $\Rightarrow 2y+6=5x-30 \Rightarrow 2y=5x-36$
 $\Rightarrow (5x-36):6y=2y:6y=1:3$
 \Rightarrow 比值 $=\frac{1}{3}$
2. $\frac{3}{14}:\frac{|2x|}{5}=6:7 \Rightarrow 6 \times \frac{|2x|}{5} = 7 \times \frac{3}{14}$
 $\Rightarrow |2x| = \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{4}$
 $\Rightarrow 2x = \pm \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{8}$
3. $(4y-7x):(3x+y)=1:2$
 $\Rightarrow 8y-14x=3x+y \Rightarrow 7y=17x$
 $x:y=7:17 \Rightarrow x^2:y^2=49:289$

師說 3

〈連比例〉

演練 3

1. 若 $x:y=3:2, y:z=7:5$ ，請問： $x:y:z=?$
2. 若 $a:b=1:5, b:c=4:3$ ，請問：
 (1) $a:b:c=?$ (2) $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=?$

解

1. $x : y : z$
 $3 : 2$
 $7 : 5$
 $3 \times 7 : 7 \times 2 : 5 \times 2 \Rightarrow 21 : 14 : 10$
 $\Rightarrow x : y : z = 21 : 14 : 10$
2. (1) $a : b : c$
 $1 : 5$
 $4 : 3$
 $1 \times 4 : 5 \times 4 : 5 \times 3 \Rightarrow 4 : 20 : 15$
 $\Rightarrow a : b : c = 4 : 20 : 15$
 (2) $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{1}{4}:\frac{1}{20}:\frac{1}{15}=\underline{15:3:4}$

1. 若 $a:b=\frac{3}{2}:\frac{2}{3}, b:c=5\frac{1}{4}:4\frac{1}{5}$ ，請問： $a:b:c=?$
2. 若 $a:b=0.7:0.9, b:c=0.3:0.8$ ，請問： $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=?$

解

1. $a:b=9:4, b:c=5:4$
 $a:b:c=(9 \times 5):(4 \times 5):(4 \times 4)$
 $=45:20:16$
2. $a:b=\frac{7}{10}:\frac{9}{10}=7:9,$
 $b:c=\frac{3}{10}:\frac{8}{10}=3:8$
 $a:b:c=7:9:24$
 $\Rightarrow \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{1}{7}:\frac{1}{9}:\frac{1}{24}=\underline{72:56:21}$

師說 4

〈連比例式〉

演練 4

- 若 $x : y : z = 3 : 4 : 5$ ，請問： $(x + 2y + 3z) : (x + 2y - 3z) = ?$
- 若 $xyz \neq 0$ ，且 $2x = 3y = 5z$ ，則 $x : y : z = ?$

解

- 設 $x : y : z = 3 : 4 : 5 \leftarrow [\text{看到比設 } r]$
 $x = 3r, y = 4r, z = 5r$
 $(x + 2y + 3z) : (x + 2y - 3z)$
 $= (3r + 8r + 15r) : (3r + 8r - 15r)$
 $= 26r : (-4r) = \underline{13 : (-2)}$
- $2x = 3y = 5z \leftarrow [\text{看到等號設 } k]$
 $2x = 3y = 5z = k$
 $\Rightarrow x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{5}$
 $x : y : z = \frac{k}{2} : \frac{k}{3} : \frac{k}{5} = 15k : 10k : 6k$
 $= \underline{15 : 10 : 6}$

- 若 $3x : 4y : 5z = 6 : 7 : 8$ ，請問： $(x + y) : (y + z) : (z + x) = ?$
- 若 $xyz \neq 0$ ，且 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z$ ，請問： $(x + y) : (y + z) : (z + x) = ?$

解

- $3x : 4y : 5z = 6 : 7 : 8 \leftarrow [\text{看到比設 } r]$
 $3x : 4y : 5z = 6r : 7r : 8r$
 $\Rightarrow x : y : z = \frac{6}{3}r : \frac{7}{4}r : \frac{8}{5}r$
 $= 2r : 1.75r : 1.6r = 40 : 35 : 32$
 $x = 40r, y = 35r, z = 32r$
 $(x + y) : (y + z) : (z + x)$
 $= (40r + 35r) : (35r + 32r) : (32r + 40r)$
 $= \underline{75 : 67 : 72}$
- $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z \leftarrow [\text{看到等號設 } k]$
 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z = k$
 $\Rightarrow x = 4k, y = 2k, z = 3k$
 $(x + y) : (y + z) : (z + x)$
 $= (4k + 2k) : (2k + 3k) : (3k + 4k)$
 $= \underline{6 : 5 : 7}$

師說 5

〈正比與反比〉

演練 5

- 從 A 鎮到 B 鎮，甲 $3\frac{1}{3}$ 小時可到達，乙 $5\frac{1}{5}$ 小時可到達，則甲、乙兩人速率的比為何？
- 若腳踏車速率一定，當騎行 S 公里時，費時 T 小時，若以 x 表示距離，y 表示時間，其關係式為何？

解

- 距離相同，則速率與時間成反比，
 時間比 $= 3\frac{1}{3} : 5\frac{1}{5} = 25 : 39$ ，
 則速率比 $= \underline{39 : 25}$
- 時速 $= \frac{S}{T}$ ， $x = \underline{\frac{S}{T}y}$

- 嘉愷走路經過一山坡，上坡時每分鐘 30 公尺，下坡每分鐘 45 公尺，上下坡共花費了 60 分鐘，請問：此山坡的路長為何呢？
- 已知圓面積與其半徑的平方成正比，今有一圓，半徑為 r，其面積為 12 平方單位，若一圓半徑為 2r 時，其圓面積為多少平方單位？

解

- 上、下坡所費的時間與速率成反比
 $\Rightarrow \frac{1}{30} : \frac{1}{45} = 3 : 2$ ，
 山坡長 $= 30 \times (60 \times \frac{3}{5}) = \underline{1080}$ (公尺)
- 圓面積為 A、半徑為 r
 $\therefore A = kx^2 (k \neq 0) \Rightarrow 12 = kr^2 \dots \textcircled{1}$
 當 $x = 2r$ 時， $A = k(2r)^2 = 4kr^2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 代入 $\textcircled{2} A = 4 \times 12 = \underline{48}$ 平方單位

同步評量 2

- (C) 1. 若 a 、 b 都是正數，且 $5a = 2b$ ，下列各敘述何者正確？
 (A) $a > b$ (B) $a : b = 5 : 2$ (C) $a : b = 2 : 5$ (D) $\frac{a}{5} = \frac{b}{2}$
 1. $5a = 2b \Rightarrow a : b = 2 : 5 \Rightarrow a < b$
- (B) 2. 若 $(2x + 3) : 5 = (3x - 15) : 6$ ，試求 x 的值為何呢？
 (A) 21 (B) 31 (C) 69 (D) 96
 2. $(2x + 3) : 5 = (3x - 15) : 6 \Rightarrow 15x - 75 = 12x + 18 \Rightarrow 3x = 93, x = 31$
- (D) 3. 已知 $a : b = 3 : 4$ ， $b : c = 2 : 5$ ，求連比 $a : b : c = ?$
 (A) $46 : 52 : 71$ (B) $23 : 24 : 20$ (C) $13 : 14 : 10$ (D) $3 : 4 : 10$
 3. $a : b = 3 : 4, b : c = 2 : 5 \Rightarrow a : b : c = 3 : 4 : 10$
- (C) 4. 設 $x : y : z = 2 : 5 : 6$ ，且 $[x, y, z] = 60$ ，則 $3x + y - z = ?$
 (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11
 4. 設 $x = 2r, y = 5r, z = 6r, \therefore [2r, 5r, 6r] = 60 \Rightarrow 30r = 60, r = 2, \therefore x = 4, y = 10, z = 12, \text{故 } 3x + y - z = 12 + 10 - 12 = 10$
- (A) 5. 若甲的體重比乙的體重是 $5 : 4$ ，丙的體重比乙的體重是 $3 : 4$ ，丁的體重比乙的體重是 $35 : 36$ ，請問四人中誰最重？
 (A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁
 5. 甲 : 乙 = $5 : 4$ ，丙 : 乙 = $3 : 4$ ，丁 : 乙 = $35 : 36$
 乙 : 甲 = $4 : 5 = 36 : 45$ ，乙 : 丙 = $4 : 3 = 36 : 27$ ，乙 : 丁 = $36 : 35$ ，所以甲最重
- (D) 6. 下列何式表示 x 與 y 成反比？
 (A) $2x - 4y = 7$ (B) $x - 5y = 0$ (C) $\frac{y}{x} = 5$ (D) $3xy + 5 = 0$
 6. $3xy + 5 = 0, 3xy = -5, xy = -\frac{5}{3}, \therefore x$ 與 y 成反比



基本觀念題

- (D) 1. 若 a 、 b 、 c 均不為 0。已知 $\frac{5}{a} = \frac{4}{b} = \frac{9}{c}$ ，求連比 $a : b : c$ 為何呢？
 (A) $2 : 5 : 9$ (B) $4 : 5 : 9$ (C) $9 : 4 : 5$ (D) $5 : 4 : 9$
 1. $\therefore \frac{5}{a} = \frac{4}{b} = \frac{9}{c} \therefore a : b : c = 5 : 4 : 9$
- (B) 2. 試求 $\frac{4}{3} : \frac{3x}{2} = 4 : 6$ 的比值為何？
 (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $1\frac{1}{4}$ (D) $1\frac{2}{3}$
 2. $\frac{4}{3} : \frac{3x}{2} = 4 : 6 \Rightarrow \frac{3x}{2} \times 4 = \frac{4}{3} \times 6 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$
- (A) 3. 已知 $a : b : c = 2 : 5 : 7$ ，求 $(a + 3b - c) : (3a - b + c)$ 的比值為何呢？
 (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{10}{3}$
 3. $a : b : c = 2 : 5 : 7, \text{令 } a = 2r, b = 5r, c = 7r$
 $[2r + 3(5r) - 7r] : [3(2r) - 5r + 7r] = 10r : 8r = \frac{5}{4}$
- (C) 4. 若 x 與 y 不為零，且 $3x = 4y$ ，求 $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2)$ 之比值為何？
 (A) $\frac{7}{25}$ (B) $-\frac{7}{25}$ (C) $\frac{25}{7}$ (D) $-\frac{25}{7}$
 4. $\therefore 3x = 4y \Rightarrow x : y = 4 : 3, \text{令 } x = 4r, y = 3r$
 $\therefore (16r^2 + 9r^2) : (16r^2 - 9r^2) = 25r^2 : 7r^2 \Rightarrow \text{比值} = \frac{25}{7}$
- (D) 5. 假設 $3a = 2b$ ， $4b = 5c$ ，則 $a : b : c = ?$
 (A) $6 : 4 : 5$ (B) $8 : 12 : 15$ (C) $10 : 12 : 18$ (D) $10 : 15 : 12$
 5. $a : b = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3, b : c = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 5 : 4 \Rightarrow a : b : c = 10 : 15 : 12$

(D) 6. 若 $\frac{3x-4}{y+15} = k$ ，當 $x=2$ 時，則 $y=3$ ，若當 $y=12$ ，則 x 為何？

- (A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{7}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{7}{3}$

$$6. k = \frac{3 \times 2 - 4}{3 + 15} = \frac{1}{9},$$

$$\text{當 } y = 12 \text{ 時, } \frac{3x - 4}{12 + 15} = \frac{1}{9}, x = \frac{7}{3}$$

(B) 7. 已知 $x、y$ 滿足表中關係：

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

，則當 $x=9$ 時， y 為下列何者？

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{2}$

7. 已知 $xy = 12$ ， $x = 9$ 代入， $9y = 12$ ， $y = \frac{4}{3}$

(C) 8. 設 $a、b$ 兩數的差、和與積之比為 $1:4:15$ ，求此兩數之和為多少？

- (A) 12
(B) 14
(C) 16
(D) 18

8. $(a-b):(a+b):ab = 1:4:15$

$$\begin{cases} a-b=r \cdots \textcircled{1} \\ a+b=4r \cdots \textcircled{2} \\ ab=15r \cdots \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \text{由 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2}r \\ b = \frac{3}{2}r \end{cases} \Rightarrow \text{代入 } \textcircled{3} \Rightarrow \frac{15r^2}{4} = 15r$$

$\therefore r \neq 0, \therefore r = 4 \Rightarrow a = 10, b = 6, a + b = 16$

(D) 9. 若 $10(b+c) = 12(c+a) = 15(a+b)$ ，求 $a:b:c = ?$

- (A) $2:5:8$
(B) $3:7:8$
(C) $2:7:9$
(D) $3:5:7$

9. 令 $10(b+c) = 12(c+a) = 15(a+b) = 120k$

$$\begin{cases} b+c=12k \cdots \textcircled{1} \\ c+a=10k \cdots \textcircled{2} \\ a+b=8k \cdots \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \text{由 } \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ 得 } 2(a+b+c) = 30k$$

$$\Rightarrow a+b+c = 15k \cdots \textcircled{4}$$

$$\Rightarrow \textcircled{4} - \textcircled{1} \Rightarrow a = 3k, \textcircled{4} - \textcircled{2} \Rightarrow b = 5k, \textcircled{4} - \textcircled{3} \Rightarrow c = 7k$$

$$\Rightarrow a:b:c = 3:5:7$$

(C) 10. 將一瓶 3600c.c. 的奇異果汁依照 $3:4:5$ 的比例分成三杯，則最大杯的奇異果汁有多少 c.c. 呢？

- (A) 900 (B) 1200 (C) 1500 (D) 1700

10. $3600 \times \frac{5}{3+4+5} = 1500 \text{ (c.c.)}$

(C) 11. 在 900 公克的水中，加入食鹽 100 公克，溶解成食鹽水溶液，請問：在此食鹽水溶液中再加入食鹽 200 公克，那麼此食鹽水溶液中「水」的重量所占的比率為多少%？

- (A) 20% (B) 25%
(C) 75% (D) 80%

11. 水所占比率 = $\frac{\text{水的重量}}{\text{食鹽水溶液的總重量}} = \frac{900}{900 + (100 + 200)} \times 100\% = 75\%$

(D) 12. 星巴克水果店準備一些裝有 5 個蘋果與 7 個水梨的水果禮盒，已知總共用了水梨 126 顆，請問：蘋果用了多少顆？

- (A) 176 (B) 167 (C) 160 (D) 90

12. $5:7 = \text{蘋果顆數}:126 \Rightarrow \text{蘋果顆數} = \frac{126 \times 5}{7} = 90 \text{ (顆)}$

(C) 13. 已知在地圖上，甲、乙兩地的距離為 1.7 公分，甲、丙兩地的距離為 2 公分。如果甲地與乙地的實際距離為 51 公里，那麼甲地與丙地的實際距離為多少公里？

- (A) 40 (B) 50
(C) 60 (D) 70

13. 設甲、丙兩地實際距離為 x ，則 $\frac{1.7}{2} = \frac{51}{x}$
 $\Rightarrow x = \frac{51 \times 2}{1.7} = 60 \text{ (公里)}$

(A) 14. 10 公斤的蘋果含鉀 1120 毫克，含鈉 7 毫克，則 10 磅的蘋果中，鉀和鈉的重量比值為何？(1 磅 = 0.45 公斤)

- (A) 160 (B) 72 (C) 356 (D) 270

14. 重量單位轉換不影響其比值，故 $\frac{\text{鉀}}{\text{鈉}} = \frac{1120}{7} = 160$

(A) 15. 過年時，爸媽要粉刷牆壁，爸爸用 9 罐白漆與 6 罐紅漆調和，媽媽用 14 罐白漆與 10 罐紅漆調和，試問誰調和的漆比較淺呢？

- (A) 爸爸 (B) 媽媽
(C) 一樣深淺 (D) 要實際調和才知，無法用算的

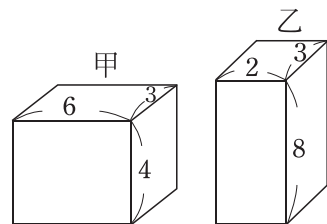
15. 爸爸： $6:9 \Rightarrow$ 比值 $\frac{2}{3}$ ，
媽媽： $10:14 \Rightarrow$ 比值 $\frac{5}{7}$
 $\Rightarrow \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$ ，爸爸調的比較淺



(C) 1. 若 $a:b = 3:2$, $b:c = 5:4$, 則 $a:b:c = ?$ $\frac{a:b = 3:2}{b:c = 5:4} \Rightarrow \frac{a:b:c = 15:10:8}$ 97 基測一
 (A) $3:2:4$ (B) $6:5:4$ (C) $15:10:8$ (D) $15:10:12$

(A) 2. 二年級學生共有 540 人, 某次露營有 81 人沒有參加, 則沒參加露營人數和全部二年級學生人數的比值為何? 97 基測一
 (A) $\frac{3}{20}$ (B) $\frac{20}{17}$ (C) $\frac{17}{20}$ (D) $\frac{3}{17}$ 2. 比值 = $\frac{81}{540} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$

(B) 3. 右圖為甲、乙兩個長方體, 依圖中所給的邊長長度(單位: 公分), 計算甲體積與乙體積的比值為何?
 (A) 1
 (B) 1.5
 (C) 2
 (D) 2.5



3. $\frac{\text{甲體積}}{\text{乙體積}} = \frac{6 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 8} = \frac{3}{2} = 1.5$

96 基測二

(C) 4. 已知甲、乙、丙三人的錢數比為 $3:5:6$ 。若丙分別給甲、乙兩人各 30 元後, 甲、乙、丙的錢數比變為 $7:11:10$, 則此三人共有多少元? 96 基測二
 (A) 420 (B) 630
 (C) 840 (D) 1260

4. 設甲原有 $3r$ 元, 乙原有 $5r$ 元, 丙原有 $6r$ 元。
 $(3r+30):(5r+30):(6r-60) = 7:11:10$,
 由 $(3r+30):(5r+30) = 7:11$ 得 $r = 60$,
 三人共有 $3r+5r+6r = 14r = 14 \times 60 = 840$

(D) 5. 兩個罐子裝有相同重量的酒精溶液, 其中水與酒精的重量比分別為 $3:1$ 和 $1:1$, 若將這兩罐溶液全倒入一個較大的容器中且沒有溢出, 則後來所得的混合液中, 水與酒精的重量比為何?
 (A) $2:1$ (B) $3:2$
 (C) $4:1$ (D) $5:3$

5. 設第一罐的水為 $3r$ 、酒 r , 第二罐的水 s 、酒 s 。
 混合後 \Rightarrow 水:酒 = $(3r+s):(r+s) \cdots \textcircled{1}$
 \because 兩罐重量相同, $\therefore 3r+r = s+s, s = 2r$ 代入 $\textcircled{1}$,
 水:酒 = $(3r+2r):(r+2r) = 5:3$

92 基測二

(B) 6. 某校一年級與二年級的學生人數比為 $3:2$, 已知一年級的學生中, 有 40% 視力良好, 二年級的學生中, 有 30% 視力良好。請問: 一、二年級所有學生中有多少比例的學生視力良好?
 (A) 18% (B) 36%
 (C) 57% (D) 70%

6. 設一年級有 $3x$ 人, 二年級有 $2x$ 人, 一年級視力良好的有 $3x \times 0.4 = 1.2x$, 二年級視力良好的有 $2x \times 0.3 = 0.6x$,
 \therefore 視力良好的有 $\frac{1.2x + 0.6x}{5x} = \frac{1.8x}{5x} = 0.36 \Rightarrow 36\%$

92 基測一



(D) 1. 若 $xyz \neq 0$, 且 $2x = 3y = 5z$, 則 $x:y:z = ?$ $1. x:y:z = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 15:10:6$
 (A) $3:5:2$ (B) $5:3:2$ (C) $5:6:10$ (D) $15:10:6$

(A) 2. 設 a, b, c 為整數, 且 $a:b = b:c$, 若 $a:(a+b):c = 9:x:4$, 請問: $x = ?$
 (A) 15 (B) 14 (C) 13 (D) 12 2. 設 $a = 9k, c = 4k \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{9k \times 4k} = 6k$
 $a+b = 9k+6k = 15k, x = 15$

(A) 3. 若 $a:b:c = 3:4:7$ 且 $xyz \neq 0, ax = by = cz$, 則 $x:y:z$ 與下列何者相同?
 (A) $28:21:12$ (B) $12:15:20$
 (C) $20:12:15$ (D) $15:12:20$ 3. $x:y:z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = 28:21:12$

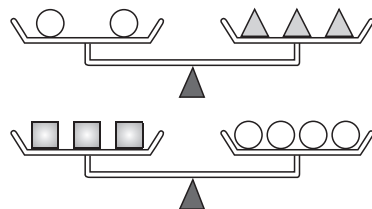
- (B) 4. 若 $x : y : z = 4 : 3 : 5$ ，且 $2x + y + 3z = 312$ ，則下列敘述何者正確？
 (A) $x = 40$ (B) $y = 36$ (C) $z = 50$ (D) $x + y + z = 192$

4. 設 $x = 4r, y = 3r, z = 5r, \therefore 8r + 3r + 15r = 312, r = 12, \therefore x = 48, y = 36, z = 60, x + y + z = 12r = 144$

- (B) 5. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 12, \overline{BC} = 18, \overline{AC} = 36$ ，設 \overline{AB} 上的高為 p, \overline{BC} 上的高為 q, \overline{AC} 上的高為 r ，則 $p : q : r = ?$
 (A) $3 : 4 : 5$ (B) $3 : 2 : 1$ (C) $6 : 3 : 4$ (D) $7 : 8 : 9$

5. $p : q : r = \frac{1}{12} : \frac{1}{18} : \frac{1}{36} = 3 : 2 : 1$
 (面積一定，底邊長和高成反比)

- (C) 6. 今有同規格但形狀有正方形、圓形、三角形三種積木，置於等臂天平兩側，呈平衡狀態，如右圖，請問：三種積木的重量比 $\square : \bigcirc : \triangle = ?$
 (A) $8 : 6 : 9$ (B) $3 : 2 : 4$ (C) $4 : 3 : 2$ (D) $9 : 12 : 8$

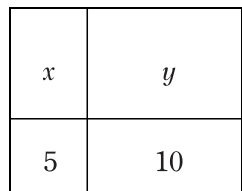


6. 設 $\square = x, \bigcirc = y, \triangle = z;$
 $2y = 3z \Rightarrow y : z = 3 : 2,$
 $3x = 4y \Rightarrow x : y = 4 : 3,$
 $\therefore x : y : z = 4 : 3 : 2$

- (B) 7. 吉米想要買一臺 2250 元的 CD 隨身聽，取出存錢筒的錢後發現仍不夠，於是他便計畫每天存 a 元，若存了 20 天後，仍不夠 450 元，存了 30 天後還差 300 元，請問： $a = ?$
 (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25

7. 由題意可知 30 天後比 20 天後多存了 150 元，可得 $a : 150 = 1 : 10 \therefore 10a = 150 \Rightarrow a = 15$

- (B) 8. 已知圖中四塊長方形的面積分別是 $x, y, 5, 10$ ，試求出 $\frac{y-x}{y+x}$ 為何呢？



8. 如圖兩塊面積 5 與 10 之圖形上側兩塊面積比是 $1 : 2 = x : y$ ，
 所以 $\frac{y-x}{y+x} = \frac{2x-x}{2x+x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

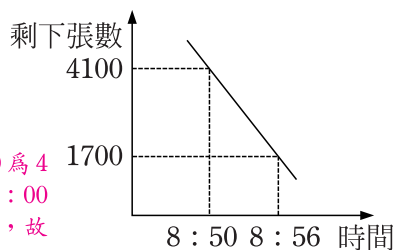
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$
 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

- (C) 9. 若 $xyz \neq 0$ ，且 $3xy = 5yz = 11xz$ ，則 $(x + y + z) : z$ 的比值為何？

- (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{2}{15}$
 (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{3}{19}$

9. $3xy = 5yz = 11xz$ 同除以 $xyz \Rightarrow \frac{3}{z} = \frac{5}{x} = \frac{11}{y}$
 $\therefore (x + y + z) : z = (5 + 11 + 3) : 3 = 19 : 3 \Rightarrow$ 比值 $\frac{19}{3}$

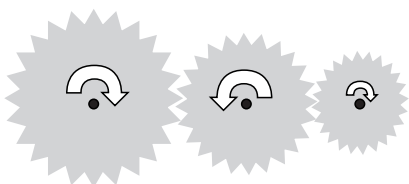
- (A) 10. 右圖為宇倫影印資料剩下張數和時間的關係圖。利用圖中所提供的數據，推估宇倫在 9:00 時影印的情形是下列哪一種？



- (A) 來不及印完
 (B) 剛好印完
 (C) 提前 1 分鐘印完
 (D) 提前半分鐘印完

10. 印的張數與時間成正比，
 $\therefore 8:50 \sim 8:56$ 為 6 分鐘， $8:56 \sim 9:00$ 為 4 分鐘， $4100 - 1700 = 2400$ ，設 $8:56 \sim 9:00$ 可印 x 張， $\therefore 2400 : 6 = x : 4 \Rightarrow x = 1600$ ，故來不及印完

- (D) 11. 如右圖，有三種齒輪，齒數分別為 186、78、24 齒，大齒輪順時針旋轉 16 圈，請問：小齒輪旋轉幾圈呢？（註：旋轉方向相同時，齒數與旋轉圈數成反比）



- (A) 118 (B) 120
 (C) 122 (D) 124

11. 旋轉方向相同，齒數與圈數成反比。
 設小齒輪旋轉圈數為 $x, \frac{16}{x} = \frac{24}{186} \Rightarrow x = 124$

第 8 單元

一元一次不等式

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★☆☆☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. 已知 $a < 7$, 則 a 的最大值為 6。

💡 a 的最大整數值才為 6

能力一

(X) 2. 若 $x > 9$, 則 $\frac{9}{x}$ 、 $\frac{9}{x+1}$ 、 $\frac{x+1}{9}$ 中, 其大小為 $\frac{9}{x+1} < \frac{x+1}{9} < \frac{9}{x}$ 。

💡 令 $x = 10$, 則 $\frac{9}{11} < \frac{9}{10} < \frac{11}{9}$, $\frac{9}{x+1} < \frac{9}{x} < \frac{x+1}{9}$

(O) 3. 若 $0 > a > -1$, 則 $\frac{1}{a} < -a^2$ 。

💡 $0 > a > -1 \Rightarrow -1 < a < 0$, a 為負的真分數, 則 $\frac{1}{a} < -a^2$

(X) 4. 若 $a > b$ 且 $c < 0$, 則 $ac > bc$ 。

💡 $\because c < 0 \therefore ac < bc$

能力二

(O) 5. 若 a 、 b 皆為整數, 且 $|a| + |b| = 5$, 則 a 值有 11 種可能。

💡 $\because |a| > 0, |b| > 0, \therefore |a| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq a \leq 5 \Rightarrow a$ 有 11 種可能

(O) 6. 若 $a < b < 0$, 則 $\frac{a}{b} > 1$ 必成立。

💡 $\because a < b < 0 \therefore |a| > |b|$, 且 $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} > 1$

(O) 7. 若 a 、 b 、 c 、 d 皆為實數, 且 $a > b$, $c > d$, 則 $a + c > b + d$ 。

💡 $\because a > b \Rightarrow a + c > b + c \cdots \cdots \textcircled{1}$ 且 $c > d \Rightarrow b + c > b + d \cdots \cdots \textcircled{2}$ 根據 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得 $a + c > b + d$

(O) 8. 若 a 與 b 均為實數, 且 $a > b$, 則 $a^3 > b^3$ 。

💡 $a < 0, b < 0, a > b \Rightarrow a^3 > b^3$; $a > 0, b < 0, a > b \Rightarrow a^3 > b^3$; $a > 0, b > 0, a > b \Rightarrow a^3 > b^3$

(O) 9. 若 $a < b$, 則 $ax - b > bx - a$ 的解為 $x < -1$ 。

💡 $\because a < b, a - b < 0 \Rightarrow ax - b > bx - a, (a - b)x < -(a - b), x < \frac{-(a - b)}{(a - b)} \Rightarrow x < -1$

能力三

(X) 10. 若 $1 < x \leq 3$, $P = \frac{-(4x - 2)}{20}$, 則 $-\frac{1}{10} < P \leq -\frac{1}{2}$ 。

💡 由 $1 < x \leq 3 \Rightarrow 4 < 4x \leq 12 \Rightarrow 2 < 4x - 2 \leq 10 \Rightarrow -\frac{1}{10} > P \geq -\frac{1}{2}$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力 — 不等式的列式

一 不等式的符號介紹

凡在數學式中出现「 $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 、 \neq 」不等號的式子，即稱為不等式。

符號	$>$	$<$	\geq	\leq	\neq
語意	大於	小於	大於等於	小於等於	不等於
	超過	未滿	不小於	不大於	不是
	高於	低於	以上(含)	以下(含)	非

二 一元一次不等式

- 一元一次不等式係指含有一個未知數的不等式，而且未知數的最高次方為一次方，型如： $ax + b < 0$ 。
- 一元一次不等式的解，通常為一個區間或範圍，若未限定「解」的性質（如：正整數、負整數等等），此範圍內的數皆為一元一次不等式的解；其解的形式如下表：

(1) $a \leq x < b$		(2) $x < a$ 或 $x \geq b$	
(3) $x \leq a$		(4) $x \geq b$	

- 不等式的列式與一元一次方程式的列式意思相同，但須考慮相關已知條件與未知數之大小關係。**提醒同學們！不要忽略題目中「未提及的條件」，因為很有可能它們也是必要的條件之一。**

例1：有一等腰三角形，已知其為鈍角三角形，求其底角的大小範圍為何呢？

解 設底角為 x° $\because x^\circ < 90^\circ \therefore 180^\circ - 2x^\circ > 90^\circ, -2x^\circ > -90^\circ, x^\circ < 45^\circ$ ，
別忘了！ $0^\circ < x^\circ < 45^\circ$

師說 1

〈滿足不等式的值〉

演練 1

下列各數 -1 、 0 、 1 、 2 、 $\frac{5}{2}$ ，哪些數滿足不等式 $5x - 7 > 2$ 呢？

解

(1) $5 \times (-1) - 7 = -12, -12 < 2$

(2) $5 \times 0 - 7 = -7, -7 < 2$

(3) $5 \times 1 - 7 = -2, -2 < 2$

(4) $5 \times 2 - 7 = 3, 3 > 2$

(5) $5 \times \frac{5}{2} - 7 = \frac{11}{2}, \frac{11}{2} > 2$

\therefore 有 2 和 $\frac{5}{2}$ 滿足 $5x - 7 > 2$

下列各數 -8 、 0 、 8 ，哪些數滿足不等式 $2(x - 3) + 3 > (x - 1) + 3$ 呢？

解

(1) $\begin{cases} 2[(-8) - 3] + 3 = -19 \\ [(-8) - 1] + 3 = -6 \end{cases}$

$\Rightarrow -19 < -6$ ，不成立

(2) $\begin{cases} 2(0 - 3) + 3 = -3 \\ (0 - 1) + 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow -3 < 2$ ，不成立

(3) $\begin{cases} 2(8 - 3) + 3 = 13 \\ (8 - 1) + 3 = 10 \end{cases} \Rightarrow 13 > 10$ ，成立

\therefore 只有 8 滿足

師說 2

〈依題意列不等式〉

演練 2

小華每天開車往返台北與新竹，全程共計 105 公里，若公路的速限規定在 $50 \sim 70 \text{ km/hr}$ (含 50、70) 之間(不含等紅燈的時間)，若在速限之內走完全程，令共花費時間為 t ，則其不等式為何？

●解

依據速度公式 $s = vt$ ， $t = \frac{s}{v}$ 可知，

$$\begin{cases} t_{\text{最短}} = \frac{105}{70} = 1.5 \text{ (小時)} \\ t_{\text{最長}} = \frac{105}{50} = 2.1 \text{ (小時)} \end{cases}$$

$\Rightarrow 1.5 \leq t \leq 2.1$

愛跑運動飲料，其營養成分的標示中，鈉離子的含量為每 1 公克有 2 ± 0.5 (毫克)，假設一罐愛跑運動飲料為 150 (公克)，令其鈉離子含量為 x (公克)，請以不等式表示。(1 公克 = 1000 毫克)

●解

假設一罐飲料的鈉離子含量為 x 公克

$$\begin{cases} \text{鈉}_{\text{最多}} = 150 \times (2 + 0.5) = 375 \text{ (毫克)} = 0.375 \text{ (公克)} \\ \text{鈉}_{\text{最少}} = 150 \times (2 - 0.5) = 225 \text{ (毫克)} = 0.225 \text{ (公克)} \end{cases}$$

$\Rightarrow 0.225 \leq x \leq 0.375 \text{ (公克)}$

同步評量 1

- 已知 $a + 3 < 0$ ， $b - 3 < 0$ ，則下列何者一定為正數呢？ (D) 。
(A) $a + 1$ (B) $a + 4$ (C) $b - 2$ (D) $-b + 5$
 - 能夠滿足 $x \geq -3$ 且 $x < -2$ 的整數 x 有多少個呢？ 1 。
2. 當 $x \geq -3$ 且 $x < -2$ 時，
 $-3 \leq x < -2$ ， $x = -3$ (1 個)
 - 在 0 ， $\frac{5}{4}$ ， $\frac{4}{3}$ 這三個數中，哪些是不等式 $-2 < 3x - 2$ 的解？ $\frac{5}{4}$ ， $\frac{4}{3}$ 。
 - 育杰的父親今年 x 歲，五年後父親還不到退休的年齡 65 歲，依敘述可列出 x 的不等式為 $x + 5 < 65$ 。
 - 啓倫買了一包洋芋片，其包裝標示重量為 30 ± 2 (克)，若以 x 表示洋芋片的實際重量的範圍，則可列出不等式為 $28 \leq x \leq 32$ 。
3. 0 代入 $3x - 2$ 得 $3(0) - 2 = -2$ ， -2 不在範圍內
 $\frac{5}{4}$ 代入 $3x - 2$ 得 $3(\frac{5}{4}) - 2 = \frac{15 - 8}{4} = \frac{7}{4}$ ， $\frac{7}{4}$ 在範圍內
 $\frac{4}{3}$ 代入 $3x - 2$ 得 $3(\frac{4}{3}) - 2 = 4 - 2 = 2$ ， 2 在範圍內

能力 不等式的性質

一 不等量的遞移性

假設有 a 、 b 、 c 三個實數，依據不等量的遞移性有下列情況：

條件	結果
(1) 當 $a > b$ 且 $b > c$	$a > c$
(2) 當 $a \geq b$ 且 $b \geq c$	$a \geq c$
(3) 當 $a \geq b$ 且 $b \geq a$	$a = b$
(4) 當 $a > b$ 且 $b > a$	矛盾 (不成立)

二 不等式的運算性質

假設 $a > b$ ，依據不等量公理，有下列情形：

(1) $a + c > b + c$

(2) $a - c > b - c$

(3) 當 $c > 0$ 時 $\Rightarrow \begin{cases} a \times c > b \times c \\ a \div c > b \div c \end{cases}$

(4) 當 $c < 0$ 時 $\Rightarrow \begin{cases} a \times c < b \times c \\ a \div c < b \div c \end{cases} \Rightarrow$ (乘除負數時「不等號」要變向)

三 一元一次不等式的圖解

不等式	(1) $x > k$	(2) $x \geq k$	(3) $x < k$	(4) $x \leq k$
圖例				
不等式	(5) $ x \geq k$ 且 $k \geq 0 \Leftrightarrow x \geq k$ 或 $x \leq -k$		(6) $ x \leq k$ 且 $k \geq 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$	
圖例				

師說 3 <不等量的遞移性>

演練 3

假設有 a 、 b 、 c 三個正整數及 x 、 y 、 z 三個負整數，已知 b 大於 a ，而 c 不大於 a ，又 x 小於 y ，且 y 不大於 z ，請問： b 、 c 及 x 、 z 的大小關係。

解

(1) $\because b > a$ 且 $a \geq c \quad \therefore \underline{b > c}$

(2) $\because x < y$ 且 $y \leq z \quad \therefore \underline{x < z}$

假設 a 、 b 、 c 是三個正數，若 $a = \frac{1}{3}b$ ， $b = \frac{1}{2}c$ ，試比較此三數的大小關係。

解

$\because a = \frac{1}{3}b$ 且 $b > 0 \quad \therefore a < b$ ，

$\because b = \frac{1}{2}c$ 且 $c > 0 \quad \therefore b < c \quad \therefore \underline{a < b < c}$

師說 4 <不等式的運算>

演練 4

假設不等式 $-3 < a < 5$ ，求下列各式的範圍為何？

(1) $-3a$ (2) $4a - 4$ (3) $7 - 2a$

解

(1) 將原式同乘 -3

$(-3) \times (-3) > (-3)a > 5 \times (-3)$ ，
 $\underline{9 > -3a > -15}$

(2) $4 \times (-3) < 4a < 4 \times 5$ ，
 $-12 - 4 < 4a - 4 < 20 - 4$ ，
 $\underline{-16 < 4a - 4 < 16}$

(3) $(-3) \times (-2) > (-2)a > 5 \times (-2)$ ，
 $6 + 7 > 7 - 2a > (-10) + 7$ ，
 $\underline{13 > 7 - 2a > -3}$

假設 $1 \leq a \leq 4$ ，試求 $-3a - 2$ 的最大與最小的整數值為何？

解

原式 $\Rightarrow 1 \times (-3) \geq -3a \geq 4 \times (-3)$
 $\Rightarrow -3 \geq -3a \geq -12$ ，
 $\Rightarrow -3 - 2 \geq -3a - 2 \geq -12 - 2$
 $\Rightarrow -5 \geq -3a - 2 \geq -14$

$-3a - 2$ 的 最大整數值為 -5 ，最小整數值為 -14

師說 5

〈不等式的整數解與圖示〉

演練 5

若要滿足 $-1 \leq x \leq k$ 的整數 x 共有 6 個，則不等式的解有哪些整數呢？若 k 為整數，試畫出不等式的圖示。

解


$\because -1 \leq x \leq k$

$\therefore -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 共有 6 個整數

x 介於 $-1 \sim 4$ ，圖示如右 

若 $a < x \leq b$ ，其中 $a、b$ 為整數，且滿足 x 的所有整數解為 $-12、-11、-10、\dots、0、1、2$ ，請寫出不等式及其圖示為何？

解

$-13 < x \leq 2$ ，圖示如右 

同步評量 2

- 已知 $-2 < a < 1$ ，且 $P = 1 - 2a$ ，求 P 的範圍 $-1 < 1 - 2a < 5$ 。
- 已知 $3 < a < 8$ ， $5 < b < 10$ ，試完成下列各式的範圍。

(1) <u>8</u> $< a + b <$ <u>18</u>	2. (1) $3 + 5 < a + b < 8 + 10$ ， $8 < a + b < 18$
(2) <u>-7</u> $< a - b <$ <u>3</u>	(2) $-5 > -b > -10$ ， $-10 < -b < -5$ ， $3 + (-10) < a + (-b) < 8 + (-5) \Rightarrow -7 < a - b < 3$
(3) <u>19</u> $< 3a + 2b <$ <u>44</u>	(3) $9 < 3a < 24$ ， $10 < 2b < 20$ $\Rightarrow 9 + 10 < 3a + 2b < 24 + 20 \Rightarrow 19 < 3a + 2b < 44$
(4) <u>-3</u> $< b - a <$ <u>7</u>	(4) $-3 > -a > -8$ ， $-8 < -a < -3$ ， $5 + (-8) < b + (-a) < 10 + (-3) \Rightarrow -3 < b - a < 7$
- 已知 $-9 \leq x \leq 5$ ，則 $|x|$ 的最大值為 9。 3. $\because |-9| = 9$ ， $|5| = 5$ ， $\therefore |x|$ 的最大值為 9
- 假設 $-1 < a < 0$ ，則 $a、-a、\frac{1}{a}、a^2$ 四數中，何者最大 $-a$ 。 4. $-a > a^2 > 0 > a > \frac{1}{a}$
- 若 2、8、 x 為三角形的三邊長，且 x 為正整數，則 x 為 7、8、9。 5. $\because 8 - 2 < x < 8 + 2$ ，
 $6 < x < 10$
 $\therefore x = 7、8、9$

能力

一元一次不等式與應用

一 解一元一次不等式的步驟

- 認明不等式題型：若一數學式中含有兩個不等號時，就以聯立方程式處理。若單純僅有一個不等號，即以一元一次方程式處理。
- 分數型之不等式：若遇到有分數時，將全式乘以分母之最小公倍數。
- 小數型之不等式：若遇小數時，將全式乘以 10^n 。
- 化簡之步驟：執行步驟 2、3。將相關係數化為整數後，再按照去括號法則或分配律進行化簡。
- 移項整理之步驟：以移項性質，將含有未知數的項移到不等號的任何一邊後，再合併或化簡。

◎需注意未知數前的係數，若為負數時，移項時需將不等號變向。

- 以不等量公理驗證：最後再次檢驗「不等號的方向」是否正確。

一元一次不等式解的情況

假設有一元一次不等式 $ax \geq b$ ，其解有下列情況：

1. 當 $a > 0 \Rightarrow x \geq \frac{b}{a}$
2. 當 $a < 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{a} \Rightarrow$ (不等號要變向)
3. 當 $a = 0, b \leq 0 \Rightarrow x$ 為任意實數
4. 當 $a = 0, b > 0 \Rightarrow x$ 無解

師說 6

〈解一元一次不等式〉

演練 6

解下列一元一次不等式：

- (1) $8(x-1) \leq 3(2x-3) + 4$
- (2) $3 - (2x-1) \geq \frac{1}{2}(22x - \frac{2}{3})$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow 8x - 8 \leq 6x - 9 + 4 \Rightarrow 2x \leq -5 + 8$
 $\Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$
- (2) 原式 $\Rightarrow 3 - 2x + 1 \geq 11x - \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow 3 + 1 + \frac{1}{3} \geq 13x$
 $\Rightarrow \frac{13}{3} \geq 13x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

解下列一元一次不等式：

- (1) $2(x-3) < 3(x+2)$
- (2) $\frac{2}{3}x - 1 > \frac{6}{7}x - 2$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow 2x - 6 < 3x + 6$
 $\Rightarrow -6 - 6 < 3x - 2x \Rightarrow x > -12$
- (2) 原式 $\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{6}{7}x > -1 \Rightarrow \frac{14-18}{21}x > -1$
 $\Rightarrow x < -1 \times (\frac{21}{-4}) \Rightarrow x < \frac{21}{4}$

師說 7

〈解一元一次聯立不等式〉

演練 7

解下列一元一次聯立不等式：

- (1) $-20 < -4x + 6 < 20$
- (2) $7 - x < 14 + 2x \leq 4x + 22$
- (3) $2 < \frac{2x-3}{5} \leq 8$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow -26 < -4x < 14$
 $\Rightarrow \frac{-26}{-4} > x > \frac{14}{-4} \Rightarrow \frac{13}{2} > x > -\frac{7}{2}$
- (2) 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 7 - x < 14 + 2x \\ 14 + 2x \leq 4x + 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 < 3x \\ -8 \leq 2x \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} < x \\ -4 \leq x \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{3} \leq x$
- (3) 原式同乘以 5 $\Rightarrow 10 < 2x - 3 \leq 40$
 $\Rightarrow 13 < 2x \leq 43 \Rightarrow \frac{13}{2} < x \leq \frac{43}{2}$

解下列一元一次聯立不等式：

- (1) $7x - 10 \leq 3(-x - 2) < 10$
- (2) $2 - x < 8 < 7 - 9x$
- (3) $m = 2x + 8$ ，且 $-1 < 2 - x < 8$ ，求 $m = ?$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 7x - 10 \leq -3x - 6 \\ -3x - 6 < 10 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} 10x \leq 4 \\ -3x < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{5} \\ x > -\frac{16}{3} \end{cases}$
 $\Rightarrow -\frac{16}{3} < x \leq \frac{2}{5}$
- (2) 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 2 - x < 8 \\ 7 - 9x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ -9x > 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x < -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow -6 < x < -\frac{1}{9}$
- (3) $m = 2x + 8 \Rightarrow x = \frac{m-8}{2}$
 $-1 < 2 - \frac{m-8}{2} < 8$
 $\Rightarrow -1 < \frac{4-m+8}{2} < 8 \Rightarrow -2 < 12-m < 16$
 $\Rightarrow -14 < -m < 4 \Rightarrow \underline{14 > m > -4}$

師說 8

〈一元一次不等式應用問題 I〉

演練 8

若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，且已知三內角的關係為 $\angle A = \angle C < \angle B$ ，請問： $\angle A$ 的範圍為何？

解

$$\begin{aligned} \because \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ, \\ \therefore \angle A + \angle C > 90^\circ &\Rightarrow \angle A + \angle A > 90^\circ, \\ \Rightarrow \angle A > 45^\circ \\ \because \angle A + \angle C + (\angle A) &< 180^\circ, \\ \therefore \angle A + \angle A + \angle A &< 180^\circ, 3\angle A < 180^\circ, \\ \Rightarrow \angle A < 60^\circ &\Rightarrow \underline{45^\circ < \angle A < 60^\circ} \end{aligned}$$

已知 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，且 $\angle A < \angle B < \angle C$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle C$ 的範圍？

解

$$\begin{aligned} \because \angle A < \angle B < \angle C \\ \therefore \begin{cases} 3\angle A < \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \\ 3\angle C > \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \end{cases} \\ \therefore \angle A < 60^\circ, \angle C > 60^\circ, \\ \text{且 } \angle A > 0^\circ, \angle C < 90^\circ \\ \Rightarrow \underline{0^\circ < \angle A < 60^\circ, 60^\circ < \angle C < 90^\circ} \end{aligned}$$

師說 9

〈一元一次不等式應用問題 II〉

演練 9

櫻怡全家及親戚一起到日月潭露營，傍晚分配帳篷時出現狀況。如果每頂帳篷睡 5 個人，則有 7 個人沒得睡；如果每頂帳篷睡 6 個人，則有 1 頂帳篷沒睡滿，請問：他們最多及最少帶了幾頂帳篷呢？

解

$$\begin{aligned} \text{設有 } x \text{ 頂帳篷，全部的人數為 } (5x + 7) \text{ 人} \\ 1 \leq (5x + 7) - 6(x - 1) < 6, \\ 1 \leq 5x + 7 - 6x + 6 < 6 \Rightarrow 1 \leq -x + 13 < 6 \\ -12 \leq -x < -7, 12 \geq x > 7 \\ \therefore \underline{\text{最多帶了 12 頂帳篷，最少帶了 8 頂帳篷}} \end{aligned}$$

一年十八班辦班級慶生會，老師帶了柳橙汁 1000 毫升，其濃度為 15%，因為濃度太濃，所以加入了礦泉水 x 毫升之後，濃度低於 10%，請問：加入礦泉水 x 的範圍為何？

解

$$\begin{aligned} \frac{1000 \times 15\%}{1000 + x} < 10\% \\ 1000 \times 15\% < (1000 + x) \times 10\% \\ 150 < 100 + 0.1x, 50 < 0.1x, \underline{500 < x} \end{aligned}$$

同步評量 3

- 滿足 $-2 < \frac{1}{3}(x+3) - 1 < 6$ 的最大整數 x 為何？ 17。
 $1. -1 < \frac{1}{3}(x+3) < 7, -3 < x+3 < 21, -6 < x < 18$
- 若 a 是正整數，且 $\frac{1}{3} < \frac{6}{a} < \frac{3}{4}$ ，則 a 的個數有 9 個。
 $2. \frac{1}{3} < \frac{6}{a} < \frac{3}{4}, \frac{6}{18} < \frac{6}{a} < \frac{6}{8}, (17-9)+1=9 \text{ 個}$
- 因為油價上漲，良宜的父親挑選優惠最多的 Lexus 加油站加油，每次加油滿 600 元，可獲贈面紙一盒，若良宜的父親加油花了 x 元，獲得 5 盒面紙，則 x 的範圍 $3000 \leq x < 3600$ 。
 $3. 600 \times 5 \leq x < 600 \times 6, 3000 \leq x < 3600$
- 若 $a+5, a, a-5$ ，為三角形的三邊長，求 a 的範圍 $a > 10$ 。
 $4. \because a-5 > 0, a+5 < a+(a-5) \Rightarrow a > 5 \text{ or } 10 < a \Rightarrow \text{取 } a > 10$
- 本學期數學週考有 4 次，雅姿前 3 次的成績為 65、76、83，若想要平均成績達到 80 分（含）以上，請問：第 4 次成績的範圍？（設第 4 次成績為 x ，總分為 100 分）
 $96 \leq x \leq 100$ 。
 $5. \because (65 + 76 + 83 + x) \div 4 \geq 80, 224 + x \geq 320, x \geq 96 \text{ 且 } x \leq 100 \therefore 96 \leq x \leq 100$



基本觀念題

$$1. 2x - 3 > 7 > 13 - 6x \Rightarrow \begin{cases} 2x > 10 \\ 7 > 13 - 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ -6 > -6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 1 < x \end{cases} \Rightarrow \text{取 } x > 5$$

(B) 1. 一元一次不等式 $2x - 3 > 7 > 13 - 6x$ 的解為 x ，其圖示為下列何者？



(D) 2. 若 $-3 < x < 5$ ，則 $|x + 4| - |x - 6| - |2x + 7| = ?$

(A) $2x - 3$ (B) $3x - 2$ (C) 9 (D) -9 2. 原式 $= (x + 4) - (6 - x) - (2x + 7) = 4 - 6 - 7 = -9$

(B) 3. 解不等式 $1 < \frac{3x - 1}{2} \leq 2$ ，求 x 的範圍？ 3. $2 < 3x - 1 \leq 4, 3 < 3x \leq 5, \therefore 1 < x \leq \frac{5}{3}$

(A) $1 < x \leq \frac{5}{2}$ (B) $1 < x \leq \frac{5}{3}$ (C) $1 < x \leq \frac{2}{5}$ (D) $1 < x \leq \frac{3}{5}$

(A) 4. 假設有不等式 $-2 < a < 7, -7 < b < 4$ ，試求 $2a - 3b$ 的範圍為何？

(A) $-16 < 2a - 3b < 35$ (B) $8 < 2a - 3b < -7$ (C) $-16 > 2a - 3b > 35$ (D) $8 > 2a - 3b > -7$

4. $-2 < a < 7$ 同乘 2 $\Rightarrow -4 < 2a < 14$
 $-7 < b < 4$ 同乘 $(-3) \Rightarrow 21 > -3b > -12$
 $\Rightarrow (-4) + (-12) < 2a - 3b < 14 + 21$
 $\Rightarrow -16 < 2a - 3b < 35$

(C) 5. 芷薇解一元一次不等式 $-(x - 3) > 5x + 1$ 的步驟如下圖，請問：她從哪一個步驟開始發生錯誤呢？

5. 步驟(三)同除以 (-6) 不等號需變號
 $\Rightarrow -6x \div (-6) < (-2) \div (-6)$

$-(x - 3) > 5x + 1$
 $\Rightarrow -x + 3 > 5x + 1 \dots\dots\dots$ (一)
 $\Rightarrow -6x > -2 \dots\dots\dots$ (二)
 $\Rightarrow -6x \div (-6) > (-2) \div (-6) \dots\dots\dots$ (三)
 $\Rightarrow x > \frac{1}{3} \dots\dots\dots$ (四)

(A) (一) (B) (二) (C) (三) (D) 沒有錯誤

(C) 6. 不等式 $2x - \frac{5}{3} > x + 4$ 的最小整數解為何呢？ 6. 同 $\times 3 \Rightarrow 6x - 5 > 3x + 12, 3x > 17 \Rightarrow x > 5\frac{2}{3} \therefore x = 6$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

(A) 7. 若 $4a - 3b \leq -5$ ，試比較 $b - \frac{4}{3}a$ 與 $1\frac{1}{2}$ 的大小。 7. $4a - 3b \leq -5$ 同乘以 $(-\frac{1}{3}) \Rightarrow b - \frac{4}{3}a \geq \frac{5}{3} > 1\frac{1}{2}$

(A) $b - \frac{4}{3}a > 1\frac{1}{2}$ (B) $b - \frac{4}{3}a \geq 1\frac{1}{2}$ (C) $b - \frac{4}{3}a < 1\frac{1}{2}$ (D) $b - \frac{4}{3}a \leq 1\frac{1}{2}$

(D) 8. $9 \leq 3x \leq x - 4$ 的解為下列何者呢？ 8. $9 \leq 3x$ 且 $3x \leq x - 4 \Rightarrow 3 \leq x$ 且 $2x \leq -4, x \leq -2 \therefore$ 無解

(A) $3 \leq x$ 或 $x \leq -2$ (B) $x \geq -2$
 (C) $x \leq 3$ (D) 無解

- (D) 9. 正義家中的洗衣機最大的洗衣量為 30 公斤，今天媽媽要洗 x 件的被單和重量 13 公斤的衣服，其中被單每件重量 2 公斤，根據題意可列出不等式為何？
 (A) $13x + 2 < 30$ (B) $13x + 2 \leq 30$ (C) $2x + 13 < 30$ (D) $2x + 13 \leq 30$

- (A) 10. 承上題，下列何者不是媽媽這一次洗衣服時被單的件數呢？
 (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6
 10. (A) 將 9 代入 $2x + 13 = 18 + 13 = 31 > 30$ (不合)

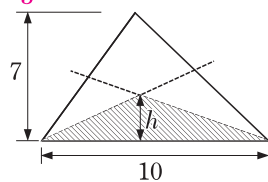
- (D) 11. 下列何者是不等式 $-8.5 < 2.5x + 3.5$ 的解？
 (A) $x < -4.8$ (B) $x = -4.8$
 (C) $x < -6$ (D) $x = -2$
 11. $-8.5 - 3.5 < 2.5x \Rightarrow -12 < 2.5x$
 $\Rightarrow x > -12 \times \frac{2}{5} \Rightarrow x > -4.8$

- (B) 12. 已知柏超、昆勳、仲寬等三位同學的體重分別是 66 公斤、62 公斤、 x 公斤，三人平均體重不超過 61 公斤，依據此關係可以列出不等式為下列何者？
 (A) $(66 + 62 + x) \div 2 \leq 61$ (B) $(x + 62 + 66) \times \frac{1}{3} \leq 61$
 (C) $\frac{(x + 62 + 66)}{3} \geq 61$ (D) $\frac{3(66 + 62 + x)}{3} \geq 61$

- (D) 13. 承上題，請問：仲寬的體重可能為下列何者呢？
 (A) 58 公斤 (B) 57 公斤 (C) 56 公斤 (D) 55 公斤
 13. $(66 + 62 + x) \times \frac{1}{3} \leq 61$
 $\Rightarrow x \leq (61 \times 3) - (66 + 62)$
 $\Rightarrow x \leq 55$

- (B) 14. 若 $-3 < a < \frac{1}{3}$ ， $6 < b < 12$ ，則 $x = 3a + \frac{2}{3}b$ ，求 x 的範圍？
 (A) $-2 < x < 12$ (B) $-5 < x < 9$
 (C) $-9 < x < 5$ (D) $-12 < x < 2$
 14. $\begin{cases} -3 < a < \frac{1}{3} \Rightarrow -9 < 3a < 1 \\ 6 < b < 12 \Rightarrow 4 < \frac{2}{3}b < 8 \end{cases}$
 $\Rightarrow -5 < 3a + \frac{2}{3}b < 9, -5 < x < 9$

- (D) 15. 由三角形的兩頂點延虛線剪兩刀，可得一斜線的三角形面積。若此三角形的高為 h 公分，且三角形面積不小於 15 平方公分，求 h 的範圍為何？
 (A) $h \geq 3$ (B) $h \geq 7$
 (C) $3 < h \leq 7$ (D) $3 \leq h \leq 7$
 15. $\begin{cases} h \leq 7 \\ \frac{10h}{2} \geq 15 \Rightarrow h \geq 3 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq h \leq 7$



- (A) 1. 解一元一次不等式 $2 - \frac{2x - 3}{5} < \frac{x + 3}{10}$ ，得其解的範圍為何？
 (A) $x > \frac{23}{5}$ (B) $x < \frac{23}{5}$ (C) $x > 10$ (D) $x < 10$
 1. 原式同乘 10 $\Rightarrow 20 - 2(2x - 3) < x + 3$
 $\Rightarrow 20 - 4x + 6 < x + 3 \Rightarrow 23 < 5x \Rightarrow \frac{23}{5} < x$
 97 基測二

- (C) 2. 解不等式 $\frac{2}{3}x + 1 \leq \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ ，得其解的範圍為何？
 (A) $x \geq \frac{3}{2}$ (B) $x \geq \frac{2}{3}$
 (C) $x \leq -\frac{3}{2}$ (D) $x \leq -\frac{2}{3}$
 2. $\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x \leq \frac{1}{3} - 1$ ，
 $\frac{4}{9}x \leq -\frac{2}{3}$ ，
 $x \leq -\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}, x \leq -\frac{3}{2}$
 97 基測一

- (B) 3. 某段隧道全長 9 公里，有一輛汽車以每小時 60 公里到 80 公里之間的速率通過該隧道。下列何者可能是該車通過隧道所用的時間？
 (A) 6 分鐘 (B) 8 分鐘
 (C) 10 分鐘 (D) 12 分鐘
 3. 設花 t 分鐘通過隧道
 $\frac{9}{80} \times 60 \leq t \leq \frac{9}{60} \times 60$
 $\Rightarrow \frac{27}{4} \leq t \leq 9 \Rightarrow 6.75 \leq t \leq 9$
 97 基測一

(A) 4. $x = -1$ 不是下列哪一個不等式的解？

96 基測一

- (A) $2x + 1 \leq -3$ (B) $2x - 1 \geq -3$
 (C) $-2x + 1 \geq 3$ (D) $-2x - 1 \leq 3$

4. (A) $2x \leq -4, x \leq -2$ (B) $2x \geq -2, x \geq -1$
 (C) $-2 \geq 2x, x \leq -1$ (D) $2x \geq -4, x \geq -2$

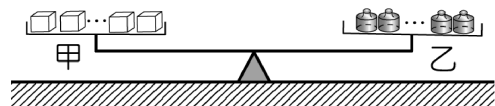
(C) 5. 有甲、乙兩個箱子，甲箱重 47 公斤，其重量比乙箱的 3 倍還重，且比乙箱的 4 倍還輕。若乙箱重 x 公斤，依題意可得到下列哪一個關係式？

- (A) $x > \frac{47}{3}$ (B) $x < \frac{47}{4}$
 (C) $\frac{47}{4} < x < \frac{47}{3}$ (D) $\frac{47}{3} < x < 47$

5. 依題意 $\begin{cases} 47 > 3x \\ 47 < 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{47}{3} \\ x > \frac{47}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{47}{4} < x < \frac{47}{3}$

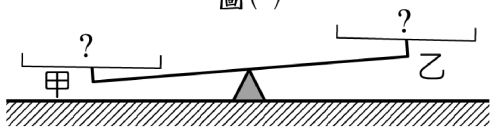
95 基測二

(C) 6. 如圖(一)，等臂天平呈平衡狀態，其中甲秤盤放方塊，乙秤盤放砝碼。若每個方塊、砝碼的重量分別為 x 、 y ，且 $x < y$ ，則經下列哪一選項的操作，可使天平呈圖(二)的狀態？



圖(一)

- (A) 在甲加放 6 個方塊，乙加放 6 個砝碼
 (B) 在甲加放 4 個方塊，乙加放 5 個砝碼
 (C) 從甲取出 3 個方塊，乙取出 3 個砝碼
 (D) 從甲取出 3 個方塊，乙加放 4 個砝碼



圖(二)

6. 由甲 = 乙，且 $x < y$ ， $3x < 3y$ ，
 $甲 - 3x > 乙 - 3y$

95 基測二

(B) 7. 小君帶 200 元到文具行購買每枝 17 元的鉛筆和每枝 30 元的原子筆。若小君買的鉛筆比原子筆多 3 枝，則小君最多可買到幾枝原子筆？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 設小君買原子筆 x 支， $30x + 17(x + 3) \leq 200$ ，
 $30x + 17x + 51 \leq 200, 47x \leq 149, x \leq \frac{149}{47}$

95 基測一

\therefore 最多可買 3 枝原子筆

模塊學力基測 試題

(A) 1. 不等式 $ax - 4 > x + 16$ 的解為 $x < -5$ ，則 $a = ?$

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

1. 原式 $\Rightarrow (a-1)x > 20$ 的解為 $x < -5$ ，
 故 $a-1 = -4, a = -3$

(D) 2. 不等式 $\frac{3x-5}{5} - \frac{7x-13}{6} > 3 - \frac{x+3}{2}$ 的圖形為下列何者？

- (A) (B) (C) (D)

2. $18x - 30 - 35x + 65 > 90 - 15x - 45 \Rightarrow -2x > 10 \Rightarrow x < -5$ ，選(D)圖形

(C) 3. 設 $-1 < x < 3$ 且 $P = \frac{1}{2}(6-3x) + \frac{1}{2}$ ，求 P 的範圍？

- (A) $5 < P < 7$ (B) $-1 > P > 5$ (C) $5 > P > -1$ (D) $7 < P < 5$

3. $-1 < x < 3 \Rightarrow 3 > -3x > -9 \Rightarrow 9 > -3x + 6 > -3$ ，
 $\therefore \frac{9}{2} > \frac{1}{2}(6-3x) > -\frac{3}{2} \Rightarrow 5 > \frac{1}{2}(6-3x) + \frac{1}{2} > -1$
 $\Rightarrow 5 > P > -1$

(A) 4. 試比較 $(1\frac{999}{1000})^5$ 和 $(1\frac{999}{1000})^4$ 的大小？

- (A) $(1\frac{999}{1000})^5 > (1\frac{999}{1000})^4$ (B) $(1\frac{999}{1000})^5 < (1\frac{999}{1000})^4$
 (C) $(1\frac{999}{1000})^5 \leq (1\frac{999}{1000})^4$ (D) $(1\frac{999}{1000})^5 \geq (1\frac{999}{1000})^4$

4. $1\frac{999}{1000} > 1 \therefore (1\frac{999}{1000})^5 > (1\frac{999}{1000})^4$

(D) 5. 哪一個數是 $x + \frac{120}{119} + \frac{1000}{999} \leq 0$ 的解？

- (A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) -3

5. $x + 1\frac{1}{119} + 1\frac{1}{999} \leq 0$
 $\Rightarrow x + 2 + \frac{1}{119} + \frac{1}{999} \leq 0$ ，故選(D)

(B) 6. 同時滿足 $2x - \frac{3}{2} > -x + \frac{1}{2}$ 及 $x - \frac{2}{3} < -\frac{x}{3} + 1$ 的解為何呢?

- (A) $\frac{5}{4} < x < \frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$
 (C) $-\frac{2}{3} < x < -\frac{5}{4}$ (D) $-\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$

6. $2x - \frac{3}{2} > -x + \frac{1}{2} \Rightarrow 3x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$,
 $x - \frac{2}{3} < -\frac{x}{3} + 1 \Rightarrow \frac{4}{3}x < \frac{5}{3}, x < \frac{5}{4}$,
 $\therefore \frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$

(B) 7. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中，若長方形周長小於 50，且斜線部分面積不小於 16，求 x 的範圍？

- (A) $2 \leq x < 8$
 (B) $4 \leq x < 10$
 (C) $6 \leq x < 12$
 (D) $8 \leq x < 14$

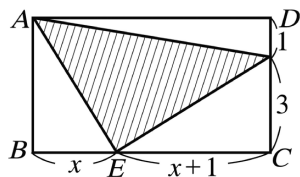
7. 先求斜線部分面積

$$= (x+x+1) \times (1+3) - \frac{4 \times x}{2} - \frac{3(x+1)}{2} - \frac{(2x+1) \times 1}{2}$$

$$= 8x + 4 - 2x - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - x - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}x + 2$$

依條件列式 $(x+x+1+4) \times 2 < 50 \Rightarrow 2x+5 < 25$

$\Rightarrow 2x < 20, x < 10$, 又 $\frac{7}{2}x + 2 \geq 16 \Rightarrow \frac{7}{2}x \geq 14, x \geq 4 \therefore 4 \leq x < 10$



(B) 8. 一個三角形的底長 10 公分，高為 $(2x - 7)$ 公分，面積不大於 $(5x + 20)$ 平方公分，則 x 範圍為何呢？

- (A) $\frac{7}{2} \leq x \leq 11$ (B) $\frac{7}{2} < x \leq 11$
 (C) $\frac{7}{3} \leq x \leq 11$ (D) $\frac{7}{3} < x \leq 11$

8. $2x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{2}; 5x + 20 > 0, x > -4$,
 又 $10 \times (2x - 7) \times \frac{1}{2} \leq 5x + 20, 2x - 7 \leq x + 4$
 $\Rightarrow x \leq 11 \therefore \frac{7}{2} < x \leq 11$

(D) 9. 已知山路長 x 公里，若上山每小時走 3 公里，沿原路下山每小時走 5 公里，且上山與下山的來回時間不超過 6 小時，則根據題意可以列出下列哪一個不等式？

- (A) $3x + 5x < 6$ (B) $3x + 5x \leq 6$
 (C) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 6$ (D) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} \leq 6$

9. 時間 = $\frac{\text{距離}}{\text{速度}} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{5} \leq 6$

(A) 10. 福隆火車便當有若干個要裝箱，若每箱裝 14 個，則餘 36 個；若每箱裝 18 個，最後一箱裝不滿，已知最多可裝 a 箱，最少可裝 b 箱，則 $a - b = ?$

- (A) 3 (B) 4
 (C) 5 (D) 6

10. 設有 x 箱 $\therefore 18(x-1) < 14x + 36 < 18x \Rightarrow 18x - 18 < 14x + 36$
 $\Rightarrow 4x < 54, x < 13\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}, 14x + 36 < 18x \Rightarrow 36 < 4x, x > 9 \dots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 得 $9 < x < 13\frac{1}{2}$; \therefore 最小 $b = 10$, 最大 $a = 13 \therefore 13 - 10 = 3$

(C) 11. 太平洋 SOGO 百貨公司的商品，都照成本加 25% 的利潤做為定價，週年慶大減價，MP4 一臺比定價便宜 500 元售出尚可賺成本的 5% (含) 以上，則該 MP4 成本最少為多少元？

- (A) 1999 (B) 2000
 (C) 2500 (D) 3000

11. 設 MP4 成本 x 元，則定價為 $x + 0.25x = 1.25x$,
 $\therefore (1.25x - 500) - x \geq 0.05x \Rightarrow 0.2x \geq 500$,
 $x \geq 2500 \therefore$ 成本最少 2500 元

(D) 12. 第 100 屆立法委員選舉，假設花蓮縣第一選區有效票 12000 張，有 10 位候選人要選上 3 位，則候選人花媽至少要得多少張選票，才能篤定當選呢？

- (A) 2998 (B) 2999
 (C) 3000 (D) 3001

12. 設需 x 張， $(3+1)x > 12000, \therefore x > 3000$,
 但 x 為正整數 $\therefore 3000 + 1 = 3001$

(C) 13. 高雄科學工藝博物館的入場券規定：50 人 (含) 以上打八折，100 人 (含) 以上打 7 折。奇鼎國中 2 年 18、19 班共二班的人數在 50 人到 100 人之間，則此二班最少多少人時，買 100 張入場券反而便宜？

- (A) 66 (B) 77 (C) 88 (D) 99

13. 設有 x 人以上 ($50 \leq x \leq 100$),
 $\therefore 0.8x > 100 \times 0.7 \Rightarrow x > \frac{70}{0.8} = 87.5$,
 $\therefore x$ 最小整數值 88

第9單元

多項式

110

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★★☆☆ 3 優先選讀率★★☆☆☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. $5x^4 + 3x^2 - 4x - 3 = 0$ 為四次多項式。

💡 多項式不應該有等號，有等號稱為方程式

能力一

(O) 2. 多項式 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$ 的 x 項係數為 $-\frac{1}{3}$ 。

💡 多項式皆由 (+) 號連接而成，所以 x 項係數為 $-\frac{1}{3}$

(X) 3. 零次多項式與零多項式意義相同，只不過說法不同。

💡 常數多項式： $\begin{cases} \text{零次多項式} \Rightarrow \text{次數為 } 0 \\ \text{零多項式} \Rightarrow \text{即多項式為 } 0 \end{cases}$

(O) 4. 下列式子 $\frac{1}{2x+2}$ 、 $\sqrt{x+3}$ 、 $|x^2+3x-1|$ 皆不是多項式。

💡 多項式定義：文字符號不可在分母、根號內與絕對值內

(X) 5. 若 a 、 b 、 c 皆為整數， $(ax^2 + 3x + 2) - (bx - 5x^2 - c)$ 為零多項式，則 $a + b + c = 0$

💡 原式 $= (a+5)x^2 + (3-b)x + (2+c)$ ， $a+5=0$ ， $3-b=0$ ， $2+c=0$ ， $a+b+c=-4$

(X) 6. 若 A 、 B 兩多項式皆為三次多項式，則 $A+B$ 必為三次多項式。

💡 若兩多項式次數相同，相互加減後次數不大於最高次數

能力二

(X) 7. 若 A 為多項式， $-(x^2 - 2x + 3) + A = x^2 + 3x + 8$ ，則 $A = 2x^2 + x + 5$ 。

💡 $A = x^2 + 3x + 8 + (x^2 - 2x + 3) = 2x^2 + x + 11$

(X) 8. 「多項式 A 除以 B 」與「多項式 A 除 B 」的意思是相同的。

💡 A 除以 $B = A \div B$ ， A 除 $B = B \div A$

能力三

(O) 9. 在 $(x^2 + x - 1)(3x^2 - 2x + 1)$ 的展開式中， x^3 項的係數為 1。

💡 x^3 項的係數： $-2x^3 + 3x^3 = x^3$ ，係數為 1

(X) 10. 設有兩多項式 A 、 B ，若 A 除以 B ，得商式 Q ，餘式 R ，則 $2A \div 3B$ 的商式為 $\frac{2}{3}Q$ ，餘式 R 。

💡 $2A = 2BQ + 2R \Rightarrow 2A = (3B) \left(\frac{2}{3}Q\right) + 2R \Rightarrow$ 商式 $= \frac{2}{3}Q$ ，餘式 $= 2R$

數學 健康狀況檢核表

※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

多項式的意義與化簡

一 多項式的意義

由「數字」和「文字符號 x 」，藉由「加法」和「乘法」運算所得的數學式，稱為 x 的多項式。通常以文字符號的「最高次方數」為此多項式的次數名稱。

$$ax^3 + bx^2 - cx - d$$

$$= ax^3 + bx^2 + (-cx) + (-d)$$

$(-d)$ ：稱為常數項（或零次項） $\Rightarrow (-d) = (-dx^0)$
 $(-cx)$ ：由「+」所間隔的稱為「項」
 x ：稱為變數
 b ：稱為 x^2 的係數
 x^3 ：3為此多項式的最高次數 $\Rightarrow x$ 的三次多項式

二 多項式的判別

多項式中的文字 x 不可出現在「分母中」、「根號內」、「絕對值內」。

例1：以下皆非多項式： $\frac{1}{x+3} - x$ ， $\sqrt{x-7}$ ， $|x+3| \dots$ 等。

三 多項式的名稱

在多項式 $ax^2 + bx + c$ 中：

1. 若 $a \neq 0$	為二次多項式
2. 若 $a = 0, b \neq 0$	為一次多項式
3. 若 $a = 0, b = 0$	為常數多項式（不含文字符號的多項式），有以下兩種類型： (1) $c \neq 0 \Rightarrow$ 零次多項式；(2) $c = 0 \Rightarrow$ 零多項式

四 同類項和升、降冪式

1. **同類項**：在一多項式中，文字部分（含次數）相同的項，稱為同類項。同類項的係數可以加或減而整理為一項（合併），此過程稱為化簡。

2. **升、降冪式**：在多項式中，依特定文字的次方數由高至低順序排列，稱為**降冪式**（常用）。而依特定文字的次方數由低至高順序排列，稱為**升冪式**。

例2：(1) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \Rightarrow x$ 的降冪式

(2) $2 + 3y - 4y^2 + 5y^3 \Rightarrow y$ 的升冪式

3. **多項式的相等**：若兩多項式相等，則其**對應項係數相等**。

例3： $ax^2 + bx - c = dx^2 - ex + f \Rightarrow a = d, b = -e, -c = f$

師說 1

〈多項式的意義〉

演練 1

1. 下列各項數學式，哪些非多項式呢？(複選)

- (A) $\frac{3}{x+2}$ (B) $x^3 + 3x + 3$ (C) $|x|^2 + 2x - 1$
 (D) $3x^2 - \sqrt{2}x$ (E) $\sqrt{2x} - x + 1$

2. 設 $(3a + 2b - 4)x^2 + (a - 3b - 5)x + (c + 3)$ 為 x 的零多項式，求 $a - b + c = ?$

解

1. (A) $\Rightarrow x$ 在分母、(C) $\Rightarrow x$ 在絕對值中、
 (E) $\Rightarrow x$ 在根號中

非多項式的有：(A)、(C)、(E)

$$2. \begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ a - 3b - 5 = 0 \\ c + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 4 \cdots \textcircled{1} \\ a - 3b = 5 \cdots \textcircled{2} \\ c = -3 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow 11a = 22 \Rightarrow a = 2,$$

$$\text{代入} \textcircled{2} \text{得 } b = -1, \text{ 且 } c = -3$$

$$\therefore a - b + c = 2 - (-1) - 3 = 0$$

1. 下列何者為 x 的多項式？(可複選)

- (A) $x^2 + x + x^{-1}$ (B) $x^3 + x + 3 = 0$
 (C) $x^2 + \frac{1}{y} + 1$ (D) 101

2. 若 $(k + 1)x^2 + 3x - m$ 為一次多項式，請問： k 值為何呢？

解

1. (A) $x^2 + x + x^{-1} = x^2 + x + \frac{1}{x}$ ， x 在分母中，

非多項式

(B) $x^3 + x + 3 = 0$ ，此為方程式非多項式

(C) $x^2 + \frac{1}{y} + 1$ ，此為 x 的二次多項式

(D) $101 = 101x^0$ ，此為 x 的零次多項式

故 (C)(D) 為 x 的多項式

2. $\because (k + 1)x^2 + 3x - m$ 為一次多項式
 $\Rightarrow (k + 1) = 0, k = -1$

師說 2

〈多項式的相等〉

演練 2

1. 設 $a、b、c、d、e$ 均為整數，且 $2|a| + 3|b - 1| + |c - 2| = 1$ ，則多項式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 的次數為何呢？

2. 若 $2x^3 + 3x^2 - 1 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + (c + d)$ ，請問： $a + b + c + d$ 的值為何呢？

解

$$1. |a| = 0, |b - 1| = 0, |c - 2| = 1$$

$$\Rightarrow a = 0, b - 1 = 0, c - 2 = \pm 1$$

$$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 3$$

$$\text{或 } a = 0, b = 1, c = 1$$

$$\Rightarrow \text{原多項式可為 } x^3 + 3x^2 + dx + e$$

$$\text{或 } x^3 + x^2 + dx + e$$

$$\Rightarrow \text{均為三次多項式}$$

$$2. \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ b + c = 0 \\ c + d = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 2$$

1. 多項式 $A = -3x^2 - ax + 19$ 與 $B = bx^2 + 4x - c$ 相等，試求 $a + b + c = ?$

2. 若 $3x^3 - 2x^2 + 4 = ax^3 - (a - b)x^2 + (b - c)x + (c - d)$ ，試求 $a + b - c + d = ?$

解

$$1. A = -3x^2 - ax + 19, B = bx^2 + 4x - c$$

兩式對照比較後，可得 $b = -3; -a = 4$

$$\Rightarrow a = -4; 19 = -c \Rightarrow c = -19$$

$$\Rightarrow a + b + c = (-4) + (-3) + (-19)$$

$$= -26$$

$$2. a = 3,$$

$$a - b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$b - c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$c - d = 4 \Rightarrow d = -3$$

$$\therefore a + b - c + d = 3 + 1 - 1 + (-3) = 0$$

同步評量 1

- (B) 1. 下列的數學式中共有多少個為非多項式呢？
 (甲) $\frac{1}{x} - 2$ (乙) $\sqrt{x} + 2$ (丙) $|x|^2 + |x| + 1$
 (丁) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 1$ (戊) $|4|x^3 - |2|x$ (己) $\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x + 1$
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
1. (甲) x 在分母；(乙) x 在根號；(丙) x 在絕對值
 \therefore (甲)、(乙)、(丙)非多項式，共3個
- (A) 2. 若 $A = (a-3)x^3 + (b-2)x^2 + (a+b-7)x + 5$ 為 x 的一次多項式，求 $A = ?$
 (A) $-2x + 5$ (B) $-4x + 5$ (C) $-6x + 5$ (D) $-8x + 5$
2. $a-3=0 \Rightarrow a=3; b-2=0 \Rightarrow b=2$
 $\Rightarrow (a+b-7)x + 5 = -2x + 5$
- (D) 3. 假設有兩多項式分別相等 $ax^2 + (b-4a)x + (4a-2b-5) = 3x^2 - 14x + c$ ，請問： $a+b+c = ?$
 (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
3. 比較係數後 $\Rightarrow a=3, b-4a=-14, 4a-2b-5=c$
 $a=3, b=-2, c=11 \Rightarrow a+b+c=12$

能力 多項式的加減運算

- 同類項才可以相加減。
- 假設 $A、B$ 為兩多項式，其次數分別是 $m、n$ ，則：
 - 若 $m=n$ ，則 $A \pm B$ 的次數不大於 m 次。
 - 若 $m > n$ ，則 $A \pm B$ 的次數是 m 次。

例4：有三個多項式 $A = 3x^3 + 2x^2 + x + 1, B = -3x^3 + 3x, C = 2x^2 + 3x - 1$
 則 $A + B = 2x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$ 最高次不大於 3 次
 $A + C = 3x^3 + 4x^2 + 4x \Rightarrow$ 最高次是 3 次

師說 3

〈多項式的加減〉

演練 3

- 已知多項式 $A = ax^3 + (b+3)x^2 + (c-1)x - 1, B = 2x^2 + (a-3)x + (b-c+d)$ ，若 $A = B$ ，則 $a - b - c - d = ?$
- 若 $(x^2 + x - 1) - (ax^2 - bx - c) = x - 1$ ，則 $a(b+c) = ?$

解

- $a = 0, b + 3 = 2 \Rightarrow b = -1,$
 $c - 1 = a - 3 \Rightarrow c = -2,$
 $b - c + d = -1, d = -2,$
 $a - b - c - d = 0 - (-1) - (-2) - (-2)$
 $= 0 + 1 + 2 + 2 = \underline{5}$
- 原式 $\Rightarrow x^2 + x - 1 - ax^2 + bx + c = x - 1$
 $\Rightarrow (1-a)x^2 + (1+b)x - (1-c) = x - 1$
 $\Rightarrow \begin{cases} 1-a=0, a=1 \\ 1+b=1, b=0 \Rightarrow a(b+c)=\underline{0} \\ 1-c=1, c=0 \end{cases}$

- 將 $(4x^2 - x - 1) + (6x^2 + 8x + 4)$ 化簡後得 $ax^2 + bx + c$ ，則 $a + b + c = ?$
- 假設 $A = 2x^2 - 3x - 4, B = 3x^2 - 2x + 5$ ，試求 $2A + 3B$ 及 $3A - 2B$ 為何呢？

解

- $(4x^2 - x - 1) + (6x^2 + 8x + 4)$
 $= (4+6)x^2 - (1-8)x + (-1)+4$
 $= 10x^2 + 7x + 3 \Rightarrow a + b + c = \underline{20}$
- (1) $2A + 3B$
 $= 2(2x^2 - 3x - 4) + 3(3x^2 - 2x + 5)$
 $= 4x^2 - 6x - 8 + 9x^2 - 6x + 15$
 $= \underline{13x^2 - 12x + 7}$
- (2) $3A - 2B$
 $= 3(2x^2 - 3x - 4) - 2(3x^2 - 2x + 5)$
 $= 6x^2 - 9x - 12 - 6x^2 + 4x - 10$
 $= \underline{-5x - 22}$

同步評量 2

- (C) 1. 化簡 $(4x^2 - 6) + (-3x^2 + 4 + 5x) = ax^2 + bx + c$ ，則 $a - b + c = ?$
 (A) -5 (B) 5 (C) -6 (D) 6 1. 化簡結果為 $x^2 + 5x - 2$ ，則 $a - b + c = 1 - 5 - 2 = -6$
- (B) 2. 有一多項式減去 $4x^2 - 7x - 4$ 的差為 $x^2 + 8x + 3$ ，則此多項式為下列何者？
 (A) $5x^2 + x + 1$ (B) $5x^2 + x - 1$ 2. 設此多項式為 A ，
則 $A = 4x^2 - 7x - 4 + x^2 + 8x + 3 = 5x^2 + x - 1$
 (C) $3x^2 + x + 7$ (D) $3x^2 + x - 7$
- (C) 3. 已知某一多項式 A 與 $3x^2 + 6x - 2$ 的和為 $2x + 1$ ，則此多項式 A 的常數項為多少？
 (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 3. $1 - (-2) = 3$
- (A) 4. 鼎翔算數學題：「兩多項式 A 、 B ，……， $B = -3x^2 - 4x + 5$ ，求 $A + 3B = ?$ 」，但鼎翔不小心將 $3B$ 誤看成 $5B$ ，結果求出的答案是 $-2x^2 - 9x + 16$ 。試利用上述已知條件，幫鼎翔算出正確的答案？
 (A) $4x^2 - x + 6$ (B) $-4x^2 - x + 6$ 4. $A + 3B = A + 5B - 2B$
 $= -2x^2 - 9x + 16 - 2(-3x^2 - 4x + 5)$
 $= -2x^2 - 9x + 16 + 6x^2 + 8x - 10$
 $= 4x^2 - x + 6$
 (C) $4x^2 + x - 6$ (D) $-4x^2 - x - 6$

能力 多項式的乘除運算

一 多項式的乘法

1. 設 A 、 B 為 x 的多項式，其次數分別為 m 、 n ，則 $A \times B$ 的次數為 $(m + n)$ 次。
2. 多項式乘法的係數總和。⇒ 將 $x = 1$ 代入多項式 (文字符號省略計算)

例5：有兩多項式相乘 $(3x^2 + 2x - 6)(2x^3 + 3x^2 - 7)$ 其乘積之多項式係數總和 (含常數項) 為 ⇒ $(3 + 2 - 6)(2 + 3 - 7) = 2$ 。

3. 多項式乘法中單項係數求法：

例6：有兩多項式相乘 $(x - 7 + 5x^2)(-4x^2 + 3 + 9x)$ 其乘積中「 x^2 項的係數」為

$$\Rightarrow 1 \times 9 + (-7) \times (-4) + 5 \times 3 = 52$$

二 多項式的除法

設兩多項式 A 、 B ， A 除以 B 得商為 Q ，餘式為 R ，則 $A = BQ + R \Leftrightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$

1. kA 除以 B ，商式為 kQ ，餘式為 kR 。
2. A 除以 kB ，商式為 $\frac{Q}{k}$ ，餘式為 R 。
3. 設 A 、 B 兩多項式之次數分別為 m 、 n ，若 $m > n$ ， $A \div B$ 的商式為 $(m - n)$ 次，餘式的次數不大於 n 次

師說 4

〈多項式的乘法 I〉

演練 4

- 若 $16x^2 + kx - 6$ 與 $(2x + 3)(ax + b)$ 相等，其中 a 、 b 、 k 均為整數，則 $k = ?$
- 已知 $x^2 - \frac{3}{4}x = -\frac{1}{8}$ ，則 $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{4})(x + \frac{3}{4}) = ?$

解

- $(2x + 3)(ax + b) = 2ax^2 + 3ax + 2bx + 3b$
 $= 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b$ 與 $16x^2 + kx - 6$
 比較係數得 $a = 8, b = -2$
 故 $k = 3 \times 8 - 4 = \underline{20}$
- $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{4})$
 $= (x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8})(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{9}{8})$
 $= (-\frac{1}{8} + \frac{1}{8})(-\frac{1}{8} - \frac{9}{8}) = \underline{0}$

- 若 $\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{3}$ 與 $(bx + c)(6x - 12)$ 相等，其中 a 、 b 、 c 均為有理數，則 $a + b + c = ?$
- 已知 $x^2 + 2x - 17 = 0$ ，則 $(x + 7)(x + 3)(x - 1)(x - 5) = ?$

解

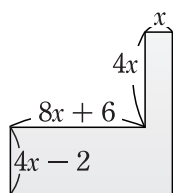
- $\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{3} = 6bx^2 - 12bx + 6cx - 12c$
 $= 6bx^2 + (6c - 12b)x - 12c$
 $\frac{1}{2} = 6b \Rightarrow b = \frac{1}{12}; \frac{1}{3} = -12c \Rightarrow c = -\frac{1}{36}$
 $6c - 12b = a \Rightarrow 6(-\frac{1}{36}) - 12(\frac{1}{12}) = a$
 $\Rightarrow a = -\frac{7}{6}$
 $a + b + c = -\frac{7}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \underline{-\frac{10}{9}}$
- $x^2 + 2x = 17,$
 $(x + 7)(x - 5)(x + 3)(x - 1)$
 $= (x^2 + 2x - 35)(x^2 + 2x - 3)$
 $= (17 - 35)(17 - 3) = \underline{-252}$

師說 5

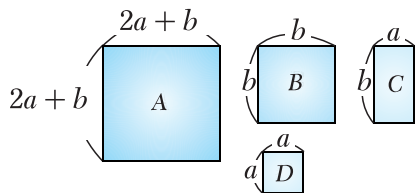
〈多項式的乘法 II〉

演練 5

- 如下圖(一)，求此圖形的面積為何呢？
- 如下圖(二)， A 、 B 、 C 、 D 代表四個矩形的面積，若以 B 、 C 、 D 表示 A ，則 $A = ?$



圖(一)

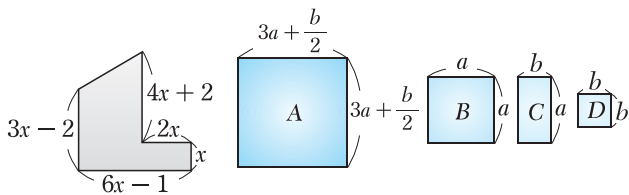


圖(二)

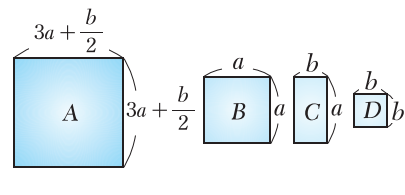
解

- $4x \cdot x + [(4x - 2) \times (8x + 6 + x)]$
 $= 4x^2 + [(4x - 2) \times (9x + 6)]$
 $= 4x^2 + 36x^2 + 6x - 12$
 $= \underline{40x^2 + 6x - 12}$ (平方單位)
- $B = b^2, C = ab, D = a^2,$
 $A = (2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$
 $= \underline{4D + 4C + B}$ (平方單位)

- 如下圖(一)，求此圖形的面積為何呢？
- 如下圖(二)， A 、 B 、 C 、 D 代表四個矩形的面積，若以 B 、 C 、 D 表示 A ，則 $A = ?$



圖(一)



圖(二)

解

- $5x + 2$ $-$ $-$
 $\Rightarrow [(5x + 2)(6x - 1)] - [(4x + 2)(2x)] -$
 $[\frac{1}{2}(4x - 1)(2x + 4)]$
 $= 30x^2 + 7x - 2 - (8x^2 + 4x) - (4x^2 + 7x - 2)$
 $= 30x^2 + 7x - 2 - 8x^2 - 4x - 4x^2 - 7x + 2$
 $= \underline{18x^2 - 4x}$ (平方單位)
- $A = (3a + \frac{b}{2})^2 = 9a^2 + 3ab + \frac{b^2}{4}$
 $= \underline{9B + 3C + \frac{1}{4}D}$ (平方單位)

師說 6

〈多項式的除法〉

演練 6

116

1. 請問： $[(2x^2 + x - 3) - (-x^2 - 3x + 4)] \div (x - 1)$ 的商式為何？
2. 假設 $3x^3 - 2x^2 + Px + Q$ 可被多項式 $3x^2 - x + 1$ 整除，求 $P + Q = ?$

解

$$1. \text{ 原式} = (2x^2 + x - 3 + x^2 + 3x - 4) \div (x - 1)$$

$$= (3x^2 + 4x - 7) \div (x - 1)$$

$$= \underline{3x + 7}$$

$$2. \begin{array}{r} x - \frac{1}{3} \\ 3x^2 - x + 1 \overline{) 3x^3 - 2x^2 + Px + Q} \\ \underline{3x^3 - x^2 + x} \\ -x^2 + (P-1)x + Q \\ \underline{-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}} \\ 0 \end{array}$$

$$P - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{4}{3}, Q = -\frac{1}{3},$$

$$P + Q = \frac{4}{3} + (-\frac{1}{3}) = \underline{1}$$

1. 求多項式 $6x^2 - 3x + 1$ 除以 $2x + 1$ 的商式與餘式之和？
2. 假設 $2x^3 - x^2 + mx + n$ 可被 $2x^2 + x - 1$ 整除，求 $m^2 - 4n = ?$

解

$$1. \text{ 商式} + \text{餘式} = (3x - 3) + 4 = \underline{3x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 3x - 3 \\ 2x + 1 \overline{) 6x^2 - 3x + 1} \\ \underline{6x^2 + 3x} \\ -6x + 1 \\ \underline{-6x - 3} \\ 4 \end{array}$$

$$2. \begin{array}{r} x - 1 \\ 2x^2 + x - 1 \overline{) 2x^3 - x^2 + mx + n} \\ \underline{2x^3 + x^2 - x} \\ -2x^2 + (m+1)x + n \\ \underline{-2x^2 - x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2, n = 1$$

$$m^2 - 4n = (-2)^2 - 4(1) = \underline{0}$$

同步評量 3

- (B) 1. 求 $(x^3 - 3x + 5) \div (x - 1)$ 的商式與餘式之和為何？

- (A) $x^2 + x - 5$ (B) $x^2 + x + 1$
(C) $x^2 - 2$ (D) $x^2 + 5$

- (C) 2. 若 $(3x^4 - 5x^2 + 4x) \div 3x$ 的商式為 $x^3 + ax + b$ ，則 $b + a = ?$

- (A) -3 (B) 3 (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

- (A) 3. 已知多項式 B 除以 $x - 1$ 得商式為 $x + 5$ ，餘式為 8 ，如果改將多項式 B 除以 $x + 1$ ，則餘式 = ?

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

- (B) 4. 多項式 $(13x + a)(bx + c) = 221x^2 + 2x - 3$ ，其中 $b = ?$

- (A) 7 (B) 17 (C) 27 (D) 37

- (A) 5. 若 $x^2 + 3x + 4 = 0$ ，則 $(x^2 + 3x)^2 + 5(x^2 + 3x) + 4 = ?$

- (A) 0 (B) 8 (C) 16 (D) 20

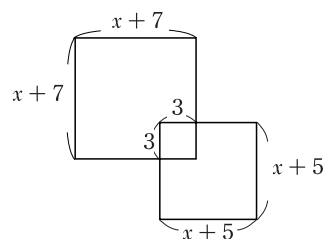
- (C) 6. 右圖為兩正方形重疊後的圖形，其所涵蓋區域的總面積為何？

- (A) $x^2 + 24x + 65$
(B) $x^2 + 4x + 83$
(C) $2x^2 + 24x + 65$
(D) $2x^2 + 4x + 83$

$$6. \text{ 面積} = (x + 5)^2 + (x + 7)^2 - 3^2$$

$$= x^2 + 10x + 25 + x^2 + 14x + 49 - 9$$

$$= 2x^2 + 24x + 65$$



$$1. \begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ x - 1 \overline{) x^3 + 0 - 3x + 5} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 3x + 5 \\ \underline{x^2 - x} \\ -2x + 5 \\ \underline{-2x + 2} \\ 3 \end{array}$$

$$2. (3x^4 - 5x^2 + 4x) \div 3x = x^3 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{3}, b = \frac{4}{3}, b + a = \frac{4-5}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$3. B = (x - 1)(x + 5) + 8 = x^2 + 4x + 3$$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x + 1 \overline{) x^2 + 4x + 3} \\ \underline{x^2 + x} \\ 3x + 3 \\ \underline{3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

$$4. 13bx^2 + abx + 13cx + ac = 221x^2 + 2x - 3,$$

$$b = 221 \div 13 = 17$$

$$5. x^2 + 3x = -4 \text{ 代入 } (x^2 + 3x)^2 + 5(x^2 + 3x) + 4 =$$

$$\Rightarrow (-4)^2 + 5(-4) + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$$



基本觀念題

(B) 1. 下列數學式，不是多項式的數學式有幾個呢？ 1. 非多項式為：(b)、(d)、(e)，共3個

(a) $3x - x^2 - 1$ (b) $\frac{1}{x} + 3$ (c) $\frac{1}{5}x^2 + 3$ (d) $\sqrt{x} + 2$ (e) $|x|^2 + x + 1$ (f) 17

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(A) 2. 展開 $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2$ 為下列何者？

(A) $x^4 - 3x^2 - 2x$ (B) $x^4 - 3x^2 - 2x + 1$ 2. 原式 = $(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1)$
= $x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - 3x^2 - 2x$
(C) $x^4 - x^2 - x + 1$ (D) $x^4 - x^2 + x$

(C) 3. 若 $(a + 3)x^2 + (b - 1)x + (2a - b + 3)$ 為常數多項式，則此多項式為何？

(A) -2 (B) $x + 2$ (C) -4 (D) $x - 4$ 3. $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$; $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$
故多項式為 $2(-3) - 1 + 3 = -4$

(C) 4. 若 $(3x + 1)(x^2 - ax + 1) = bx^3 + 2x^2 + cx + d$ ，求 $a + b + c + d = ?$

(A) 5 (B) 6 4. 展開後得 $3x^3 - 3ax^2 + 3x + x^2 - ax + 1 = 3x^3 + (1 - 3a)x^2 + (3 - a)x + 1$
比較係數得 $b = 3, 1 - 3a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, c = \frac{10}{3}, d = 1; a + b + c + d = 7$
(C) 7 (D) 8

(C) 5. 若有一多項式 $a(x^3 - x^2) + b(x^3 - x + 2) + x^2 + ax + 2$ 為一次多項式，請問： $2a + b$ 為何呢？

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 5. 原式 = $(a + b)x^3 + (1 - a)x^2 + (a - b)x + 2b + 2$
則 $a + b = 0, 1 - a = 0$
 $\Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow 2a + b = 1$

(C) 6. 若 $(3x^4 - 6x^3 + 2x + 6) \div 3x^2$ 的商式為 p ，餘式為 q ，則 $p + q = ?$

(A) $x^2 - 6$ (B) $x^2 + 4x + 6$ (C) $x^2 + 6$ (D) $4x + 6$ 6. $p + q = x^2 - 2x + 2x + 6 = x^2 + 6$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x \\ 3x^2 \overline{) 3x^4 - 6x^3 + 2x + 6} \\ \underline{3x^4} \\ -6x^3 \\ \underline{-6x^3} \\ 2x + 6 \end{array}$$

(A) 7. 在 $(x^2 - 100) + (x^2 - 99) + \dots + (x^2 - 2) + (x^2 - 1)$ 中，最後多項式的次數應為多少？

(A) 2 (B) 3 (C) 99 (D) 100 7. 原式 = $100x^2 - 5050$ ，多項式次數為 2

(C) 8. 若 $(x - 1)(58x + 7) + (8x - 7)^2 + (101x - 100)^2 = ax^2 + bx + c$ ，則 $a + b + c = ?$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 8. 令 $x = 1$ 代入 $\Rightarrow 0 + 1 + 1 = 2$

(D) 9. 已知 B 為一多項式，且 $B \cdot (-4x + 5) = -8x^2 + 14x - 5$ ，則 $B = ?$

(A) $-2x - 1$ (B) $-2x + 1$ (C) $2x + 1$ (D) $2x - 1$ 9.
$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ -4x + 5 \overline{) -8x^2 + 14x - 5} \\ \underline{-8x^2 + 10x} \\ 4x - 5 \\ \underline{4x - 5} \\ 0 \end{array}$$

(B) 10. 在 $(2x^2 - x + 5)(3x^2 - 1 + 2x)$ 的展開式中， x^2 的係數為何？

- (A) 10 (B) 11
(C) 12 (D) 13

10. $\therefore (2x^2 - x + 5)(3x^2 + 2x - 1)$, $\therefore x^2$ 的係數為 $-2 - 2 + 15 = 11$

(C) 11. 已知 C 、 D 為兩多項式，若 $2C + 3D = 4x^2 + 6x - 3$ ， $C - 2D = 2x^2 - 4x + 2$ ，則求 $C \div D$ 的商式和餘式之差為何呢？

- (A) $2x$
(B) $\frac{3}{2}x$
(C) x
(D) $\frac{x}{2}$

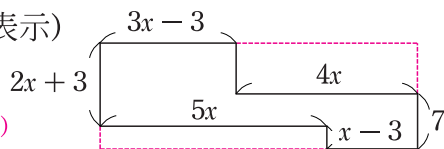
11. $\begin{cases} 2C + 3D = 4x^2 + 6x - 3 \\ C - 2D = 2x^2 - 4x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2x^2 \\ D = 2x - 1 \end{cases}$
則商式為 $x + \frac{1}{2}$ ，餘式為 $\frac{1}{2}$ ，其差為 x

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \overline{) 2x^2 + 0x + 0} \\ \underline{2x^2 - x} \\ x + 0 \\ - \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \end{array}$$

(D) 12. 如右圖，此圖形的面積為下列何者？(以 x 的式子表示)

- (A) $14x^2 + 34x$
(B) $4x^2 + 4x$
(C) $14x^2 + 4x$
(D) $4x^2 + 34x$

12. 面積 = $(7x - 3)(3x) - (3x - 7)4x - 5x(x - 3)$
 $= 21x^2 - 9x - 12x^2 + 28x - 5x^2 + 15x$
 $= 4x^2 + 34x$



(D) 13. 設 A 為一個 x 的多項式，且 $\frac{4x^3 + 3x - 1}{A} = 2x + 1 - \frac{3}{A}$ ，則 A 為下列何者？

- (A) $2x^2 - 2x + 4$ (B) $2x^2 - 2x + 2$
(C) $2x^2 + x + 2$ (D) $2x^2 - x + 2$

13. 同乘 $A \Rightarrow 4x^3 + 3x - 1 = (2x + 1) \cdot A - 3$
 $\Rightarrow 4x^3 + 3x + 2 = (2x + 1) \cdot A$
 $A = 4x^3 + 3x + 2 \div (2x + 1) = 2x^2 - x + 2$

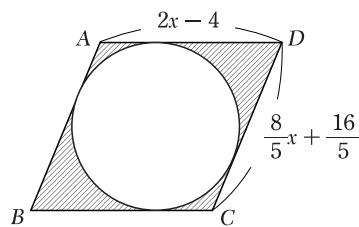
(A) 14. 若 x 是實數，且 $x^2 + 2x - 5 = 0$ ，則 $(x + 7)(x + 3)(x - 1)(x - 5) = ?$

- (A) -60 (B) 60
(C) -30 (D) 30

14. 原式 = $(x + 7)(x - 5)(x + 3)(x - 1)$
 $= (x^2 + 2x - 35)(x^2 + 2x - 3) = (5 - 35)(5 - 3)$
 $= (-30) \times 2 = -60$

(D) 15. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 內切一個圓，圓的直徑是 \overline{CD} 的 $\frac{5}{4}$ ，試求斜線面積為何？

- (A) $(4 - \pi)x^2 - 2\pi x - 16 - 4\pi$
(B) $(4 - \pi)x^2 + 2\pi x - 20\pi$
(C) $(4 - \pi)x^2 + 4\pi x - 20\pi$
(D) $(4 - \pi)x^2 - 4\pi x - 16 - 4\pi$



15. 圓的直徑 = $\frac{5}{4} \times \frac{8}{5}(x + 2) = 2x + 4$ ，半徑為 $x + 2$

斜線面積 = $(2x - 4)(2x + 4) - (x + 2)^2\pi = 4x^2 - 16 - \pi x^2 - 4\pi x - 4\pi$
 $= (4 - \pi)x^2 - 4\pi x - 16 - 4\pi$



(A) 1. 化簡 $(\frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y) - (\frac{20}{3}x - \frac{11}{12}y)$ 之後，可得下列哪一個結果？

95 基測一

- (A) $-5x - \frac{13}{4}y$
(B) $-60x - 39y$
(C) $-70x - 14y$
(D) $-\frac{25}{3}x - \frac{61}{12}y$

1. 原式 = $\frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{20}{3}x + \frac{11}{12}y$
 $= (\frac{5}{3}x - \frac{20}{3}x) - (\frac{25}{6}y - \frac{11}{12}y) = -\frac{15}{3}x - (\frac{25}{6}y - \frac{11}{12}y)$
 $= -5x - \frac{39}{12}y = -5x - \frac{13}{4}y$

- (D) 2. 若多項式 A 除以 $2x + 1$ 得商式為 $3x - 4$ ，餘式為 5 ，則 $A = ?$ 93 基測二
- (A) $6x^2 - 5x - 4$ (B) $6x^2 - 5x - 9$ $2. A = (2x + 1)(3x - 4) + 5 = 6x^2 - 8x + 3x - 4 + 5 = 6x^2 - 5x + 1$
 (C) $6x^2 + 5x + 1$ (D) $6x^2 - 5x + 1$

- (B) 3. 已知有一多項式除以 $(x - 2)$ 得商式為 $(2x - 3)$ ，餘式為 3 ，若此多項式除以 $(2x + 3)$ ，得商式為何？ 93 基測一
- (A) $x + 5$ (B) $x - 5$ $3. 原式 = (x - 2)(2x - 3) + 3 = 2x^2 - 7x + 6 + 3 = 2x^2 - 7x + 9$
 (C) $x + 2$ (D) $x - 2$
- $$\begin{array}{r} x - 5 \\ 2x + 3 \overline{) 2x^2 - 7x + 9} \\ \underline{2x^2 + 3x} \\ -10x + 9 \\ \underline{-10x - 15} \\ 24 \end{array}$$

- (B) 4. 下列哪一個選項為 $[(2x^2 + x - 3) - (-x^2 - 3x + 4)] \div (x - 1)$ 的商式？ 92 基測二
- (A) $3x - 7$ (B) $3x + 7$ $4. 原式 = [2x^2 + x - 3 + x^2 + 3x - 4] \div (x - 1) = (3x^2 + 4x - 7) \div (x - 1) = (3x + 7)$
 (C) $x - 1$ (D) $x + 1$

- (D) 5. 下列四個敘述，哪一個是正確的？ 92 基測一
- (A) $3x$ 表示 $3 + x$ (B) x^2 表示 $x + x$
 (C) $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$ (D) $3x + 5$ 表示 $x + x + x + 5$
5. (A) $3x$ 表示 $3 \times x$
 (B) x^2 表示 $x \times x$
 (C) $3x^2$ 表示 $3 \times x \times x$
 (D) $3x + 5$ 表示 $x + x + x + 5$



- (D) 1. 若多項式 A 、 B 皆為 x 的三次多項式，則下列三人的敘述何者正確？
- 甲生： $A - B$ 可能只有一項常數項
 乙生： $A - B$ 可能是 x 的三次多項式
 丙生： $A - B$ 可能是 x 的二次多項式
- (A) 甲對 (B) 乙對
 (C) 丙對 (D) 全部說的都對
1. 假設 A 、 B 為兩多項式，其次數分別是 m 、 n ，則
 ①若 $m = n$ ，則 $A \pm B$ 的次數不大於 m 次
 ②若 $m > n$ ，則 $A \pm B$ 的次數是 m 次

- (A) 2. 設 a 、 b 為整數，若 $A = |a - 2|x^3 + |b + 3|x^2 + ax - b$ 為一次多項式，求 $a + b = ?$
- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
2. $\because A$ 為一次多項式， $\therefore \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$
 $\therefore a + b = 2 - 3 = -1$

- (B) 3. 多項式 $5x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ 與 $3x^2 - 6x + 2$ 的和加上下列何式等於零次多項式？
- (A) $5x^3 + x^2 - 2x + 1$ (B) $-5x^3 - x^2 + 2x + 2$ $3. (5x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + (3x^2 - 6x + 2) = 5x^3 + x^2 - 2x - 1$
 (C) $5x^3 + x^2 - 2x - 1$ (D) $-5x^3 - x^2 - 2x - 2$ \Rightarrow 加上 $-5x^3 - x^2 + 2x + n (n \neq 1)$

- (B) 4. 假設 $A = x^2 + xy - 2y^2$ ， $B = x^2 - 2xy + 3y^2$ ， $C = -3x^2 + 5y^2$ ，則 $A - 2B + 3C = ?$
- (A) $-6x^2 + 3xy + 5y^2$
 (B) $-10x^2 + 5xy + 7y^2$ $4. A - 2B + 3C = (x^2 + xy - 2y^2) - 2(x^2 - 2xy + 3y^2) + 3(-3x^2 + 5y^2) = (1 - 2 - 9)x^2 + (1 + 4)xy + (-2 - 6 + 15)y^2 = -10x^2 + 5xy + 7y^2$
 (C) $-9x^2 - 6xy + 25y^2$
 (D) $9x^2 + 6xy + 25y^2$

- (B) 5. 若多項式 $x^3 + 4x^2 + 5x - 5$ 除以 A ，得商式 $x + 2$ ，餘式 $2x - 3$ ，請問： $A = ?$
- (A) $x^2 - 2x - 1$ (B) $x^2 + 2x - 1$ $5. x^3 + 4x^2 + 5x - 5 = A \times (x + 2) + (2x - 3)$
 (C) $2x^2 + 2x - 1$ (D) $2x^2 + 2x - 2$ $x^3 + 4x^2 + 5x - 5 - 2x + 3 = A \times (x + 2)$
 $\Rightarrow A = x^2 + 2x - 1$

(D) 6. 假設 $3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x^2 - 2x + 3)(px + q) + r$, 請問: p 、 q 、 r 的大小為何呢?

- (A) $q > r > p$ (B) $q > p > r$
 (C) $p > r > q$ (D) $p > q > r$

$$6. \begin{array}{r} 3+2 \\ 1-2+3 \overline{) 3-4+5-6} \\ \underline{3-6+9} \\ 2-4-6 \\ \underline{2-4+6} \\ -12 \end{array} \Rightarrow px+q=3x+2, r=-12$$

$$\Rightarrow p > q > r$$

(A) 7. 有一多項式 $a(x+1)(x-2) + b(x+2)(x-1) + (x-2)(x+1)$ 化簡為 $2x^2 + 6x + c$, 則 $a+b+c = ?$

- (A) -3 (B) -4
 (C) -5 (D) -6

$$7. a(x^2-x-2) + b(x^2+x-2) + (x^2-x-2) = 2x^2 + 6x + c$$

$$(a+b+1)x^2 + (-a+b-1)x + (-2a-2b-2) = 2x^2 + 6x + c$$

$$\begin{cases} a+b+1=2 \\ -a+b-1=6 \\ -2a-2b-2=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b-a=7 \end{cases}, c=-4, \text{ 則 } a+b+c=-3$$

(B) 8. 有一多項式為 $(ax^5 - x^4 + x^2 - 2x + 4) + (bx^4 - x + 2)$, 假設為二次多項式, 請問: $a+b = ?$

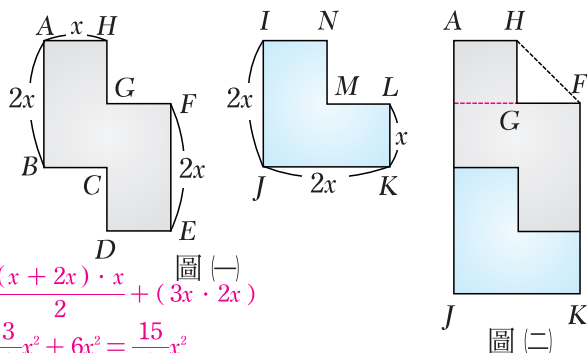
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

$$8. ax^5 + (b-1)x^4 + x^2 - 3x + 6 \text{ 為二次多項式}$$

$$\Rightarrow a=0, b-1=0, b=1 \Rightarrow a+b=1$$

(D) 9. 如圖(一)有俄羅斯方塊 $ABCDEFGH$ 及 $IJKLMN$ 兩塊合併在一起後如圖(二), 連接 H 、 F 兩點後, 試求五邊形 $AJKFH$ 的面積為何呢?

- (A) $\frac{3}{2}x^2 + 6x$ (B) $\frac{5}{2}x^2$
 (C) $\frac{3x^2 + 12x}{2}$ (D) $\frac{15}{2}x^2$



$$9. AJKFH \text{ 面積} = \frac{(x+2x) \cdot x}{2} + (3x \cdot 2x)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 6x^2 = \frac{15}{2}x^2$$

(D) 10. 如右圖, 四邊形 $ABCD$ 為長方形, 則灰色部分的面積可以如何表示?

- (A) $\frac{x^2 + 5x + 1}{2}$
 (B) $\frac{x^2 + 5x - 1}{2}$
 (C) $x^2 + 5x - 1$
 (D) $x^2 + 5x + 1$

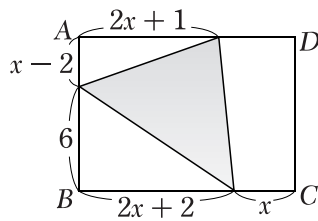
$$10. [(x-2+6)(3x+2)] - \left[\frac{(2x+1)(x-2)}{2} \right]$$

$$- \left[\frac{6(2x+2)}{2} \right] - \left[\frac{x+(x+1)}{2} \cdot (x+4) \right]$$

$$= (3x^2 + 14x + 8) - \left(\frac{2x^2 - 3x - 2}{2} \right) - (6x + 6) - \left(\frac{2x^2 + 9x + 4}{2} \right)$$

$$= \frac{6x^2 + 28x + 16 - 2x^2 + 3x + 2 - 12x - 12 - 2x^2 - 9x - 4}{2}$$

$$= x^2 + 5x + 1$$



(A) 11. 若一多項式 $ax^2 + bx + c$, a 、 b 、 c 均為整數, 且 $2|a| + |b+1| + 3|c+2| = 1$, 請問: 該多項式的次數為何呢?

- (A) 零次或一次 (B) 零次或二次
 (C) 一次或二次 (D) 三次

$$11. |a|=0, |b+1|=1, |c+2|=0$$

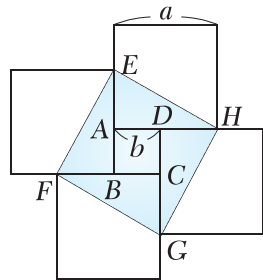
$$\Rightarrow a=0, b=0 \text{ 或 } -2, c=-2$$

$$\Rightarrow \text{多項式為 } -2 \text{ 或多項式為 } -2x-2$$

$$\Rightarrow \text{多項式為零次或一次多項式}$$

(A) 12. 將一塊邊長為 b 公分的正方形 $ABCD$, 與四塊邊長為 a 公分的正方形拼成如附圖所示, 其中 $a > b$. 今將 E 、 F 、 G 、 H 四點連接起來成爲一個四邊形, 則四邊形 $EFGH$ 的面積爲多少平方公分?

- (A) $2a^2 - 2ab + b^2$
 (B) $a^2 - 2ab + b^2$
 (C) $2a^2 + 2ab + b^2$
 (D) $a^2 - 2ab - b^2$



$$12. (1) \overline{AE} = a - b \text{ (公分)},$$

四塊色塊直角三角形面積

$$[a \times (a - b) \div 2] \times 4 = \frac{(a^2 - ab)}{2} \times 4 = 2a^2 - 2ab \text{ (平方公分)},$$

四邊形 $EFGH$ 面積 $(2a^2 - 2ab) + b^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$ (平方公分)

第 10 單元 乘法公式與因式分解

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★★☆☆ 3 優先選讀率★★☆☆☆

121

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = -4ab$ 是否正確?

💡 $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$

能力一

(O) 2. 下列敘述是否正確? $\because a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ba + a^2, \therefore (a-b)^2 = (b-a)^2$ 。

💡 $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ba + a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ba \Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2$

(O) 3. 如下圖(一), 其斜線面積可表示為 $a^2 - 2ab + b^2$ 。

💡 斜線面積 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(X) 4. 如下圖(二), 其面積和可表示為 $a^2 + b^2$ 。

💡 面積和 $= (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(X) 5. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ 。

💡 $a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

(O) 6. 若 $A + 1 = 299^2$, 則 $A = (299 - 1)(299 + 1)$ 。

💡 $A + 1 = 299^2 \Rightarrow A = 299^2 - 1 = (299 - 1)(299 + 1)$

能力二

(X) 7. 如下圖(三), 大圓半徑為 R , 小圓半徑為 r , 其斜線面積為 $\pi(R - r)^2$ 。

💡 斜線面積 $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r)$

(X) 8. $4x^2 - ax + 9$ 為完全平方式, 則 $a = -12$ 。

💡 $a = \pm 12 \Rightarrow 4x^2 \pm 12x + 9 = (2x \pm 3)^2$

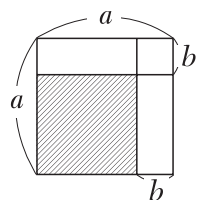
(O) 9. $3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$, 則 $x^2 - 4$ 為 $3x^2 - 12$ 之因式。

💡 $3x^2 - 12 = 3(x + 2)(x - 2)$ 的因式有 3 、 $(x - 2)$ 、 $(x + 2)$ 、 $3(x - 2)$ 、 $3(x + 2)$ 、 $x^2 - 4$ 、 $3x^2 - 12$

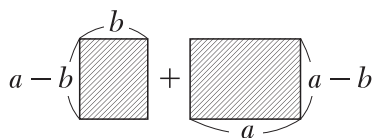
(O) 10. 因式分解 $2x^2 - 3 + x$ 時, 其十字交乘的型式為 $2x \begin{array}{l} \diagup 3 \\ \diagdown -1 \end{array}$ 。

💡 $2x^2 - 3 + x = (2x + 3)(x - 1)$

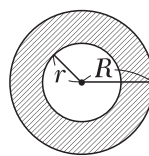
$$\begin{array}{r} 2x \quad 3 \\ x \quad -1 \\ \hline -2x + 3x = x \end{array}$$



圖(一)



圖(二)



圖(三)

數學 健康狀況檢核表

※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

乘法公式的展開與應用

一 乘法公式

係指二個(含)以上多項式(A 、 B)透過乘法結合成另一個多項式(C)的公式,其用途可用於因式分解、數的計算或多項式的化簡。亦即 $A \times B = C$, C 為 A 、 B 之倍式; A 、 B 為 C 之因式。

二 乘法公式的種類

1.	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	分配律公式
2.	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	和與差的平方公式
3.	$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	平方差公式
4.	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$	三連加的平方公式

三 乘法公式的求值

1.	已知 $(a+b)$ 和 ab	(1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (2) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
2.	已知 $(a-b)$ 和 ab	(1) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ (2) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
3.	已知 $x + \frac{1}{x}$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$
4.	已知 $x - \frac{1}{x}$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2$
5.	若 $a+b+c=0$	$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$

師說 1

<乘法公式的運算 I>

演練 1

1. $a = 55 \times 45$, $b = 75^2 - 25^2$, 則 $b - a = ?$

2. 小於 $(9.94)^2$ 的最大整數是多少?

● 解

1. $a = (50 + 5)(50 - 5) = 2500 - 25 = 2475$

$b = (75 - 25)(75 + 25) = 50 \times 100 = 5000$

$b - a = 5000 - 2475 = \underline{2525}$

2. 因為 $(9.94)^2 = (10 - 0.06)^2$

$= 10^2 - 2 \times 10 \times 0.06 + (0.06)^2$

$= 100 - 1.2 + 0.0036 = 98.8036$

 所以小於 $(9.94)^2$ 的最大整數為 98

1. 若 $a = 101 \times 99$, $b = 375^2 - 175^2$, 則 $b - a = ?$

2. 大於 $(4.99)^2$ 的最小整數為何?

● 解

1. $a = 101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1)$
 $= 100^2 - 1^2 = 9999$

$b = 375^2 - 175^2 = (375 - 175)(375 + 175)$
 $= 200 \times 550 = 110000$

$b - a = 110000 - 9999 = \underline{100001}$

2. $(4.99)^2 = (5 - 0.01)^2$

$= 25 - 2 \times 5 \times 0.01 + 0.01^2$

$= 25 - 0.1 + 0.0001 = 24.9001$

 所以大於 $(4.99)^2$ 的最小整數為 25

師說 2

〈乘法公式的運算 II〉

演練 2

1. 試求 $(99\frac{1}{2})^2 = 99^2 + a$ ，求 $a = ?$

2. 試求 $\frac{197^2 - 103^2}{94 \times 50} = ?$

解

$$1. (99\frac{1}{2})^2 = (99 + \frac{1}{2})^2$$

$$= 99^2 + 2 \times 99 \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$$

所以 $a = 2 \times 99 \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = 99 + \frac{1}{4} = \underline{99\frac{1}{4}}$

$$2. \text{原式} = \frac{(197 + 103) \times (197 - 103)}{94 \times 50}$$

$$= \frac{300 \times 94}{94 \times 50}$$

$$= \underline{6}$$

1. 試求 $(102\frac{1}{4})^2 = 102^2 + a$ ，求 $a = ?$

2. 試求 $-\left(\frac{125^2 - 190^2}{70 \times 65}\right) = ?$

解

$$1. (102\frac{1}{4})^2 = (102 + \frac{1}{4})^2$$

$$= 102^2 + 2 \times 102 \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2$$

$$= 102^2 + 51 + \frac{1}{16} = 102^2 + 51\frac{1}{16}$$

所以 $a = \underline{51\frac{1}{16}}$

$$2. -\left(\frac{125^2 - 190^2}{70 \times 65}\right) = \frac{-(125^2 - 190^2)}{70 \times 65}$$

$$= \frac{190^2 - 125^2}{70 \times 65} = \frac{(190 - 125)(190 + 125)}{70 \times 65}$$

$$= \frac{65 \times 315}{70 \times 65} = \underline{\frac{9}{2}}$$

師說 3

〈乘法公式的應用〉

演練 3

1. $a = 12345678 \times 12345678 - 12345679 \times 12345677$ ，請問 $a = ?$

2. 若 $a^2 + b^2 = 11$ ，試求 $(a + b)^2 + (a - b)^2 = ?$

3. 若 $x^2 - x + 1 = 0$ ， $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

解

1. 令 $b = 12345678$

$$a = b^2 - (b + 1) \times (b - 1) = b^2 - (b^2 - 1) = \underline{1}$$

2. $(a + b)^2 + (a - b)^2$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2 \times 11 = \underline{22}$$

3. $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 1$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 1^2 - 2 = \underline{-1}$$

1. 若 $a = 28825251 \times 28825253 - 28825252 \times 28825252$ ， $a = ?$

2. 已知 $9.9^2 = 98.01, 10.1^2 = 102.01$ ，試問 $10.1^2 + 9.9 \times 10.1 - 9.9^2 = ?$

3. 若 $x - \frac{1}{x} = 4$ ，則 $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

解

1. 令 28825252 為 b

$$a = (b - 1)(b + 1) - b^2 = b^2 - 1^2 - b^2 = \underline{-1}$$

2. $10.1^2 + 9.9 \times 10.1 - 9.9^2$

$$= (10.1^2 - 9.9^2) + (9.9 \times 10.1)$$

$$= (10.1 - 9.9)(10.1 + 9.9) + (10 - 0.1)(10 + 0.1)$$

$$= 0.2 \times 20 + (100 - 0.01) = \underline{103.99}$$

3. $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2 = 4^2 + 2 = \underline{18}$

同步評量 1

- (A) 1. 展開 $(-3-9x)(-3+9x)$ 的結果為下列何者?
 (A) $-81x^2+9$ (B) $-9-81x^2$ (C) $81x^2-9$ (D) $9+81x^2$
- (D) 2. 利用分配律求 $2008 \times 2007 \times (\frac{2007}{2008} - \frac{2008}{2007}) = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 4015 (D) -4015
- (C) 3. 請化簡 $1998 \times 2002 - 1997^2 = ?$
 (A) 11985 (B) 11986 (C) 11987 (D) 11988
- (B) 4. 展開 $(a^2+a+2)(a^2-a+2)$ 為下列何者?
 (A) a^4-3a^2-4 (B) a^4+3a^2+4 (C) a^4+3a^2-4 (D) a^4-3a^2+4
- (C) 5. 請用平方差公式，求 $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$ 的個位數為多少?
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7

1. $(-3-9x)(-3+9x) = (-3)^2 - (9x)^2 = 9 - 81x^2$

2. 原式 $= 2007^2 - 2008^2$
 $= (2007+2008)(2007-2008)$
 $= -4015$

3. 原式 $= (2000-2)(2000+2) - (2000-3)^2$
 $= (2000^2-2^2) - (2000-3)^2$
 $= 2000^2-4-2000^2+2 \times 2000 \times 3-9$
 $= -4+12000-9=11987$

4. $(a^2+a+2)(a^2-a+2) = [(a^2+2)+a][(a^2+2)-a] = (a^2+2)^2 - a^2 = a^4+4a^2+4-a^2 = a^4+3a^2+4$

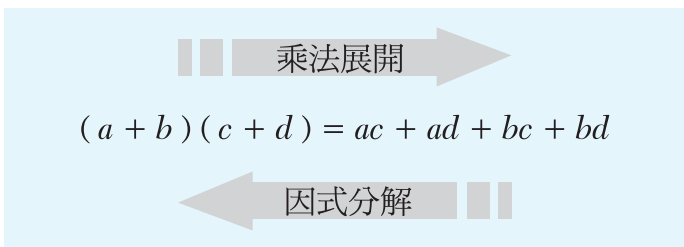
5. $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) = 2^{16}-1$,
 但 2^{16} 個位數是 6，所以 $2^{16}-1$ 個位數是 5

能力

一元二次式的因式分解

一 二次式的因式分解

兩個 x 的一次式乘法展開得一個二次式；
 反之，如果一個二次式可以化成兩個一
 次式的乘積，此過程稱為因式分解。



二 二次式的因式分解形式

1.	分配律提公因式法	$ab \pm ac = a(b \pm c)$	例如： $(a-b)(x-y) + c(b-a)(y-x)$ $= (a-b)(x-y) + c(a-b)(x-y)$ $= (x-y)(a-b)(1+c)$
2.	乘法公式法	(1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (2) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	例如： $(a+b)^2 + 2(a^2 - b^2) + (a-b)^2$ $= (a+b+a-b)^2 = 4a^2$
3.	十字交乘法 (用於二次三項式)	$x^2 + (a+b)x + ab$ $= (x+a)(x+b)$ $ax + bx = (a+b)x$	例如： $9x^2 + 35x - 4 = (9x-1)(x+4)$ $36x - x = 35x$

因式分解的重要性質

1. 因式分解後，連乘積中的每一個多項式，都是原多項式的因式。
2. 一個多項式本身既是自己的因式，也是自己的倍式。
3. 因式分解的結果，其質因式必為一次或高於一次的因式，而非常數因式，且各因式的係數，儘量不要以分數呈現。

師說 4

〈因式分解－分配律提公因式法〉

演練 4

請運用分配律法則做因式分解：

$$(1) 2a^4 + 4a^3 - 6a^2$$

$$(2) 6a^3x^4 - 8a^2x^5y - 14abx^6$$

$$(3) \frac{xy}{3} - \frac{x^2y^2}{3} + \frac{x^2y}{4}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= 2a^2(a^2 + 2a - 3) \\ &= 2a^2[(a^2 - 1) + (2a - 2)] \\ &= 2a^2[(a - 1)(a + 1) + 2(a - 1)] \\ &= 2a^2(a - 1)(a + 3) \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = 2ax^4(3a^2 - 4axy - 7bx^2)$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \frac{4xy}{12} - \frac{4x^2y^2}{12} + \frac{3x^2y}{12} \\ &= \frac{1}{12}xy(4 - 4xy + 3x) \end{aligned}$$

請運用分配律法則做因式分解：

$$(1) a(x + y) + b(x + y)$$

$$(2) (x - 2)(x - 1)^3 - (x - 2)^3(x - 1)$$

$$(3) (x - 2)^3 + (2 - x)(x^2 - 4x + 1)$$

解

$$(1) \text{原式} = (x + y)(a + b)$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (x - 2)(x - 1)[(x - 1)^2 - (x - 2)^2] \\ &= (x - 2)(x - 1)(x - 1 + x - 2) \\ &\quad (x - 1 - x + 2) \\ &= (x - 2)(x - 1)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= (x - 2)^3 - (x - 2)(x^2 - 4x + 1) \\ &= (x - 2)[(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 1)] \\ &= (x - 2)(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x - 1) \\ &= 3(x - 2) \end{aligned}$$

師說 5

〈因式分解－乘法公式法〉

演練 5

請運用乘法公式法做因式分解：

$$(1) (7x - 2y)^3 + y^2(2y - 7x)$$

$$(2) (x - 1)(2x + 3)^3 - (x - 1)^3(2x + 3)$$

$$(3) 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= (7x - 2y)^3 - y^2(7x - 2y) \\ &= (7x - 2y)[(7x - 2y)^2 - y^2] \\ &= (7x - 2y)(7x - y)(7x - 3y) \\ (2) \text{原式} &= (x - 1)(2x + 3)[(2x + 3)^2 - (x - 1)^2] \\ &= (x - 1)(2x + 3)[(2x + 3) + (x - 1)] \\ &\quad \times [(2x + 3) - (x - 1)] \\ &= (x - 1)(2x + 3)(3x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2 \\ &= (3x - 4y)^2 \end{aligned}$$

請運用乘法公式法做因式分解：

$$(1) x^4 + 5x^2 + 9$$

$$(2) 81x^4 - 16$$

$$(3) -4x^2 - y^2 + 4xy$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2 \\ &= (x^2 + 3)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (9x^2)^2 - 4^2 \\ &= (9x^2 + 4)(9x^2 - 4) \\ &= (9x^2 + 4)(3x + 2)(3x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= -(4x^2 - 4xy + y^2) \\ &= -(2x - y)^2 \end{aligned}$$

師說 6

〈因式分解—十字交乘法〉

演練 6

126

請運用十字交乘法分解下列各式：

(1) $x^2 + 10x + 24$

(2) $x^5 - 3x^3 - 4x$

(3) $(x^2 - x)^2 + 8(x - x^2) + 12$

● 解

(1) 原式 = $(x+4)(x+6)$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad 4 \\ \quad \quad \quad x \quad 6 \\ \hline (x+4)(x+6) \end{array}$$

(2) 原式 = $x(x^4 - 3x^2 - 4) = x(x^2 - 4)(x^2 + 1)$

$$= x(x-2)(x+2)(x^2+1)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \quad -4 \\ \quad \quad \quad x^2 \quad 1 \\ \hline (x^2-4)(x^2+1) \end{array}$$

(3) 原式 = $(x^2 - x) - 8(x^2 - x) + 12$

$$= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r} (x^2-x) \quad \quad -2 \\ \quad \quad \quad (x^2-x) \quad -6 \\ \hline (x^2-x-2)(x^2-x-6) \end{array}$$

$$= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

請運用十字交乘法分解下列各式：

(1) $-x^2 + xy + 6y^2$

(2) $x^4 - 5x^2 + 4$

(3) $5a^4b - 5a^3b^2 - 10a^2b^3$

● 解

(1) 原式 = $-(x^2 - xy - 6y^2)$

$$= -(x-3y)(x+2y)$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad -3y \\ \quad \quad \quad x \quad 2y \\ \hline (x-3y)(x+2y) \end{array}$$

(2) 原式 = $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

$$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \quad -1 \\ \quad \quad \quad x^2 \quad -4 \\ \hline (x^2-1)(x^2-4) \end{array}$$

$$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

(3) 原式 = $5a^2b(a^2 - ab - 2b^2)$

$$= 5a^2b(a-2b)(a+b)$$

$$\begin{array}{r} a \quad \quad -2b \\ \quad \quad \quad a \quad b \\ \hline (a-2b)(a+b) \end{array}$$

解題小偏方 變號法則：因式分解時，如遇到括號內文字相同，但符號相反，習慣上可將後面括號內各項變號。

(1) 若括號為奇數次方，則括號前的符號變號。

$$Ex: +(a-b) = -(b-a), -(a-b)^3 = +(b-a)^3$$

(2) 若括號為偶數次方，則括號前的符號不變號。

$$Ex: -(a-b)^2 = -(b-a)^2, (a-b)^6 = +(b-a)^6$$

同步評量 2

 (D) 1. 試分解 $3(x-1)^2 + 2x - 10$ 為下列何者？

- (A) $(x-1)(3x-7)$ (B) $(x+1)(3x+7)$
 (C) $(x-1)(3x+7)$ (D) $(x+1)(3x-7)$

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= 3(x^2 - 2x + 1) + 2x - 10 \\ &= 3x^2 - 6x + 3 + 2x - 10 \\ &= 3x^2 - 4x - 7 \\ &= (3x-7)(x+1) \end{aligned}$$

 (D) 2. 已知 $a < 0$ ，若 $x^2 + ax + 5$ 可以因式分解，則 a 的值為多少？

- (A) -2 (B) -3 (C) -5 (D) -6

$$\begin{array}{r} x \quad \quad -5 \\ \quad \quad \quad x \quad -1 \\ \hline -5x - 1x = -6x, a = -6 \end{array}$$

 (B) 3. 若 $3x^2 + mx - 12$ 為 $x-1$ 的倍式，則亦為下列何者的倍式？

- (A) $x+3$ (B) $x+4$ (C) $2x+3$ (D) $2x-3$

$$\begin{aligned} 3. x=1 \text{ 代入: } & 3+m-12=0, m=9, \\ & 3x^2+9x-12=3(x^2+3x-4) \\ & = 3(x-1)(x+4) \end{aligned}$$

 (D) 4. 若 $39x^2 - 38x + 8$ 可因式分解成 $(ax+b)(3x+c)$ ，其中 a, b, c 均為整數，下列敘述何者正確？

- (A) $a=3$ (B) $b=-2$ (C) $c=-4$ (D) $a+b-c=11$

$$\begin{aligned} 4. & 39x^2 - 38x + 8 = (13x-4)(3x-2) \\ & \text{對照係數可得 } a=13, b=-4, c=-2 \end{aligned}$$



基本觀念題

(B) 1. 下列四個式子中，(甲) $a+b+c$ ，(乙) $a-b+c$ ，(丙) $a+b-c$ ，(丁) $a-b-c$ ，其中哪二個是 $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ 的因式呢？

- (A) 甲和乙 (B) 乙和丙
(C) 丙和丁 (D) 丁和甲

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= a^2 - (b-c)^2 \\ &= (a-b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

(C) 2. 若 $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = (x+2)(x-2)(2x+3)$ ，請問：其所有的因式(不含常數因式)有多少個呢？

- (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

$$\begin{aligned} 2. 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 \text{ 的因式有：} \\ (x+2)、(x-2)、(2x+3)、(x+2)(x-2)、 \\ (x+2)(2x+3)、(x-2)(2x+3)、(x+2)(x-2)(2x+3) \\ \text{共 7 個} \end{aligned}$$

(C) 3. 若 $2x-3$ 是 $4x^2 + 2x + m$ 的因式，請問： m 值為何呢？

- (A) -6
(B) 6
(C) -12
(D) 12

$$\begin{array}{r} 3. \quad \frac{2x+4}{2x-3} \overline{) 4x^2 + 2x + m} \\ \underline{4x^2 - 6x} \\ 8x + m \\ \underline{8x - 12} \\ m + 12 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} &\because 2x-3 \text{ 是 } 4x^2 + 2x + m \text{ 的因式} \\ &\therefore 2x-3 \text{ 能整除 } 4x^2 + 2x + m \\ &\Rightarrow m + 12 = 0, m = -12 \end{aligned}$$

(D) 4. 下列分別是甲、乙、丙、丁，利用十字交乘法分解 $21x^2 - 41x - 40$ 的過程，誰的作法正確？

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁

4. 如題，丁是正確的

(A) 5. 下列各多項式，何者為 $xy - 8 + 4x - 2y$ 的因式呢？

- (A) $x-2$ (B) $x+2$ (C) $x+4$ (D) $y-4$

$$\begin{aligned} 5. \text{原式} &= (xy - 2y) + (4x - 8) \\ &= y(x-2) + 4(x-2) \\ &= (x-2)(y+4) \end{aligned}$$

(B) 6. 試求 $(\sqrt{11} + \sqrt{13})^2 (\sqrt{11} - \sqrt{13})^2$ 值為何呢？

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

$$6. \text{原式} = [(\sqrt{11} + \sqrt{13})(\sqrt{11} - \sqrt{13})]^2 = (11 - 13)^2 = 4$$

(B) 7. 請用乘法公式計算 $1002^2 - 1009 \times 1001 = ?$

- (A) 6005 (B) -6005
(C) 6055 (D) -6055

$$\begin{aligned} 7. \text{令 } 1005 &= x, \\ \text{則 } (x-3)^2 - (x+4)(x-4) &= x^2 - 6x + 9 - x^2 + 16 = -6x + 25 \\ &= -6(1005) + 25 = -6005 \end{aligned}$$

(D) 8. 若 $x - y + 1 = 0$ ，求 $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3$ 之值為何？

- (A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 8

$$8. (x^2 - 2xy + y^2) - (4x - 4y) + 3 = (x-y)^2 - 4(x-y) + 3 = 8$$

(C) 9. 因式分解 $x^2 + 2(b-a)x + (a-b)^2$ 為下列何者？

- (A) $(x+a-b)^2$ (B) $(x+a-b)(x-a+b)$
(C) $(x-a+b)^2$ (D) $(x+a+b)(x+a-b)$

$$\begin{aligned} 9. \text{原式} &= x^2 - 2x(a-b) + (a-b)^2 \\ &= (x-a+b)^2 \end{aligned}$$

(C) 10. 試求 $\frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{200}} \times \frac{3}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{200}}$ 之值為何呢？

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

$$10. \frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{200}} \times \frac{3}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{200}} = \frac{3}{(7-6)^{200}} = \frac{3}{1} = 3$$

(D) 11. 若設 $a^2 - 5a + 1 = 0$ ，則 $(a-2)(a-3) = ?$

- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5

$$11. a^2 - 5a + 1 = 0, a^2 - 5a = -1, \\ (a-2)(a-3) = a^2 - 5a + 6 = -1 + 6 = 5$$

(D) 12. 試計算 $2 \times 399^2 - 5 \times 399 - 7$ 的結果為下列哪一數？

- (A) 323300 (B) 322000
(C) 317400 (D) 316400

$$12. \text{原式} = (2 \times 399 - 7)(399 + 1) \\ = 791 \times 400 = 316400$$

(B) 13. 已知 a, b 均為正整數，若 $(3x-a)^2 = 9x^2 - bx + 16$ ，試求 $2b-a$ 的值為何呢？

- (A) 22 (B) 44
(C) 55 (D) 66

$$13. (3x-a)^2 = 9x^2 - 6ax + a^2 = 9x^2 - bx + 16, \\ \text{經過對照可知} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \text{ (負不合)} \\ -6a = -b \Rightarrow -6 \times 4 = -b \Rightarrow b = 24, 2b - a = 2 \times 24 - 4 = 44$$

(A) 14. 下列各多項式，何者不是 $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 的因式呢？

- (A) $x-1$ (B) $x+1$
(C) $x-2$ (D) $x+2$

$$14. x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ = x^2(x+1) - 4(x+1) \\ = (x+1)(x^2 - 4) \\ = (x+1)(x-2)(x+2)$$

(A) 15. 試求 $(\sqrt{13} + \sqrt{12})^{101} (\sqrt{12} - \sqrt{13})^{101}$ 之值為何呢？

- (A) -1 (B) 0
(C) 1 (D) 2

$$15. (\sqrt{12} + \sqrt{13})^{101} (\sqrt{12} - \sqrt{13})^{101} \\ = [(\sqrt{12} + \sqrt{13})(\sqrt{12} - \sqrt{13})]^{101} = (12 - 13)^{101} = -1$$



(D) 1. 計算 $(320^2 - 160^2) \times \frac{1}{160}$ 之值為何？

- (A) 3 (B) 160
(C) 320 (D) 480

97 基測二

$$1. \text{原式} = (320 + 160)(320 - 160) \times \frac{1}{160} \\ = 480 \times 160 \times \frac{1}{160} = 480$$

(B) 2. 有兩多項式 $A = x^2(2x-3)(5x+6)$ ， $B = (5x+6)^2(4x^2-9)$ 。關於 A, B 兩多項式，下列敘述何者正確？

- (A) $x(5x+6)$ 為 A, B 的公因式
(B) $(2x-3)(5x+6)$ 為 A, B 的公因式
(C) $x(2x-3)(5x+6)$ 為 A, B 的公倍式
(D) $(2x-3)^2(5x+6)^2$ 為 A, B 的公倍式

97 基測二

$$2. A = x^2(2x-3)(5x+6) \\ B = (5x+6)^2(2x-3)(2x+3) \\ A, B \text{ 公因式: } (2x-3)(5x+6) \\ A, B \text{ 公倍式: } x^2(5x+6)(4x^2-9)$$

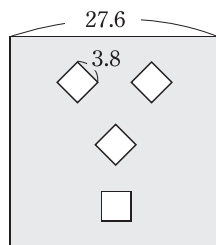
(C) 3. 有兩個多項式 $M = 2x^2 + 3x + 1$ ， $N = 4x^2 - 4x - 3$ ，則下列哪一個為 M 與 N 的公因式？

- (A) $x+1$ (B) $x-1$
(C) $2x+1$ (D) $2x-1$

97 基測一

$$3. \begin{cases} M = (2x+1)(x+1) \\ N = (2x+1)(2x-3) \end{cases} \Rightarrow M, N \text{ 公因式為 } (2x+1)$$

- (D) 4. 如右圖，阿倉用一張邊長為 27.6 公分的正方形厚紙板，剪下邊長皆為 3.8 公分的四個正方形，形成一個有眼、鼻、口的面具。求此面具的面積為多少平方公分？



97 基測一

(單位：公分)

- (A) 552
(B) 566.44
(C) 656.88
(D) 704

$$\begin{aligned} 4. \text{面積} &= (27.6)^2 - 4 \times (3.8)^2 = (27.6)^2 - (2 \times 3.8)^2 \\ &= (27.6)^2 - (7.6)^2 = (27.6 - 7.6)(27.6 + 7.6) \\ &= 20 \times 35.2 = 704 \end{aligned}$$

- (B) 5. 已知 $119 \times 21 = 2499$ ，求 $119 \times 21^3 - 2498 \times 21^2 = ?$

96 基測一

- (A) 431 (B) 441
(C) 451 (D) 461

$$\begin{aligned} 5. 119 \times 21^3 - 2498 \times 21^2 &= 21^2 \times (119 \times 21 - 2498) \\ &= 21^2 \times (2499 - 2498) = 441 \end{aligned}$$

- (C) 6. $(69\frac{17}{23}) \times (70\frac{6}{23}) = a + b$ ，若 a 為正整數且 $0 < b < 1$ ，則 $a = ?$

95 基測一

- (A) 3583 (B) 3584
(C) 4899 (D) 4900

$$\begin{aligned} 6. \text{原式} &= (70 - \frac{6}{23})(70 + \frac{6}{23}) = 70^2 - (\frac{6}{23})^2 \\ &= 4900 - \frac{36}{529} = 4899 + \frac{493}{529} \end{aligned}$$



- (D) 1. $x^4 + 4$ 的因式之一為何者？

- (A) $x^2 - 4$ (B) $x^2 + 2$
(C) $x + 1$ (D) $x^2 - 2x + 2$

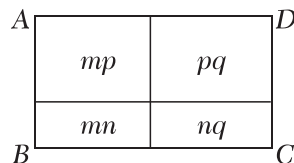
$$\begin{aligned} 1. x^4 + 4 &= (x^4 + 2 \cdot 2x^2 + 2^2) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

- (C) 2. 當 $x \neq -1$ ， $x \neq 2$ 時，試化簡 $\frac{2x^2 - x}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{4 + x}{(x + 1)(x - 2)}$ 為下列何者呢？

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 4

$$2. \text{原式} = \frac{2x^2 - x - 4 - x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2(x - 2)(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = 2$$

- (D) 3. 如右圖，將長方形 $ABCD$ 分成四個小長方形，其面積分別為 mp 、 mn 、 pq 、 nq ，則 $\overline{AD} + \overline{AB} = ?$



- (A) $m - q - p - n$
(B) $m + q - p + n$
(C) $m - q + p - n$
(D) $m + q + p + n$

$$\begin{aligned} 3. \text{四邊形 } ABCD \text{ 面積} &= mp + pq + mn + nq = \overline{AD} \times \overline{AB} = (m + q) \times (p + n) \\ &\Rightarrow \overline{AD} + \overline{AB} = m + q + p + n \end{aligned}$$

- (D) 4. 若 $x^2 + 5x - 5 = 0$ ，則 $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ 之值為何？

- (A) 76 (B) 45
(C) 84 (D) 99

$$\begin{aligned} 4. x^2 + 5x - 5 = 0 &\Rightarrow x^2 + 5x = 5, \\ \text{求值式} &= (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (5 + 4)(5 + 6) = 99 \end{aligned}$$

- (A) 5. 若 $a - \frac{1}{b} = 9$ ， $ab + \frac{1}{ab} = 83$ ，求 $b - \frac{1}{a} = ?$

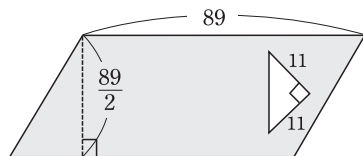
- (A) 9 (B) 18
(C) 33 (D) 81

$$\begin{aligned} 5. \because (a - \frac{1}{b})(b - \frac{1}{a}) &= ab - 1 - 1 + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{ab} - 2 \\ &= 83 - 2 = 81 \\ \therefore b - \frac{1}{a} &= 81 \div 9 = 9 \end{aligned}$$

(B) 6. 如右圖所示，求灰色部分的面積為何？

- (A) 2990
- (B) 3900
- (C) 7800
- (D) 8700

6. 灰色部分的面積
 = 平行四邊形面積 - 內部三角形的面積
 $= 89 \times (\frac{89}{2}) - \frac{1}{2} \times 11 \times 11 = \frac{1}{2} (89^2 - 11^2)$
 $= \frac{1}{2} (89 + 11)(89 - 11) = \frac{1}{2} \times 100 \times 78$
 $= 3900$ (平方單位)



(C) 7. 假設 $\frac{5x - 11}{2x^2 + x - 6}$ 是由 $\frac{A}{x + 2}$ 與 $\frac{B}{2x - 3}$ 相加而得，則 $A + B = ?$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

7. $\frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 3} = \frac{A(2x - 3) + B(x + 2)}{(2x - 3)(x + 2)} = \frac{(2A + B)x + (-3A + 2B)}{2x^2 + x - 6}$
 $\begin{cases} 2A + B = 5 \\ 2B - 3A = -11 \end{cases} \Rightarrow A = 3, B = -1 \Rightarrow A + B = 2$

(B) 8. 假設 $x - 2y = 3$ ，則 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6$ 之值為何呢？

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2

8. 求值式 $= (x - 2y)^2 - 5(x - 2y) + 6$ ，
 將 $x - 2y = 3$ 代入 $\Rightarrow 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(A) 9. 小華因式分解一個 y 的四次多項式，不小心將常數項的正負號看錯，得到結果是 $(y^2 + 2)(y^2 + 3)$ ，如果小華在演算過程中沒有其他的錯誤，請問：該多項式因式分解後的正確答案為何呢？

- (A) $(y - 1)(y + 1)(y^2 + 6)$
- (B) $(y + 1)(y - 1)(y^2 + 2)$
- (C) $(y - 1)(y + 1)(y^2 - 6)$
- (D) $(y - 1)^2(y^2 + 6)$

9. $\because (y^2 + 2)(y^2 + 3) = y^4 + 5y^2 + 6 \therefore$ 正確應為 $y^4 + 5y^2 - 6$
 $\Rightarrow y^4 + 5y^2 - 6 = (y^2 + 6)(y^2 - 1) = (y^2 + 6)(y - 1)(y + 1)$

(D) 10. 若 $x^3 + px - q$ 為 $x + 1$ 與 $x + 2$ 的倍式，求 $p^2 - q^2$ 之值為何呢？

- (A) 10
- (B) 11
- (C) 12
- (D) 13

10. $x = -1, -2$ 分別代入： $(-1)^3 + p \times (-1) - q = 0, p + q = -1$;
 $(-2)^3 + p(-2) - q = 0, 2p + q = -8$
 $\begin{cases} p + q = -1 \\ 2p + q = -8 \end{cases} \Rightarrow p = -7, q = 6, \therefore p^2 - q^2 = (-7)^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$

(D) 11. 假設 x, y 是相異正整數，且 $9x^2 - y^2 = 17$ ，則下列何者成立呢？

- (A) $x - y = 5$
- (B) $x + y = 10$
- (C) $2x - y = 2$
- (D) $2x + y = 14$

11. $9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y) = 17$
 $\begin{cases} 3x - y = 1 \dots \textcircled{1} \\ 3x + y = 17 \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\textcircled{1} + \textcircled{2}}{6} \Rightarrow x = \frac{1 + 17}{6} = 3, y = 8$

(D) 12. 若 $4x^2 - (m - 1)x + \frac{1}{4}$ 可以化成 $(x + \square)^2$ ，則 m 值為何呢？

- (A) 1 或 0
- (B) -1 或 1
- (C) -2 或 0
- (D) 2 或 0

12. $4x^2 - (m - 1)x + \frac{1}{4} = x^2 \pm 2 \times x \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$
 $\therefore m - 1 = \pm 1, m = 2$ 或 0

(A) 13. 因式分解 $1 - 4x^2 - 9y^2 + 36x^2y^2$ 的結果為下列何者呢？

- (A) $(1 - 2x)(1 + 2x)(1 - 3y)(1 + 3y)$
- (B) $(1 - 2y)^2(1 - 3y)^2$
- (C) $(2x - 1)^2(3y - 1)^2$
- (D) $(2x - 1)(1 + 2x)(1 - 3y)(1 + 3y)$

13. 原式 $= (1 - 4x^2) - 9y^2(1 - 4x^2) = (1 - 4x^2)(1 - 9y^2)$
 $= (1 - 2x)(1 + 2x)(1 - 3y)(1 + 3y)$

第 11 單元 二次方根與商高定理

1 基測出題機率★★★★★ 2 難易度★★★☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

131

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. -11 是 -121 的平方根之一。

能力一

💡 $\because (-11)^2 = 121 \therefore (-11)$ 不是 (-121) 的平方根, 簡而言之, -121 沒有平方根!

(X) 2. 因為 25 的平方根為 ± 5 , 所以 $\sqrt{25} = \pm 5$ 。

💡 25 的平方根 $= \pm \sqrt{25} = \pm 5$, 但 $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$

(O) 3. 若 $a = 0.9$, 則 $\frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{a}$ 。

💡 $(\frac{1}{\sqrt{0.9}})^2 = \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9}$, $(\frac{1}{0.9})^2 = (\frac{10}{9})^2$, $(\frac{10}{9})^2 > \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{a}$

(O) 4. 若 a 是大於 0 的非完全平方數, 則 \sqrt{a} 必為無理數。

💡 \sqrt{a} 之值若非整數, 則必為無理數

(X) 5. 若要將 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ 式子分母有理化, 應該分子分母同乘 $\sqrt{3} + \sqrt{4}$ 。

💡 $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{4}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{4})}{(\sqrt{3}+\sqrt{4}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{4})} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^2}{3-4} \Rightarrow -[(\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{4}) + (\sqrt{4})^2] = 4\sqrt{3} - 7$

(X) 6. 設 a 為整數, 利用十分逼近法得知 $a + 0.6 < \sqrt{114} < a + 0.7$, 則 $a = 12$ 。

能力二

💡 $10^2 < 114 < 11^2$, $10.6^2 < 114 < 10.7^2$, $a = 10$

(X) 7. $-\sqrt{15}$ 位於數線 $\overset{A}{-4} \overset{B}{-3} \overset{C}{-2} \overset{D}{-1} \overset{E}{0} \overset{F}{1} \overset{G}{2} \overset{H}{3} \overset{I}{4}$ 的 \overline{HI} 之間。

💡 $-\sqrt{15} \Rightarrow -4 < -\sqrt{15} < -3$, 位於 \overline{AB} 之間

(X) 8. 在直角三角形 ABC 中, 若 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$, 則 $\angle B$ 為直角。

能力三

💡 若 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \Rightarrow \angle C$ 為直角



(O) 9. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a 、 b 、 c , 若 $a^2 = c^2 + b^2$, 則 $\triangle ABC$ 必為直角三角形。

💡 只要符合商高定理就為直角三角形

(O) 10. 直角三角形斜邊為 $m^2 + n^2$, 且其中一股為 $m^2 - n^2$, 則另外一股應為 $2mn$ 。

💡 另一股 $= \sqrt{(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2} = 2mn$

數學 健康狀況檢核表

※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

二次方根的意義與化簡

一 二次方根 (平方根)

1. 一個正數 a 是另一個數 b 的平方，記作： $b^2 = a$ ，亦即 b 是 a 的二次方根或稱為平方根。
2. 一個正數 a 的平方根有兩個，記作： $\pm \sqrt{a}$ 。

 二 二次方根的性质 (a 為實數)

屬性	狀態	說明
$a > 0$	$\pm \sqrt{a}$	2 個平方根
$a = 0$	$\sqrt{0} = 0$	1 個平方根 0
$a < 0$	沒有平方根	負數沒有平方根
$a \geq 0$	$\sqrt{a^2} = a = (\sqrt{a})^2$	

三 二次方根的乘、除法

1. 乘法 (當 $a \geq 0, b \geq 0$) $\Rightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

假設 $x = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b = ab$ ，
 x 是 ab 的正平方根 $\Rightarrow x = \sqrt{ab} \quad \therefore \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2. 除法 (當 $a \geq 0, b > 0$) $\Rightarrow \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$ 或 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

假設 $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ ， x 是 $\frac{a}{b}$ 的正平方根

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \therefore \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

3. 其它

(1) 當 $a \geq 0$	$\Rightarrow \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$
(2) 當 $a \geq 0, b > 0$	$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ (方根分母有理化)
(3) 當 a 為實數	$\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a & (\text{當 } a \geq 0) \\ -a & (\text{當 } a < 0) \end{cases}$
(4) 當 a, b 為實數	$\sqrt{(a-b)^2} = a-b = \begin{cases} (a-b) & (\text{當 } a \geq b) \\ (b-a) & (\text{當 } a < b) \end{cases}$
(5) 當 $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = 0$	$\Leftrightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

四 必背的完全平方數

n^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

師說 1

〈平方根的性質〉

演練 1

1. 試求 $\frac{4}{49}$ 的平方根？

2. $9\frac{1}{25}$ 的平方根為何呢？

解

1. $\frac{4}{49}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{\frac{4}{49}} = \pm\sqrt{(\frac{2}{7})^2} = \pm\frac{2}{7}$

2. $9\frac{1}{25}$ 的平方根為

$$\pm\sqrt{9\frac{1}{25}} = \pm\sqrt{\frac{226}{25}} = \pm\frac{\sqrt{226}}{5}$$

1. A 的平方根為 ± 2 ，則 $A = ?$

2. $\sqrt{1296}$ 的平方根等於多少呢？

解

1. $A = (\pm 2)^2 = 4$

2. $\because 1296 = 36^2$

$$\therefore \sqrt{1296} \text{ 的平方根亦即 } 36 \text{ 的平方根}$$

$$= \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

師說 2

〈平方根的計算與比較大小〉

演練 2

1. 試求 $\sqrt{2\frac{1}{4}} - \sqrt{18\frac{1}{16}} + \sqrt{2\frac{34}{81}} = ?$

2. 試比較 $a = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ， $b = \sqrt{\frac{5}{4}}$ ， $c = \sqrt{\frac{9}{7}}$

的大小為何呢？

解

1. $\sqrt{2\frac{1}{4}} - \sqrt{18\frac{1}{16}} + \sqrt{2\frac{34}{81}}$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{289}{16}} + \sqrt{\frac{196}{81}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{17}{4} + \frac{14}{9}$$

$$= \frac{3 \times 18 - 17 \times 9 + 14 \times 4}{36} = -\frac{43}{36}$$

2. $a = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ， $b = \sqrt{\frac{5}{4}}$ ， $c = \sqrt{\frac{9}{7}}$

$$\because \frac{4}{3} > \frac{9}{7} > \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{9}{7}} > \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore a > c > b$$

1. 試求 $\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2} = ?$

2. 已知 a 、 b 、 c 均大於 0，若 $a \times \frac{7}{\sqrt{11}} = b \times \frac{\sqrt{7}}{11} = c \times \sqrt{\frac{7}{11}}$ ，試問 a 、 b 、 c 的大小為何呢？

解

1. $\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$= \frac{5}{2} + (\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) - (\frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{10} - 5\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2}$$

2. $(\frac{7}{\sqrt{11}})^2 = \frac{49}{11}$ ， $(\frac{\sqrt{7}}{11})^2 = \frac{7}{121}$ ，

$$(\sqrt{\frac{7}{11}})^2 = \frac{7}{11} \quad \because \frac{49}{11} > \frac{7}{11} > \frac{7}{121}$$

$$\Rightarrow a < c < b$$

同步評量 1

(C) 1. 下列有關平方根的敘述何者正確？

(A) $\because (\pm 2)^2 = 4 \quad \therefore \sqrt{4} = \pm 2$

(C) $\sqrt{625}$ 的平方根為 ± 5

1. (A) $\sqrt{4} = 2$ ；(B) $b = a^2$

(C) $\sqrt{625} = 25$ ，其平方根為 $\pm\sqrt{25} = \pm 5$

(D) -16 沒有平方根

(B) 若 a 為 b 的平方根，則 $a = b^2$

(D) -16 的平方根為 ± 4

(D) 2. 求 $\frac{(3-5)^2 + |-5-8|}{\sqrt{9-(-7)}} = ?$

- (A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{15}{2}$
 (C) $\frac{9}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

2. 原式 = $\frac{(-2)^2 + |-13|}{\sqrt{16}} = \frac{4+13}{4} = \frac{17}{4}$

(A) 3. 若 $\sqrt{10-a}$ 為整數，則正整數 a 之值有多少個？

- (A) 4 (B) 3
 (C) 2 (D) 1

3. $\because \sqrt{10-a}$ 為整數
 $\therefore a$ 可為 1、6、9、10，共 4 個

(C) 4. 欲使 $\sqrt{7b}$ 及 b 均為二位正整數，則 b 可為下列何數？

- (A) 18 (B) 20
 (C) 28 (D) 30

4. (A) $7 \times 18 = 126$ 非完全平方數，(B) $7 \times 20 = 140$ 非完全平方根，(C) $7 \times 28 = 196 = 14^2$ ，(D) $7 \times 30 = 210$ 非完全平方數

(C) 5. 若 -3 為 $3a+b+1$ 之一個平方根，且 $a+2b+3$ 之平方根為 ± 2 ，則 $a-b$ 之平方根為何？

- (A) 2 (B) 4
 (C) ± 2 (D) ± 4

5. $\begin{cases} 3a+b+1 = (-3)^2 = 9 \\ a+2b+3 = (\pm 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=-1$
 $\therefore a-b=4$ 之平方根為 ± 2

能力 二次方根的近似值

一 二次方根的近似值

當一個大於 0 且非完全平方的數，將其開根號後，所得到的數值皆為無理數，亦即為一個不循環且無限的小數。因此，我們可以求其近似值代表該二次方根。

二 求近似值的方式

1. 使用乘開方表 (平時幾乎不用，僅有基測會考！)

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$	N^3	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
55	3025	7.416198	23.45208	166375	3.802952	8.193213	17.65174
56	3136	7.483315	23.66432	175616	3.825862	8.242571	17.75808
57	3249	7.549834	23.87467	185193	3.848501	8.291344	17.86316
58	3364	7.615773	24.08319	195112	3.870877	8.339551	17.96702

例1：由上表可查 $\sqrt{56} \doteq 7.483315$ ， $\sqrt{570} \doteq 23.87467$ ， $58^2 = 3364$

2. 十分逼近法 (一般考試都會考！)

若 a 、 x 、 b 皆為正數，則 $a^2 < x < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{x} < \sqrt{b^2} \Leftrightarrow a < \sqrt{x} < b$

例2：試求 $\sqrt{56}$ 的近似值到小數第一位？

$$7^2 < 56 < 8^2 \Rightarrow \sqrt{7^2} < \sqrt{56} < \sqrt{8^2} \Rightarrow 7 < \sqrt{56} < 8,$$

$$7.4^2 < 56 < 7.5^2 \Rightarrow \sqrt{7.4^2} < \sqrt{56} < \sqrt{7.5^2} \Rightarrow 7.4 < \sqrt{56} < 7.5$$

師說 3

〈方根與近似值〉

演練 3

1. 滿足 $9 \leq \sqrt{n} < 19$ 的正整數 n 有多少個呢？
2. 已知 $(4.24)^2 = 17.9776$, $(4.25)^2 = 18.0625$, $(4.243)^2 = 18.003045$, 利用四捨五入法求 $\sqrt{18}$ 的近似值到小數第二位的結果為何？

解

1. $\because 9 \leq \sqrt{n} < 19 \Rightarrow 81 \leq n < 361$
 $\therefore n$ 有 $361 - 81 = 280$ (個)
2. $\because 17.9776 < 18 < 18.0625$
 $\Rightarrow (4.24)^2 < 18 < (4.25)^2$
 $\therefore 4.24 < \sqrt{18} < 4.25$
 $\because (4.243)^2 = 18.003045 > 18$,
 $\therefore \sqrt{18} < 4.243 \Rightarrow \sqrt{18} \div 4.24$

1. 滿足 $20 < n < \sqrt{1000}$ 的整數 n 有多少個？
2. 已知 72 的正平方根 $\sqrt{72} \div 8.485$, 請問：哪一個數的正平方根為 0.8485 呢？

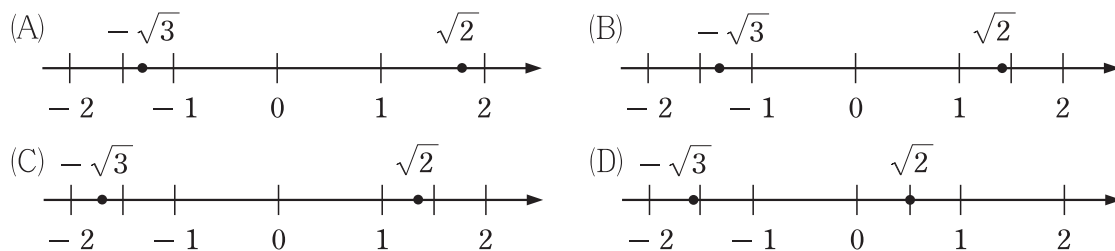
解

1. 原式 $\Rightarrow 20^2 < n^2 < (\sqrt{1000})^2$
 $\Rightarrow 400 < n^2 < 1000$
 $\because 21^2 = 441, 22^2 = 484, \dots, 31^2 = 961$
 $n = 21, 22, \dots, 31$, 共 $31 - 21 + 1 = 11$ 個
2. $0.8485 \div 8.485 = 0.1$
 \Rightarrow 該數為 $= 72 \times (0.1)^2 = 0.72$

同步評量 2

1. $\because \sqrt{3} = 1.732 \dots \therefore -2 < -\sqrt{3} < -1.5$, 又 $\because \sqrt{2} = 1.414 \dots \therefore 1 < \sqrt{2} < 1.5$

(C) 1. 試問 $-\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{2}$ 在數線上的相對位置, 下列哪一選項較合理？



(A) 2. 滿足 $\sqrt{87} < x < \sqrt{1998}$ 的整數 x 的個數為何？(已知 $\sqrt{87} \div 9.3274$, $\sqrt{1998} \div 44.6990$)

- (A) 35 (B) 36 (C) 37 (D) 38
2. $\because \sqrt{87} \div 9.3274, \sqrt{1998} \div 44.6990, x$ 最小為 10, 最大為 44
 \therefore 整數 x 有 $44 - 10 + 1 = 35$ (個)

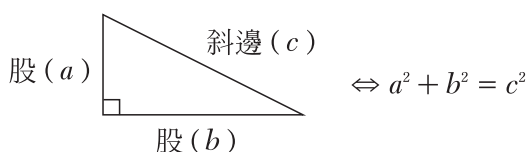
(A) 3. 已知 $\sqrt{21} = 4.5826$, $\sqrt{2.1} = 1.4491$, 則 $\sqrt{210} = ?$

- (A) 14.491 (B) 45.826 (C) 0.45826 (D) 0.14491
3. $\because \sqrt{210} = \sqrt{2.1 \times 100} = \sqrt{2.1} \times 10 = 1.4491 \times 10 = 14.491$

能力 商高定理與應用

一 商高定理 (畢氏定理)

1. 若一個三角形有一內角是直角, 則此三角形為直角三角形, 且符合下列規則: **兩股平方和等於斜邊的平方**。



2. 已知有一直角三角形的兩股為 a, b , 斜邊為 c , 則:

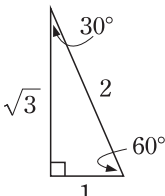
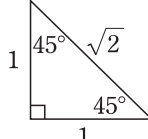
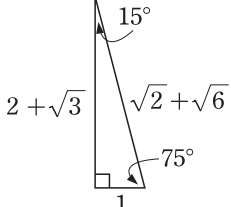
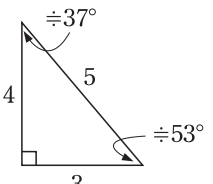
$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

商高數

商高數是指直角三角形三邊長皆為**整數形式**，常見的商高數如下所示：

- (3、4、5)、(5、12、13)、(7、24、25)、(8、15、17)、(9、40、41)、(20、21、29) 等等，請同學要熟記上面之商高數，可省去許多繁雜的計算。

特殊的直角三角形

(30°直角三角形) (必背)	(等腰直角三角形) (必背)	(15°直角三角形) (參考)	(3、4、5 直角三角形) (參考)
			

師說 4

〈商高定理〉

演練 4

- 已知直角三角形的兩邊長分別為 6 和 8，試求第三邊的長為何呢？
- $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為邊長的兩正方形面積分別是 169cm^2 、 25cm^2 ，則 \overline{AC} 為多少 cm ？

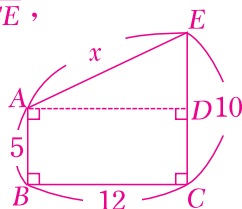
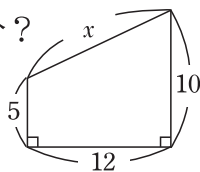
解

- 第三邊長 $= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ ，若第三邊是其中一股，則 $\sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
- $\because \angle C = 90^\circ \therefore \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ ， $169 = 25 + \overline{AC}^2$ ， $\therefore \overline{AC}^2 = 169 - 25$ ， $\therefore \overline{AC} = 12$ (公分)

- 設矩形面積為 120 平方公分，寬為 8 公分，則對角線長是多少公分？
- 右圖中的 x 值為何呢？

解

- 長方形的長 $= 120 \div 8 = 15$
 \therefore 對角線長 $= \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ (公分)
- 如圖，過 A 點作 \overline{AD} 垂直 \overline{CE} ，則 $\overline{AD} = \overline{BC} = 12$ ， $\overline{ED} = 10 - 5 = 5$ ，故 $x = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (單位)



師說 5

〈商高定理的應用 I〉

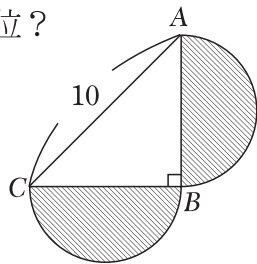
演練 5

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 10$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，若以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為直徑各自作出一半圓，則斜線部分面積共多少平方單位？

解

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\overline{AB}}{2} \right)^2 \pi + \left(\frac{\overline{BC}}{2} \right)^2 \pi \right] \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{8} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) \\ &\because \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{斜線面積} &= \frac{\pi}{8} \times \overline{AC}^2 = \frac{\pi}{8} \times 10^2 \\ &= \frac{25}{2} \pi \text{ (平方單位)} \end{aligned}$$

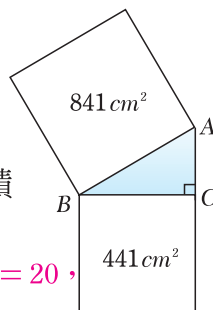


如圖， $\triangle ABC$ 為一直角三角形，若 $\angle C = 90^\circ$ ，試求

- $\triangle ABC$ 的面積與周長
- 以 \overline{AC} 為一邊的正方形面積

解

- $\overline{AC}^2 = 841 - 441 = 400$ ， $\overline{AC} = 20$ ， $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{441} \times 20 \times \frac{1}{2} = 210$ (cm^2)
 $\triangle ABC$ 周長 $= 20 + 21 + \sqrt{841} = 20 + 21 + 29 = 70$ (cm)
- 以 \overline{AC} 為邊的正方形面積 $= 400$ (cm^2)

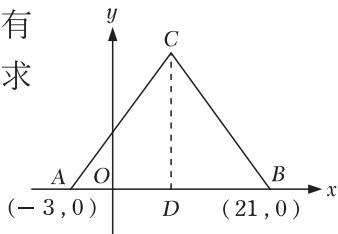


師說 6

〈商高定理的應用 II〉

演練 6

如圖，在坐標平面上有一正三角形 ABC ，試求 C 點坐標？



解

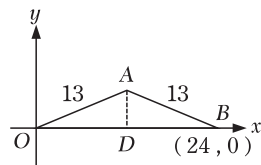
(1) \overline{AB} 的中點坐標 $D(\frac{-3+21}{2}, \frac{0+0}{2}) = (9, 0)$

C 點之 x 坐標為 9

(2) $\overline{AC} = \overline{AB} = 24 \therefore \overline{AD} = \overline{BD} = 12$
 $\overline{CD} = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$

(3) C 點坐標 $(9, 12\sqrt{3})$

如圖，在坐標平面上有 $\triangle AOB$ ， B 點坐標為 $(24, 0)$ ，若 $\overline{AO} = \overline{AB} = 13$ ，求 A 之坐標？



解

(1) \overline{OB} 的中點坐標 $D(\frac{0+24}{2}, \frac{0+0}{2}) \Rightarrow (12, 0)$

$\therefore A$ 之 x 坐標為 12

(2) $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore A$ 之 y 坐標為 5

(3) A 點坐標 $(12, 5)$

同步評量 3

(B) 1. 已知直角三角形中，兩股長的平方和等於斜邊長的平方。若一直角三角形的兩股長各為 2 公分及 3 公分，且斜邊長為 a 公分，則下列哪一個選項是正確的？

- (A) $3.0 < a < 3.5$ (B) $3.5 < a < 4.0$
 (C) $4.0 < a < 4.5$ (D) $4.5 < a < 5.0$

1. $a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$

(C) 2. 一個三角形邊長為 $10\frac{1}{2}$ ，10， $14\frac{1}{2}$ ，則此三角形的面積為多少平方單位？

- (A) $\frac{75}{2}$ (B) 75
 (C) $\frac{105}{2}$ (D) 105

2. $10\frac{1}{2} : 10 : 14\frac{1}{2} = \frac{21}{2} : \frac{20}{2} : \frac{29}{2} = 21 : 20 : 29$
 $\therefore 21^2 + 20^2 = 29^2 \therefore$ 為直角 \triangle
 面積 = $10\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{1}{2} = \frac{105}{2}$

(D) 3. 直角三角形之兩股長的比為 3 : 4，且其周長為 72 公分，則三角形斜邊上的高為幾公分？

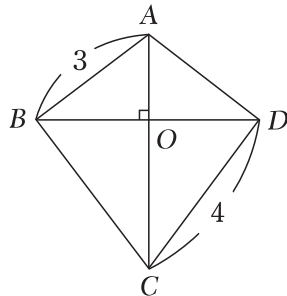
- (A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{24}{5}$
 (C) $\frac{36}{5}$ (D) $\frac{72}{5}$

3. 設兩股分別為 $3r, 4r (r \neq 0)$ ，則斜邊長為 $5r$ ，
 又 $3r + 4r + 5r = 72 \therefore r = 6$ ，
 故斜邊上高 = $\frac{3r \cdot 4r}{5r} = \frac{12r}{5} = \frac{72}{5}$ (公分)

(C) 4. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 O ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ，求 $\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = ?$

- (A) 7
 (B) 16
 (C) 25
 (D) 36

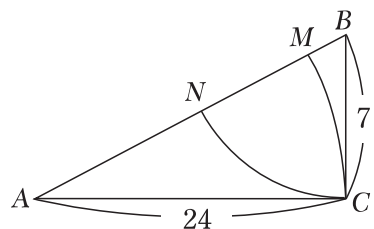
4. $\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2$
 $= (\overline{BO}^2 + \overline{AO}^2) + (\overline{CO}^2 + \overline{DO}^2) = 3^2 + 4^2 = 25$



(D) 5. 如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，兩股長為 7 和 24，分別以 A 為圓心， \overline{AC} 為半徑； B 為圓心， \overline{BC} 為半徑畫弧，交斜邊於 M 、 N ，則 \overline{MN} 的長度是多少？

- (A) 3 (B) 4
 (C) 5 (D) 6

5. $\overline{AB} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ ，
 $\overline{MN} = 7 + 24 - 25 = 6$





基本觀念題

(B) 1. 請問： $\frac{225}{256}$ 的平方根是下列哪一個選項？

- (A) $\frac{15}{16}$ (B) $\pm \frac{15}{16}$ (C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (D) $\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$

1. $\frac{225}{256}$ 的平方根為 $\pm \sqrt{\frac{225}{256}} = \pm \frac{15}{16}$

(D) 2. 下列何者正確？

- (A) $\sqrt{169} = \pm 13$ (B) $\sqrt{(-4)^2} = -4$
 (C) $\sqrt{9\frac{4}{25}} = 3\frac{2}{5}$ (D) $-\sqrt{(-11)^2} = -11$

2. (A) $\sqrt{169} = 13$

(B) $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$

(C) $\sqrt{9\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{229}{25}} = \frac{\sqrt{229}}{5}$

(D) $-\sqrt{(-11)^2} = -|-11| = -11$

(B) 3. (甲) -8 是 64 的平方根、(乙) -12 是 -144 的平方根、(丙) 0.3 是 0.9 的平方根、(丁) $-\frac{4}{5}$ 是 $\frac{16}{25}$ 的平方根，以上四個敘述中，正確的有幾個？

- (A) 1 (B) 2
 (C) 3 (D) 4

3. (甲) $(-8)^2 = 64$ $\therefore -8$ 是 64 的平方根

(乙) $(-12)^2 = 144$ $\therefore -12$ 不是 -144 的平方根

(丙) $0.3^2 = 0.09$ $\therefore 0.3$ 不是 0.9 的平方根

(丁) $(-\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25}$ $\therefore -\frac{4}{5}$ 是 $\frac{16}{25}$ 的平方根

(A) 4. 假設 8 是 $3x + 1$ 的平方根，則下列何者是 x 的值呢？

- (A) 21 (B) 25 (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{17}{3}$

4. $3x + 1 = 8^2$, $3x + 1 = 64$, $3x = 63$ $\therefore x = 21$

(B) 5. 請計算 $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{7})^2 = ?$

- (A) -16 (B) 16 (C) -4 (D) 4

5. 原式 = $[(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})]^2$
 $= [(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2]^2 = (-4)^2 = 16$

(C) 6. 若 $3 < x < 9$ ，且 $\sqrt{(x-9)^2} + \sqrt{(2x-6)^2} = ?$

- (A) $x - 3$ (B) -3
 (C) $x + 3$ (D) 3

6. 原式 = $|x - 9| + |2x - 6|$
 $= (9 - x) + (2x - 6) = x + 3$

(D) 7. 若 $a > 0$ 、 $b < 0$ ，且 $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - \sqrt{a^2b^4} = ?$

- (A) $a + b + ab^2$ (B) $a - b + ab^2$
 (C) $a + b - ab^2$ (D) $a - b - ab^2$

7. $\therefore a > 0$ 、 $b < 0$ ， \therefore 原式 = $a - b - ab^2$

(B) 8. 滿足 $11 \leq \sqrt{n} < 13$ 的整數 n 有多少個？

- (A) 47 (B) 48 (C) 49 (D) 50

8. 原式 $\Rightarrow 11^2 \leq (\sqrt{n})^2 < 13^2$, $121 \leq n < 169$,
 $169 - 121 = 48$ (個)

(D) 9. 若 $a = \sqrt{3} = 1.732\dots\dots$ ，則 a 與 1.732 的大小為何？

- (A) $a < 1.732$ (B) $a \leq 1.732$
 (C) $a = 1.732$ (D) $a > 1.732$

9. $\therefore 1.732\dots > 1.732$ $\therefore a > 1.732$

(A) 10. 一個直角三角形的斜邊長為 13 ，周長為 30 ，則此三角形的面積為何？

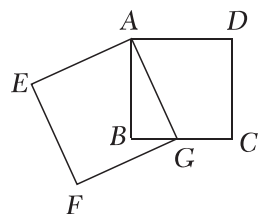
- (A) 30 (B) 25
 (C) 35 (D) 20

10. 設兩股為 a 、 $b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 30 - 13 = 17 \\ a^2 + b^2 = 13^2 = 169 \end{cases}$

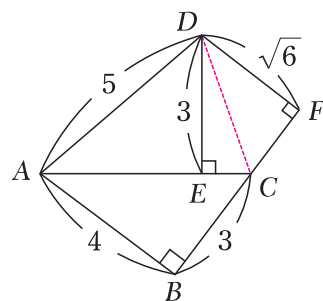
面積 = $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a^2+b^2)] = 30$

- (B) 11. 設一直角三角形的斜邊長為 $a^2 + b^2$ ，一股長為 $2ab$ ，則另一股長為何？
 (A) $a^2 - b^2$ (B) $|a^2 - b^2|$ (C) $(a^2 - b^2)^2$ (D) $a^2 - ab + b^2$
11. $\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}$
 $= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2} = |a^2 - b^2|$

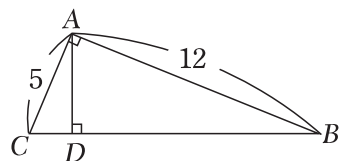
- (C) 12. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 與 $AEFG$ 均為正方形，若 $ABCD$ 的面積為 78 平方公分， $AEFG$ 的面積為 94 平方公分，則 \overline{BG} = ?
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
12. $\overline{AB} = \sqrt{78}$, $\overline{AG} = \sqrt{94}$,
 $\overline{BG} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(\sqrt{94})^2 - (\sqrt{78})^2} = \sqrt{94 - 78} = \sqrt{16} = 4$



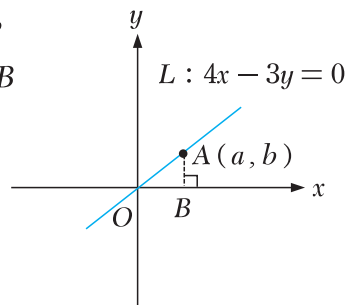
- (B) 13. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BF}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{BF}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{DF} = \sqrt{6}$ ，求 \overline{CF} = ?
 (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$
13. $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\overline{AE} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
 $\overline{EC} = 5 - 4 = 1$
 $\therefore \overline{DC} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
 $\Rightarrow \overline{CF} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{4} = 2$



- (C) 14. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，則下列何者錯誤？
 (A) $\overline{BC} = 13$ (B) $\overline{AD} = \frac{60}{13}$ (C) $\overline{CD} = 4$ (D) $\overline{BD} = \frac{144}{13}$
14. (A) $\overline{BC} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$
 (B) $\overline{AD} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$
 (C) $\overline{CD} \times 13 = 5^2$, $\overline{CD} = \frac{25}{13}$
 (D) $\overline{BD} \times 13 = 12^2$, $\overline{BD} = \frac{144}{13}$



- (A) 15. 如右圖，坐標平面上點 $A(a, b)$ 在直線 $L: 4x - 3y = 0$ 上， $\overline{AB} \perp x$ 軸於 B 點，若 $\triangle AOB$ 面積為 84 平方單位，則 $\triangle AOB$ 周長為多少單位長？
 (A) $12\sqrt{14}$ (B) $12\sqrt{12}$ (C) $6\sqrt{14}$ (D) $6\sqrt{12}$
15. $A(a, b)$ 代入 $4a - 3b = 0$, $a = \frac{3}{4}b$
 $\Rightarrow \triangle AOB$ 面積 $= \frac{1}{2} \times a \times b = 84$, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}b \times b = 84$
 $b = \pm 4\sqrt{14}$ (負不合) $\therefore a = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{14} = 3\sqrt{14}$
 $\therefore \overline{OA} = \sqrt{(3\sqrt{14})^2 + (4\sqrt{14})^2} = 5\sqrt{14}$
 \therefore 周長 $= 3\sqrt{14} + 4\sqrt{14} + 5\sqrt{14} = 12\sqrt{14}$



- (A) 1. 若 a 是 200.4 的正平方根，則下列關係式何者正確？
 (A) $14 < a < 15$ (B) $20.0 < a < 20.1$ (C) $200 < a < 201$ (D) $40000 < a < 40401$
- 97 基測二
 1. $a^2 = 200.4$, $14^2 < a^2 < 15^2$, $196 < a^2 < 225$

- (B) 2. $\sqrt{19}$ 的值介於下列哪兩數之間？
 (A) 4.2, 4.3 (B) 4.3, 4.4 (C) 4.4, 4.5 (D) 4.5, 4.6
- 97 基測一
 2. $(4.3)^2 = 18.49$, $(4.4)^2 = 19.36$
 $\Rightarrow (4.3)^2 < 19 < (4.4)^2 \Rightarrow 4.3 < \sqrt{19} < 4.4$

(A) 3. 以下是甲、乙、丙三人看地圖時對四個地標的描述：

97 基測一

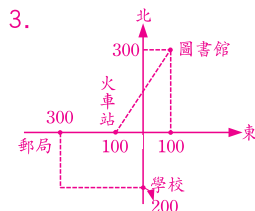
甲：從學校向北直走 500 公尺，再向東直走 100 公尺的可到圖書館。

乙：從學校向西直走 300 公尺，再向北直走 200 公尺的可到郵局。

丙：郵局在火車站西方 200 公尺處。

根據三人的描述，若從圖書館出發，判斷下列哪一種走法，其終點是火車站？

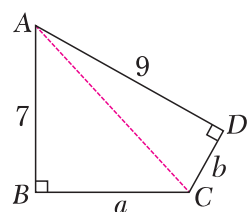
- (A) 向南直走 300 公尺，再向西直走 200 公尺
- (B) 向南直走 300 公尺，再向西直走 600 公尺
- (C) 向南直走 700 公尺，再向西直走 200 公尺
- (D) 向南直走 700 公尺，再向西直走 600 公尺



(B) 4. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CD} = b$ 、 $\overline{AD} = 9$ ，求 $(a+b)(a-b) = ?$

- (A) 16
- (B) 32
- (C) 63
- (D) 130

4. 連接 \overline{AC} ， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}^2 = 7^2 + a^2$ ，
在 $\triangle ADC$ 中， $\overline{AC}^2 = 9^2 + b^2$
 $\therefore 7^2 + a^2 = 9^2 + b^2$ ， $a^2 - b^2 = 9^2 - 7^2 = 32$

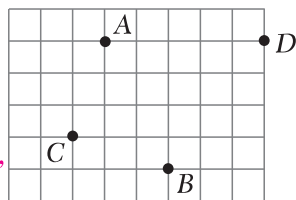


95 基測二

(A) 5. 右圖為 A、B、C、D 四點在方格紙上的位置圖，其中每一點均位於某兩線的交點上。關於 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的形狀，下列判斷何者正確？

- (A) 兩個都是等腰三角形
- (B) 兩個都不是等腰三角形
- (C) $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $\triangle ABD$ 不是等腰三角形
- (D) $\triangle ABC$ 不是等腰三角形， $\triangle ABD$ 是等腰三角形

5. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ ，
 $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，
 $\Rightarrow \triangle ABC$ 為等腰直角三角形
 $\triangle ABD$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{20}$ ， $\overline{AD} = 5$ ，
 $\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \triangle ABD$ 為等腰三角形



95 基測二



(C) 1. 下列敘述何者錯誤呢？

- (A) 395 的正平方根比 20 小
- (B) 15 的正平方根介於 3 與 4 之間
- (C) 235 的正平方根比 15 小
- (D) 441 的平方根為 ± 21

1. (A) $\because 20^2 = 400 > 395 \therefore \sqrt{395} < 20$
(B) $\because 3^2 = 9 < 15$ ， $4^2 = 16 > 15 \therefore 3 < \sqrt{15} < 4$
(C) $\because 15^2 = 225 < 235 \therefore \sqrt{235} > 15$
(D) 441 的平方根為 $\pm \sqrt{441} = \pm 21$

(C) 2. 請問： $\sqrt{2401}$ 的平方根等於多少呢？

- (A) ± 49
- (B) 49
- (C) ± 7
- (D) 7

2. $\because 2401 = 7^4 \therefore 2401 = 49^2$ ，
 $\sqrt{2401}$ 的平方根即為 49 的平方根為 ± 7

(D) 3. 已知 $b^2 = 625$ ， $b > 0$ ，則 b 的平方根為何呢？

- (A) 25
- (B) ± 25
- (C) 5
- (D) ± 5

3. $\because b^2 = 625 = 25^2$ 且 $b > 0$
 $\therefore b = 25$ ， b 的平方根為 $\pm \sqrt{25} = \pm 5$

(B) 4. 若 $x + y$ 的負平方根是 -3 ，且 $x - y$ 的正平方根是 5，求 $x + 2y = ?$

- (A) 8
- (B) 1
- (C) 2
- (D) -8

4. $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 25 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 17 \\ y = -8 \end{cases}$ ， $x + 2y = 17 - 16 = 1$

(A) 5. 滿足 $\sqrt{93} < x < \sqrt{2007}$ 的整數 x 有多少個呢？

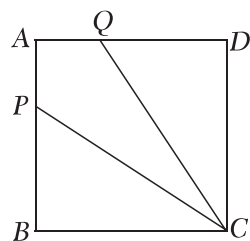
- (A) 35 (B) 36
(C) 37 (D) 38

5. $\because 9^2 = 81 < 93, 10^2 = 100 > 93$
 $\therefore 9 < \sqrt{93} < 10$, 又 $44 < \sqrt{2007} < 45$
 $\therefore 9 < x \leq 44$
 $\Rightarrow x$ 的整數值共有 $44 - 9 = 35$ (個)

(C) 6. 如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 15， \overline{CP} 和 \overline{CQ} 將此正方形面積分成三等分，則 $\overline{CP} = ?$

- (A) $5\sqrt{35}$
(B) $3\sqrt{35}$
(C) $5\sqrt{13}$
(D) $3\sqrt{15}$

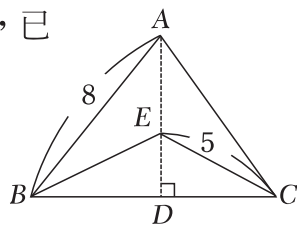
6. $\frac{15^2}{3} = 75, \frac{1}{2} \times 15 \times \overline{PB} = 75, \overline{PB} = 10$,
 則 $\overline{PC} = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$



(D) 7. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 垂直 \overline{BC} 於 D ， E 是 \overline{AD} 上的任一點，已知 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{CE} = 5$ ，求 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2$ 之值為何？

- (A) 86
(B) 87
(C) 88
(D) 89

7. 由商高定理可知
 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{BD}^2$
 $= (\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2) + (\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2)$
 $= \overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = 64 + 25 = 89$



(C) 8. 已知 x, y 為整數，且 $\sqrt{(2x + 3y - 3)^2} + \sqrt{(3x - 4y - 13)^2} = 0$ ，求 $15x - 4y$ 的平方根 = ?

- (A) ± 3 (B) ± 5
(C) ± 7 (D) ± 9

8. $|2x + 3y - 3| + |3x - 4y - 13| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = -1$
 $\therefore 15x - 4y = 15 \times 3 - [4 \times (-1)] = 49$
 $\therefore 15x - 4y$ 的平方根 = $\pm \sqrt{49} = \pm 7$

(C) 9. 如果符號 $[\sqrt{x}]$ 表示 \sqrt{x} 的整數部分，例如 $[\sqrt{2}] = 1, [\sqrt{5}] = 2$ ，則 $[\sqrt{7}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{13}] + [\sqrt{17}] = ?$

- (A) 10 (B) 11
(C) 12 (D) 13

9. $\because 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25$,
 \therefore 原式 = $2 + 3 + 3 + 4 = 12$

(C) 10. 設 $a = \sqrt{17} - \sqrt{3}, b = \sqrt{13} - \sqrt{7}, c = \sqrt{15} - \sqrt{5}$ ，比較 a, b, c 的大小關係為何？

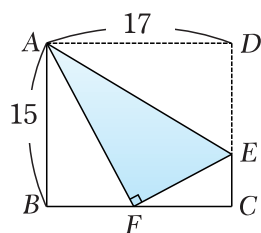
- (A) $a < b < c$
(B) $a < c < b$
(C) $b < c < a$
(D) $c < a < b$

10. $a^2 = (\sqrt{17} - \sqrt{3})^2 = 17 - 2\sqrt{51} + 3 = 20 - 2\sqrt{51}$
 $b^2 = (\sqrt{13} - \sqrt{7})^2 = 13 - 2\sqrt{91} + 7 = 20 - 2\sqrt{91}$
 $c^2 = (\sqrt{15} - \sqrt{5})^2 = 15 - 2\sqrt{75} + 5 = 20 - 2\sqrt{75}$
 $\therefore \sqrt{91} > \sqrt{75} > \sqrt{51}$,
 又所減的數越大所得的值越小 $\Rightarrow b < c < a$

(B) 11. 如右圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 15, \overline{AD} = 17$ ，今將其折疊，使頂點 D 落在 \overline{BC} 上一點 F ，請問： $\overline{BF} + \overline{EF} = ?$

- (A) 16.2
(B) 18.2
(C) 20.2
(D) 22.2

11. $\overline{AF} = \overline{AD} = 17 \therefore \overline{BF} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$
 設 $\overline{EF} = x$ ，則 $\overline{DE} = x, \overline{CE} = 15 - x$ ，又 $\overline{CF} = 17 - 8 = 9$
 \therefore 在 $\triangle CEF$ 中， $x^2 = (15 - x)^2 + 9^2 = 225 - 30x + x^2 + 81$
 $30x = 306, x = \frac{102}{10} = 10.2, \overline{BF} + \overline{EF} = 18.2$



第 12 單元

一元二次方程式

142

1 基測出題機率★★★☆☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(○) 1. 若 $(3x - 2)(5x + 6) = 0$, 則 $(3x - 2) = 0$ 或 $(5x + 6) = 0$ 。

💡 可能是 $(3x - 2) = 0$ 或 $(5x + 6) = 0$

(×) 2. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ 兩根之和為 $-\frac{2}{3}$ 。

💡 兩根之和應為 $\frac{5}{3}$

(○) 3. 若方程式 $2ax^2 - bx + c = 0$ 有重根, 則 $b^2 - 8ac = 0$ 。

💡 判別式 $= 0 \Rightarrow (-b)^2 - 4(2a)c = 0 \Rightarrow b^2 - 8ac = 0$

(○) 4. 若 y 是 $11 - x^2 + x = 0$ 的根, 則 $y^2 - y - 11 = 0$ 。

💡 $\because 11 - y^2 + y = 0, y^2 - y = 11, 11 - 11 = 0$

(○) 5. 方程式 $\frac{8}{3}x + x^2 = x$, 必有一根為 0。

💡 $\frac{8}{3}x + x^2 = x, x^2 + \frac{5}{3}x = 0, x(x + \frac{5}{3}) = 0, x = 0$ 或 $-\frac{5}{3}$

(×) 6. 若 a, b, c 為有理數, $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根也為有理數, 則 $b^2 - 4ac$ 不一定是完全平方數。

💡 \because 兩根為 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore b^2 - 4ac$ 一定要完全平方數, 其根方為有理數

(×) 7. 一元二次方程式 $3x^2 - 4x + 3 = 0$, 其解 $x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{3}$ 。

💡 判別式 $= b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 16 - 36 = -20 < 0$ (無實數解)

(×) 8. 若 p, q 為 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的兩相異實根, 則 $2(p + q) = pq$ 。

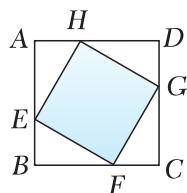
💡 $p + q = 4, p \times q = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow 2pq = p + q$

(○) 9. 若 x 為正整數且 $x - 1 < x < x + 1$, 設最小兩個整數的平方和等於最大數的平方, 則最大數為 6。

💡 $(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2, x^2 = (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x, x = 4$, 最大數 $x + 2 = 6$

(×) 10. 如右圖, 正方形 $ABCD$ 面積為 36, 若 $\overline{AH} = \overline{EB} = \overline{FC} = \overline{DG}$, 使得正方形 $EFGH$ 面積為 26, 且 $\overline{AE} > \overline{AH}$, 則 $\overline{AE} = 1$ 。

💡 令 $\overline{AE} = x, \overline{AH} = 6 - x \Rightarrow x^2 + (6 - x)^2 = 26 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ 或 1 (不合)



數學 健康狀況檢核表

※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

一元二次方程式的解法

一 一元二次方程式的意義

1. **一元二次方程式**：一個方程式中只含有一個未知數 x ，此未知數的最高次數為二次，稱此方程式為一元二次方程式。
2. **解(根)**：使得方程式等號成立的數稱之為方程式的解或根。
3. 一元二次方程式的解，就是所對應的二次多項式的根。所以，我們也稱此類方程式的解為根。

二 一元二次方程式的解法

1. 因式分解法

運用提出公因式法、平方差公式、完全平方公式及十字交乘法來解題。

2. 配方法

配方法常用於不能用十字交乘法或無法求解的一元二次方程式，有時候遇到常數項較大時，使用配方法會比因式分解法容易。

(1) 平方根解一元二次方程式的三種形式

類 型	$x^2 = k$	$(x + h)^2 = k$	$(ax + p)^2 = q$
解	$x = \pm \sqrt{k}$	$x = -h \pm \sqrt{k}$	$x = \frac{-p \pm \sqrt{q}}{a}$

(2) 配方法的求解步驟

① 一元二次方程式的標準式的「配方」步驟如下：

a. 方程式(標準式)	$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
b. 兩邊同除以 a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
c. 常數項移到右邊	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
d. 在左右二式同加 $(\frac{b}{2a})^2$	$x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$
e. 左式可化為完全平方式	$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

② 這個結果與前面 $(x - h)^2 = k$ 的形式相同，因為 $(x + \frac{b}{2a})^2$ 恆為正數或 0。

當 $b^2 - 4ac \geq 0$ 時	$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
------------------------	---

3. 公式解

將一元二次標準式配方之後，會得到一個公式，透過此公式即可求解。

$$\text{公式解} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

其中「 $D = b^2 - 4ac$ 」稱為**判別式**，係用於判斷兩根的形式：

判別式的性質	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$	$D \geq 0$
解(根)的情況	兩相異實根	兩根相等 (重根)	沒有實數解 (無解)	有實數解 (有解)

一元二次方程式的「根」與「係數」關係

設 α 、 β 為方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根，則 $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 。

若 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

$$\Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta, \text{經由比較係數,}$$

$$\Rightarrow \text{兩根之和 } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ 及兩根之積 } \alpha\beta = \frac{c}{a}。$$

師說 1

〈因式分解法－解一元二次方程式〉

演練 1

利用因式分解法，求一元二次方程式的根：

(1) $4x = 3x^2$

(2) $x^2 - 9 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(4) $6x^2 - 13x + 5 = 0$

解

(1) 原式 $\Rightarrow 3x^2 - 4x = 0, x(3x - 4) = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ 或 } \frac{4}{3}$$

(2) 原式 $\Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ 或 } x = -3$$

(3) 原式 $\Rightarrow (x - 3)^2 = 0, x = 3$ (重根)

(4) 原式 $\Rightarrow (2x - 1)(3x - 5) = 0,$
 $2x - 1 = 0$ 或 $3x - 5 = 0, x = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$

利用因式分解法，求一元二次方程式的根：

(1) $(x + 8)(x - 9) = (8 - x)(9 + x) + 56$

(2) $12x^2 - 23x = 24$

(3) $3(x - 2)^2 - 3 = 0$

(4) $(1 - x)^2 + 3(x - 1)(x - 3) = 0$

解

(1) 原式

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 8x - 72 = 72 + 8x - 9x - x^2 + 56$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 200 = 0, x^2 = 100, x = 10 \text{ 或 } -10$$

(2) 原式 $\Rightarrow (3x - 8)(4x + 3) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ 或 } -\frac{3}{4}$$

(3) 原式 $\Rightarrow 3(x - 2)^2 = 3, (x - 2)^2 = 1$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 1, x = 3 \text{ 或 } 1$$

(4) 原式 $\Rightarrow (x - 1)^2 + 3(x - 1)(x - 3) = 0$

$$\Rightarrow (x - 1)[(x - 1) + 3(x - 3)] = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 1 + 3x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(4x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = \frac{5}{2}$$

師說 2

〈配方法－解一元二次方程式〉

演練 2

請用配方法，求一元二次方程式的根：

(1) $x^2 - 40x + 204 = 0$

(2) $3x^2 - 6x + 1 = 0$

(3) $x^2 + 6x = 4891$

解

(1) 原式 $\Rightarrow x^2 - 40x = -204$

$\Rightarrow x^2 - 40x + 20^2 = -204 + 20^2$

$\Rightarrow (x - 20)^2 = 196 \Rightarrow x - 20 = \pm 14$

$\Rightarrow x = 34$ 或 6

(2) 原式 $\Rightarrow x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1^2 = -\frac{1}{3} + 1^2 \Rightarrow (x - 1)^2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x - 1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

(3) 原式 $\Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 4891 + 3^2$

$\Rightarrow (x + 3)^2 = 4900 \Rightarrow x + 3 = \pm 70$

$\Rightarrow x = -3 \pm 70 \Rightarrow x = 67$ 或 -73

1. 請用配方法將 $2x^2 - 6x - 1 = 0$ 配方成 $(x + p)^2 = q$ 的型式，並求 $p + 2q$ 的值為何？

2. 若 $x^2 + bx + 3 = 0$ 可推得 $(x - 3)^2 = k$ ，試求 $b + k$ 的值為何呢？

解

1. $2x^2 - 6x - 1 = 0, x^2 - 3x = \frac{1}{2},$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow p = -\frac{3}{2}, q = \frac{11}{4} \Rightarrow p + 2q = 4$

2. $(x - 3)^2 = k \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = k$

$\Rightarrow x^2 - 6x + (9 - k) = 0$

$\Rightarrow b = -6, 9 - k = 3, k = 6 \Rightarrow b + k = 0$

師說 3

〈公式解法－解一元二次方程式〉

演練 3

1. 試求下列方程式的解：

(1) $2(x - 1)(x - 3) = 5x$

(2) $3x^2 - 3x + 1 = 0$

2. 設方程式 $x^2 + (k + 2)x + 2k + 1 = 0$ 的兩根相等，求 $k = ?$

解

1. (1) $2(x - 1)(x - 3) = 5x \Rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0$

$D = (-13)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121 > 0$

\Rightarrow 方程式有兩實數解

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{121}}{4}$

$= \frac{13 \pm 11}{4} \Rightarrow x = 6$ 或 $\frac{1}{2}$

(2) $D = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 = -3 < 0$

\Rightarrow 方程式無實數解

2. \therefore 兩根相等 $\Rightarrow D = 0$

$(k + 2)^2 - 4 \times 1 \times (2k + 1) = 0$

$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 8k - 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k = 0$

$\Rightarrow k(k - 4) = 0 \Rightarrow k = 0$ 或 4

1. 試求下列方程式的解：

(1) $x^2 - 3x = 3$

(2) $2x^2 + 9x + 15 = 0$

2. 設方程式 $ax^2 + ax + 2 = 0$ 的兩根相等，試求 $a = ?$

解

1. (1) $x^2 - 3x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0,$

$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 21 > 0$

\Rightarrow 方程式有兩實數解

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{21}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

(2) $D = 9^2 - 4 \times 2 \times 15 = 81 - 120 = -39 < 0$

\Rightarrow 方程式無實數解

2. \therefore 兩根相等 $\Rightarrow D = 0$

$D = a^2 - 4 \times a \times 2 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a(a - 8) = 0$

$\Rightarrow a = 0$ 或 8 (但 0 不合)

$\Rightarrow a = 8$

師說 4

〈根與係數的關係〉

演練 4

146

設 α 、 β 為 $x^2 + 4x - 9 = 0$ 的兩根，試求下列各式的值為何呢？

- (1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$
- (2) $(\alpha - 3)(\beta - 3)$
- (3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

解

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -9$$

- (1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-9) \times (-4) = \underline{36}$
- (2) $(\alpha - 3)(\beta - 3) = \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9$
 $= (-9) - 3(-4) + 9 = \underline{12}$
- (3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
 $= \frac{(-4)^2 - 2 \times (-9)}{-9} = \frac{16 + 18}{-9} = \underline{-\frac{34}{9}}$

設 α 、 β 為 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 的兩根，試求下列各式的值為何呢？

- (1) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
- (2) $(\alpha - \beta)^2$
- (3) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$

解

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 3$$

- (1) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \underline{-\frac{5}{3}}$
- (2) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$
 $= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
 $= (-5)^2 - 4 \times 3 = \underline{13}$
- (3) $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$
 $= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 3 - (-5) + 1 = \underline{9}$

同步評量 1

(C) 1. 請問：-3 是下列哪一個方程式的根？

- (A) $x^2 - 3x = 0$ (B) $3x^2 = 0$ (C) $x^2 + 3x = 0$ (D) $x^2 + 3 = 0$

(A) 2. 若 $x^2 + 8x = 0$ ，則 $x = ?$

- (A) -8 或 0 (B) 8 或 0 (C) 4 或 0 (D) -4 或 0

(D) 3. 下列哪一個方程式的解為相異實根？

- (A) $x^2 + 4 = 0$ (B) $x^2 + 6x + 9 = 0$
 (C) $x^2 - x + 1 = 0$ (D) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

(A) 4. 設 a 為實數，若方程式 $4x^2 - 12x + (a - 3) = 0$ 的兩根相等，則方程式 $ax^2 - 13x + 3 = 0$ 的兩根為何？

- (A) $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ 或 1
 (C) $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$ 或 1

(A) 5. 若有一數 a 介於 $(5x - 2)(x + 2) = 0$ 的兩根之間，則 a 不可能是下列哪一個數？

- (A) 1 (B) -1
 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) 0

(B) 6. 設 α 、 β 為方程式 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的兩根，試求 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = ?$

- (A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

1. (A) $x^2 - 3x = 0, x(x - 3) = 0 \therefore x = 0$ 或 3
 (B) $3x^2 = 0 \therefore x = 0$ (重根)
 (C) $x^2 + 3x = 0, x(x + 3) = 0 \therefore x = 0$ 或 -3
 (D) $x^2 + 3 = 0$ 無法求得 x 值

2. $x^2 + 8x = 0, x(x + 8) = 0 \therefore x = 0$ 或 -8

3. 相異實根方程式之判別式 $D > 0$

- (A) $D = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0$
 (B) $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$
 (C) $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$
 (D) $D = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 - 4 = 4 > 0$

4. $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4(a - 3) = 0,$
 $144 - 16a + 48 = 0, a = 12,$ 則 $12x^2 - 13x + 3 = 0,$
 $(4x - 3)(3x - 1) = 0, \therefore x = \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$

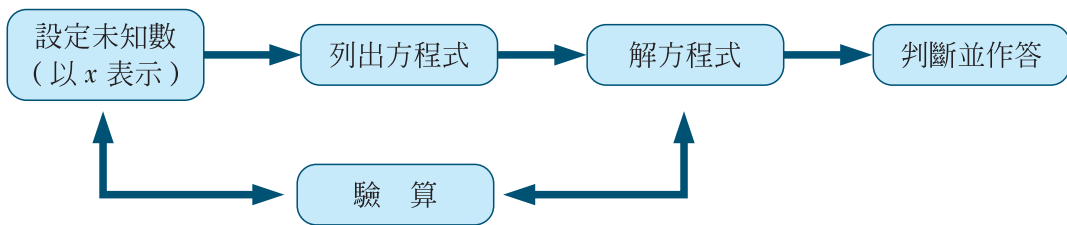
5. $\therefore (5x - 2)(x + 2) = 0 \therefore 5x - 2 = 0$ 或 $x + 2 = 0,$
 得 $x = \frac{2}{5}$ 或 -2 $\therefore a$ 介於 -2 與 $\frac{2}{5}$ 之間，不可能為 1

6. $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \alpha\beta = -\frac{3}{2},$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$

能力

一元二次方程式的應用

一元二次方程式應用問題的解題步驟：

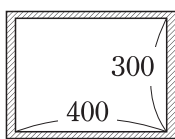


師說 5

〈一元二次方程式的應用問題 I〉

演練 5

2 年 18 班的布告欄長為 400 公分，寬為 300 公分，今天學藝股長要在其四周黏上一條等寬的紙條當做框，如此會增加布告欄面積的 12%，請問：此紙條的寬為多少公分呢？



解

設紙條的寬為 x 公分

$$\begin{aligned}
 & \text{則 } (2x + 400)(2x + 300) - 400 \times 300 \\
 & = 400 \times 300 \times 12\% \\
 \Rightarrow & 4x^2 + 600x + 800x + 120000 - 120000 \\
 & = 14400 \\
 \Rightarrow & 4x^2 + 1400x - 14400 = 0, \\
 & x^2 + 350x - 3600 = 0 \\
 \Rightarrow & (x - 10)(x + 360) = 0 \\
 \Rightarrow & x = -360 \text{ (不合) 或 } x = 10 \\
 & \text{故紙條的寬為 } \underline{10} \text{ 公分}
 \end{aligned}$$

裁縫師傅將一塊正方形布料的一邊裁去 3 公分，另一邊裁去原來的一半後，所形成的長方形布料較原正方形的面積少了 44 平方公分，試問原正方形布料的邊長為多少公分？

解

設正方形布料邊長為 x 公分

$$\begin{aligned}
 & \text{則 } x^2 - \frac{1}{2}x(x - 3) = 44 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = 44 \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = 44 \Rightarrow x^2 + 3x = 88 \\
 \Rightarrow & x^2 + 3x - 88 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 11) = 0 \\
 \Rightarrow & x = 8 \text{ 或 } -11 \text{ (不合)} \\
 & \text{故原邊長為 } \underline{8} \text{ 公分}
 \end{aligned}$$

師說 6

〈一元二次方程式的應用問題 II〉

演練 6

有三個連續正偶數，前面兩數的積加上後面兩數的積等於 392，試問此三數為何呢？

解

假設此三數為 $x - 2, x, x + 2$

$$\begin{aligned}
 & \text{則 } [(x - 2) \cdot x] + [x \cdot (x + 2)] = 392 \\
 \Rightarrow & 2x^2 = 392 \Rightarrow x^2 = 196 \Rightarrow x = \pm 14 \text{ (負不合)} \\
 & \text{此三數為 } \underline{12, 14, 16}
 \end{aligned}$$

若兩數之和為 17，它們的積比它們的平方和小 199，則此兩數應為何？

解

設兩數為 $x, 17 - x$

$$\begin{aligned}
 & x(17 - x) - [x^2 + (17 - x)^2] = -199 \\
 \Rightarrow & 17x - x^2 - x^2 - 289 + 34x - x^2 = -199 \\
 \Rightarrow & -3x^2 + 51x - 90 = 0 \Rightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \\
 \Rightarrow & (x - 2)(x - 15) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } 15 \\
 & \text{所以此兩數為 } \underline{2 \text{ 或 } 15}
 \end{aligned}$$

師說 7

<一元二次方程式的應用問題 III>

演練 7

148

在 $x = 7$ 的直線上有一點 A ，已知 A 點到原點的距離與 A 點到 $(5, 0)$ 的距離之比值為 $\frac{5}{4}$ ，求 A 點的坐標？

解

令 $A(7, y)$

$$\text{則 } \frac{\sqrt{(7-0)^2 + (y-0)^2}}{\sqrt{(7-5)^2 + (y-0)^2}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{49 + y^2} = 5\sqrt{4 + y^2}$$

$$\Rightarrow 784 + 16y^2 = 100 + 25y^2$$

$$\Rightarrow 684 = 9y^2 \Rightarrow y^2 = 76 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{19}$$

$$\Rightarrow \underline{A \text{ 點坐標為 } (7, 2\sqrt{19}) \text{ 或 } (7, -2\sqrt{19})}$$

求在直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上與原點距離為 5 的所有點之坐標？

解

$$y = \frac{1}{2}x \text{ 上的點坐標皆可設為 } (a, \frac{1}{2}a)$$

$$\text{則 } \sqrt{a^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = 5 \Rightarrow a^2 + \frac{a^2}{4} = 25$$

$$\Rightarrow 4a^2 + a^2 = 100 \Rightarrow 5a^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{100}{5} = 20 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{5}$$

所以距離 5 的坐標有

$$\underline{(2\sqrt{5}, \sqrt{5})、(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})}$$

同步評量 2

(C) 1. 有一正方形，若將其一邊長減少 3 公分，另一邊長變為原邊長的 2 倍，則所得新長方形的面積比原正方形的面積多 7 平方公分，則原正方形的邊長為多少公分？

(A) 5 (B) 6

(C) 7 (D) 9

1. 設原正方形的邊長為 x 公分，

$$\text{則 } (x-3) \cdot 2x = x^2 + 7, 2x^2 - 6x = x^2 + 7,$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0, (x-7)(x+1) = 0, \therefore x = 7 \text{ 或 } -1 (-1 \text{ 不合})$$

(A) 2. 史老師出生於民國 63 年，在出生日的 $3x$ 年前，正好是民國 $(x-3)^2$ 年，請問：是民國幾年？

(A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39

2. 依題意得 $63 - 3x = (x-3)^2, x^2 - 3x - 54 = 0,$

$$(x-9)(x+6) = 0 \therefore x = 9 \text{ 或 } -6 (-6 \text{ 不合}),$$

$$(9-3)^2 = 6^2 = 36, \text{ 民國 } 36 \text{ 年}$$

(B) 3. 有一三角形，其底與對應高的比是 4:5，若面積為 90 平方公分，則此三角形的底和高相差多少公分？

(A) 4 (B) 3

(C) 2 (D) 1

3. 設底長為 $4x$ 公分，高為 $5x$ 公分，則 $\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 5x = 90, 10x^2 = 90, x^2 = 9$

$$\therefore x = \pm 3 (-3 \text{ 不合}), \text{ 底長 } 12 \text{ 公分，高為 } 15 \text{ 公分}$$

$$\therefore \text{底和高相差 } 3 \text{ 公分}$$

(D) 4. 設一直角三角形有一股長為 24 公分，斜邊長比另一股長 3 倍多 4 公分，則此三角形的面積為多少平方公分？

(A) 360 (B) 260

(C) 165 (D) 84

4. 設另一股長為 x 公分，則斜邊長為 $(3x+4)$ 公分

$$\Rightarrow (3x+4)^2 = x^2 + 24^2, 9x^2 + 24x + 16 = x^2 + 576,$$

$$8x^2 + 24x - 560 = 0, x^2 + 3x - 70 = 0,$$

$$(x-7)(x+10) = 0 \therefore x = 7 \text{ 或 } -10 (-10 \text{ 不合})$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84 (\text{平方公分})$$

(B) 5. 已知一線段 \overline{AB} 的長為 10 公分，今在 \overline{AB} 上取一點 P 且 $\overline{AP} < \overline{BP}$ ，分別以 \overline{AP} 、 \overline{BP} 為直徑各作一圓，如果這兩圓的面積和為 13π 平方公分，則 \overline{AP} 等於多少公分？

(A) 3 (B) 4

(C) 5 (D) 6

5. 設 $\overline{AP} = x$ ，則 $\overline{BP} = 10 - x$ ，且 $\overline{AP} < \overline{BP}$ ， $(\frac{x}{2})^2\pi + (\frac{10-x}{2})^2\pi = 13\pi$ ，

$$\frac{x^2}{4} + \frac{100 - 20x + x^2}{4} = 13, 2x^2 - 20x + 100 = 52, x^2 - 10x + 24 = 0,$$

$$(x-6)(x-4) = 0 \therefore x = 4 \text{ 或 } 6 (6 \text{ 不合})$$



基本觀念題

- (A) 1. 已知 $x = -1$ 是一元二次方程式 $x^2 - (a+1)x + 2 = 0$ 的一根，求 a 之值？
 (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4 1. $(-1)^2 - (a+1)(-1) + 2 = 0, a = -4$
- (D) 2. 若方程式 $(x-2)(3x+1) = 0$ ，則 $3x+1$ 之值為何？
 (A) 7 (B) 2 2. $(x-2)(3x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 $-\frac{1}{3}, \therefore 3x+1 = \begin{cases} 3 \times 2 + 1 = 7 \\ 3 \times (-\frac{1}{3}) + 1 = 0 \end{cases}$
 (C) 0 (D) 7 或 0
- (B) 3. 若 x 的二次方程式 $x^2 + x - a = 0$ 解中的其中一根之倒數為 2，則 a 的值為何？
 (A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$ 3. $x = \frac{1}{2}$ 代入，則 $(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - a = 0, \therefore a = \frac{3}{4}$
- (D) 4. 利用配方法將 $2x^2 + x = \frac{1}{8}$ 化成 $(x+p)^2 = q$ 的形式，求 $8q - 4p = ?$
 (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2 4. $2(x^2 + \frac{1}{2}x) = \frac{1}{8}, 2(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4}$
 $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}, 8q - 4p = 2$
- (B) 5. 若 $2x^2 - 3x + 1$ 加上一數 a 後，成為完全平方式，則 $a = ?$
 (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ 5. $2x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x) + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) + 1 - \frac{9}{8}$
 $= 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$
 \therefore 須加上 $\frac{1}{8}$ ，才可成為完全平方式
 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$
- (D) 6. 若一元二次方程式 $x^2 - (k-1)x + 4 = 0$ 的兩根相等，求 $k = ?$
 (A) 5 (B) 3 (C) 3 或 5 (D) -3 或 5 6. $D = [-(k-1)]^2 - 16 = 0,$
 $(k-1)^2 = 16, k-1 = \pm 4, k = 5$ 或 -3
- (A) 7. 設 $ab \neq 0$ ，若 a, b 為一元二次方程式 $x^2 + 3ax + 2b = 0$ 的兩根，則 $a + b = ?$
 (A) -6 (B) 6 (C) -3 (D) 3 7. 利用根與係數 $a + b = -3a, ab = 2b \Rightarrow a = 2,$
 $\therefore a + b = -3 \times 2 = -6$
- (A) 8. 設 α, β 為 $6x^2 - 13x + 5 = 0$ 的兩根，求 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = ?$
 (A) $-\frac{1}{3}$ (B) -3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3 8. $\alpha + \beta = \frac{13}{6}, \alpha\beta = \frac{5}{6}$
 求值式 $= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \frac{5}{6} - \frac{13}{6} + 1 = -\frac{1}{3}$
- (C) 9. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根是 1 與 -1，求 $b + c$ 與 a 之比值為何？
 (A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 9. 將 $x = 1$ 代入 $ax^2 + bx + c = 0, a + b + c = 0,$
 $b + c = -a \therefore \frac{b+c}{a} = -1$
- (A) 10. 若方程式 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 可配方成 $(x+a)^2 + b = 0$ ，則點 $(ab, a-b)$ 在坐標平面上的第幾象限？
 (A) 一 (B) 二 10. $x^2 - 6x + 3 = (x+a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2a = -6 \\ a^2 + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow (ab, a-b) = (18, 3) \Rightarrow$ 在第一象限內
 (C) 三 (D) 四
- (B) 11. 有一直角三角形的三邊長是連續偶數，求此三角形的三邊之和為多少？
 (A) 12 (B) 24 11. 設三邊長為 $(x-2), x, (x+2) \Rightarrow x^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2$
 $\Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow x = 8$ 或 0 (不合)
 \Rightarrow 三邊長為 6、8、10，其三邊和為 24
 (C) 36 (D) 48

(B) 12. 方程式 $3(x+1)^2 + 5(x+1)(x-4) + 2(x-4)^2 = 0$ 的二根之積為何？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 3 (D) -4
12. 將 $(x+1)$ 視為 A , $(x-4)$ 視為 B , 則原式 $= 3A^2 + 5AB + 2B^2 = 0$
 $\Rightarrow (A+B)(3A+2B) = (x+1+x-4)(3x+3+2x-8) = 0$
 $(2x-3)(5x-5) = 0, x = \frac{3}{2}$ 或 $1 \Rightarrow$ 兩根積 $= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

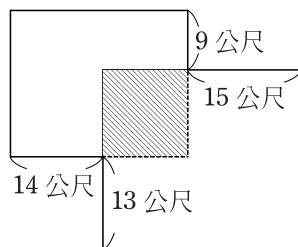
(C) 13. 若 a 為方程式 $9x^2 - x + 7 = 0$ 的解, b 為方程式 $3x^2 + 2x - 2 = 0$ 的解, 則 $(9a^2 - a)(3b^2 + 2b)$ 的值為下列哪一選項？

- (A) -7 (B) 2 (C) -14 (D) 14
13. $x = a$ 代入: $9a^2 - a + 7 = 0, \therefore 9a^2 - a = -7$
 $x = b$ 代入: $3b^2 + 2b - 2 = 0, \therefore 3b^2 + 2b = 2$
 $\therefore (9a^2 - a)(3b^2 + 2b) = -7 \times 2 = -14$

(B) 14. 耀則、正揚兩人利用公式同解一個一元二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$, 耀則看錯常數項, 其餘均沒錯, 得兩根為 3、-4, 正揚看錯 x 項係數, 其餘均沒錯, 得兩根為 2、-1, 則原方程式兩根和為多少？

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1
14. 耀則: $(x-3)(x+4) = 0, x^2 + x - 12 = 0$
 正揚: $(x+1)(x-2) = 0, x^2 - x - 2 = 0$
 \therefore 正確方程式: $x^2 + x - 2 = 0 \therefore$ 兩根和為 -1

(C) 15. 王老先生有一塊由兩個長方形重疊而成的農地, 且重疊部分(如右圖中斜線部分)為正方形, 已知農地總面積為 1003 平方公尺, 若將農地中陰影部分闢成水池, 則此水池的邊長為多少公尺？



- (A) 13 (B) 12 (C) 11 (D) 10
15. 設正方形邊長 x 公尺
 $(14+x)(9+x) + (13+x)(15+x) - x^2 = 1003,$
 $126 + 23x + x^2 + 195 + 28x + x^2 - x^2 = 1003,$
 $x^2 + 51x - 682 = 0, (x-11)(x+62) = 0,$
 $\therefore x = 11$ 或 -62 (-62 不合)



(D) 1. 若 α 、 β 為方程式 $\frac{(x+3)(x-5)}{7} = \frac{x(x-2)}{8}$ 的兩根, 且 $\alpha > \beta$, 則 $\alpha + 2\beta = ?$

- (A) 5 (B) 10 (C) -6 (D) -8
1. $8(x^2 - 2x - 15) = 7(x^2 - 2x) \Rightarrow 8x^2 - 16x - 120 = 7x^2 - 14x$
 $\Rightarrow x^2 - 2x - 120 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 12$ 或 (-10)
 $\alpha = 12, \beta = -10 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 12 + (-20) = -8$ 97 基測二

(B) 2. 若 b 為正數且方程式 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根均為整數, 則 b 可能為下列哪一數？

- (A) $2 \times 3 \times 5 \times 11$ (B) $2 \times 3 \times 7 \times 11$ (C) $2 \times 5 \times 7 \times 11$ (D) $3 \times 5 \times 7 \times 11$
2. 若 s 、 t 為 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根, 則 $s+t=1, st=-b < 0,$
 可知兩根相加為 1
 由(B)可知 $2 \times 3 \times 7 \times 11 = (3 \times 7) \times (2 \times 11) = 21 \times 22$ 96 基測二
 兩根為 22、-21

(D) 3. 將一元二次方程式 $x^2 - 6x - 5 = 0$ 化成 $(x+a)^2 = b$ 的型式, 則 $b = ?$

- (A) -4 (B) 4 (C) -14 (D) 14
3. 原式 $\Rightarrow x^2 - 6x = 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 3^2 = 5 + 3^2$
 $\Rightarrow (x-3)^2 = 14, b = 14$ 96 基測一

(A) 4. 下列何者為一元二次方程式 $(2x+3)(x+1) = (x+1)(x+3)$ 的解？

- (A) $x = 0$ 或 $x = -1$ (B) $x = -1$ 或 $x = -3$ (C) $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = -1$ (D) $x = -3$ 或 $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = -1$
4. 原式 $\Rightarrow (2x+3)(x+1) - (x+1)(x+3) = 0$
 $\Rightarrow (x+1)[(2x+3) - (x+3)] = 0$
 $\Rightarrow (x+1) \cdot x = 0 \Rightarrow x = -1$ 或 0 96 基測一

- (B) 5. 已知方程式 $x^2 - 5625 = 0$ 的兩根為 ± 75 ，則下列何者可為方程式 $x^2 + 6x - 5616 = 0$ 的解？
- (A) $x = 69$ (B) $x = 72$ (C) $x = 77$ (D) $x = 81$
5. $x^2 + 6x - 5616 = 0, (x+3)^2 - 5616 - 9 = 0$
 $(x+3)^2 - 5625 = 0, (x+3)^2 = 5625,$
 $x+3 = \pm 75, x = 72 \text{ 或 } -78$



- (C) 1. 方程式 $3(x^2 + 1) = 2x^2 - 6x + 12$ 之兩根為 a, b ，則 $a^2 + b^2$ 的值為何呢？
- (A) 35 (B) 45 (C) 54 (D) 63
1. $3(x^2 + 1) = 2x^2 - 6x + 12 \Rightarrow x^2 + 6x - 9 = 0$
 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (-6)^2 - 2 \times (-9)$
 $= 36 + 18 = 54$
- (D) 2. 利用配方法，將 x 的一元二次方程式 $-2x^2 - 4x + 1 = 0$ 改寫成 $-2(x-h)^2 + k = 0$ 之型式，則 $h \times k = ?$
- (A) -1 (B) 0 (C) -2 (D) -3
2. $-2x^2 - 4x + 1 = 0, -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = 0,$
 $\Rightarrow -2(x+1)^2 + 3 = 0 \therefore h \times k = -1 \times 3 = -3$
- (D) 3. 若 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，則 $(2x+1)^2 - 7$ 的值為何呢？
- (A) 5 (B) 3 (C) 0 (D) -2
3. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow 2x+1 = \sqrt{5},$ 求值式 $= (\sqrt{5})^2 - 7 = -2$
- (D) 4. 一元二次多項式 $2x^2 - 5x + 2$ 需要再加上下列哪一個數之後，才會形成完全平方式呢？
- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$
4. 設再加上 k 能成為完全平方式
 $D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (2+k) = 0$
 $\Rightarrow 25 - 16 - 8k = 0 \Rightarrow 9 - 8k = 0, k = \frac{9}{8}$
- (B) 5. 若 $1 - \sqrt{2}$ 為 $x^2 - (a+1)x - a = 0$ 的一根，則 $a = ?$
- (A) -1 (B) 1 (C) $-1 - \sqrt{2}$ (D) $-1 + \sqrt{2}$
5. $x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2 = 2$
 $\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ 與 $x^2 - (a+1)x - a = 0$ 比較，
 $a+1 = 2, a = 1$
- (A) 6. 設 a, b, c 皆為實數，若 1 為 $x^2 + ax + 2 = 0$ 的一根，且 a, b 為 $x^2 + 5x + c = 0$ 的兩根，請問： $3a + 2b + c$ 的值為何呢？
- (A) -7 (B) -5 (C) 5 (D) 7
6. $\begin{cases} 1+a+2=0 \\ a \times b = c \\ a+b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = -2, c = 6$
 $\Rightarrow 3a + 2b + c = -7$
- (C) 7. 若方程式 $x^2 - 30x + k = 0$ 之兩根都是質數，則下列何者可為 k 的值？
- (A) 29 (B) 81 (C) 209 (D) 319
7. $30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17, \therefore k = 7 \times 23 = 161$
 $11 \times 19 = 209, 13 \times 17 = 221$
- (D) 8. 下列哪一個一元二次方程式無解呢？
- (A) $2x^2 + 3x - 4 = 0$ (B) $x^2 - x - 1 = 0$ (C) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (D) $3x^2 - 4x + 3 = 0$
8. $3x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Rightarrow D = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 16 - 36 = -20 < 0$
 \Rightarrow 無解
- (B) 9. 設 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 之三邊長， $(a+b)x^2 + 2cx + (a-b) = 0$ 有重根，則 $\triangle ABC$ 是何種三角形呢？
- (A) 正三角形 (B) 直角三角形 (C) 等腰三角形 (D) 鈍角三角形
9. $D = (2c)^2 - 4(a+b)(a-b) = 0, 4c^2 - 4a^2 + 4b^2 = 0,$
 即 $a^2 = b^2 + c^2 \therefore$ 為直角三角形
- (D) 10. 設 α, β 是二次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的兩根，則以 $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ 為兩根的二次方程式為何呢？
- (A) $-3x^2 + 8x = 4$ (B) $-3x^2 - 8x - 4 = 0$ (C) $3x^2 - 8x = -4$ (D) $3x^2 - 8x - 4 = 0$
10. 由根與係數： $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -3$
 $\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \times (-4)}{-3} = \frac{8}{3}$
 $\frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$
 \therefore 方程式為 $x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ ，即 $3x^2 - 8x - 4 = 0$

第 13 單元 數型關係、等差數列與級數

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少？測驗就知道！

(○) 1. 若 $m + 2$ 是偶數， $3n + 2$ 是奇數，則 $3m + n$ 是奇數。

💡 $\because m + 2$ 是偶數， $\therefore m = \text{偶數}$ ， $\because 3n + 2$ 是奇數， $\therefore n$ 是奇數， $3m + n = \text{奇數}$

能力一

(○) 2. 觀察此數列 2, 5, 11, a , 47, 則 $a = 23$ 。

💡 $5 = 2 \times 2 + 1$, $11 = 5 \times 2 + 1$, $\dots \Rightarrow a = 11 \times 2 + 1 = 23$

(×) 3. 有一數列 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 則下一個數為 45。

💡 $1 + 1 + 2 = 4$, $1 + 2 + 4 = 7$, $2 + 4 + 7 = 13$, $4 + 7 + 13 = 24$, $7 + 13 + 24 = 44$

(○) 4. 1111 人力銀行的 1、1、1、1 是等差數列。

💡 後項減前項的差皆相同時，為等差數列

能力二

(○) 5. 等差數列 1, 4, 7, 10, 13 的等差級數可表示成 $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 3) + (1 + 3 + 3 + 3) + (1 + 3 + 3 + 3 + 3)$ 。

💡 等差級數為等差數列之和

(×) 6. 若 a 、 b 、4、 c 、 d 、16 與 a 、 e 、 c 、 f 皆成等差數列，則 $f - e - d + b = -2$ 。

💡 $a = -4$, $b = 0$, $c = 8$, $d = 12$, $e = 2$, $f = 14$, $f - e - d + b = 0$

(×) 7. 若 $f(x) = 2x - 11$, $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 \dots 、 $f(n)$ 為一等差數列，則其公差為 -2 。

💡 $f(1) = -9$, $f(2) = -7$, 公差 $d = f(2) - f(1) = -7 - (-9) = 2$

(○) 8. 有一等差數列 $19 \times (-2)$ 、 $16 \times (-2)$ 、 $13 \times (-2)$ 、 $10 \times (-2)$ 、 $7 \times (-2)$ ，其級數之和為 -130 。

💡 級數和 $= (19 + 16 + 13 + 10 + 7) \times (-2) = \frac{5 \times (7 + 19)}{2} \times (-2) = -130$

(×) 9. 在 -19 與 11 之間插入 20 個數，使其成為等差數列，則此等差數列的和為 88。

💡 $\frac{20 + 2}{2} \times (-19 + 11) = 11 \times (-8) = -88$

(○) 10. 任意三角形的三個內角成等差數列，則此三角形必有一個內角為 60° 。

💡 設三內角為 $(x - d)^\circ$ 、 x° 、 $(x + d)^\circ \Rightarrow (x - d)^\circ + x^\circ + (x + d)^\circ = 180^\circ$, $3x = 180^\circ$, $x = 60^\circ$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

數的規律與數型關係

一 奇、偶數的規律

1. 偶數：在整數中能夠被 2 整除，或等於 $2n$ (n 為整數) 的數，偶數可形成無窮數列 2、4、6、8、10……。
2. 奇數：在整數中不能夠被 2 整除，亦即可被 2 除餘 1 的數，可寫成 $2n + 1$ 或 $2n - 1$ (n 為整數) 的形式，奇數可形成無窮數列 1、3、5、7、9……。

二 奇、偶數的和、積

1. 兩正整數之和為偶數 \Rightarrow 此兩數必同時為奇數或偶數。
2. 兩正整數之和為奇數 \Rightarrow 此兩數必為奇數和偶數之和。
3. 幾個正整數的乘積為偶數 \Rightarrow 其中必有偶數。

奇 \pm 奇 \Rightarrow 偶	偶 \pm 偶 \Rightarrow 偶	奇 \pm 偶 \Rightarrow 奇
奇 \times 奇 \Rightarrow 奇	偶 \times 偶 \Rightarrow 偶	奇 \times 偶 \Rightarrow 偶

三 數型關係

在有規律排列的型體中，形體與排列的數量呈現規律的變化，此規律變化可使用通式來連結，以便做計算與歸納。

類型一	有 n 個三角形，需要 $2n + 1$ 根火柴棒 * $(1 + 2) + (1 + 2 \times 2) + (1 + 2 \times 3) + \dots + (1 + 2 \times n) = 2n + 1$	
類型二	有 n 層，需要 n^2 個小正方形 * $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$	
(三角數) 類型三	有 n 層，需要 $\frac{(1 + n) \times n}{2}$ 個黑點 * $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$	
(四角數) 類型四	有 n 層，需要 n^2 個黑點 * $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$	

師說 1

〈奇、偶數的規律〉

演練 1

- 今有 30 個學生，分成甲、乙兩組，將偶數個糖果分給甲組同學每人 3 個，乙組同學每人 4 個，全部分完，請問：甲、乙兩組人數分別是奇數還是偶數？
- 設 n 為偶數，則下列何者不是奇數？
 (A) $2n + 1$ (B) $3n - 2$
 (C) $7n - 3$ (D) $4n + 3$

解

- 因為班上總人數是偶數，所以一定是
 【奇數 + 奇數 = 偶數】或
 【偶數 + 偶數 = 偶數】
 $\Rightarrow \begin{cases} 3 \times \text{奇數} + 4 \times \text{奇數} = \text{奇數} + \text{偶數} = \text{奇數} (\text{不合}) \\ 3 \times \text{偶數} + 4 \times \text{偶數} = \text{偶數} + \text{偶數} = \text{偶數} \end{cases}$
 故甲、乙兩組人數皆為偶數
- 偶數的整數倍亦為偶數，
 偶數 \pm 奇數 = 奇數
 偶數 + 偶數 = 偶數
 故只有(B)不是奇數

- 試問下列四個敘述，何者正確？(甲) 奇數 + 偶數 = 奇數、(乙) 奇數 + 奇數 = 偶數、(丙) 偶數 + 奇數 = 偶數、(丁) 偶數 + 偶數 = 奇數。
- 如果 m 代表一個正整數，則下列哪一個數一定可以代表一個正奇數？
 (A) $m + 1$ (B) $m + 2$
 (C) $2m - 1$ (D) $2m + 2$

解

- 設 n 為整數且 $n \geq 0$ ，則 $2n$ 為偶數， $2n + 1$ 為奇數
 (甲) $(2n + 1) + 2n = 4n + 1$ (符合)
 (乙) $(2n + 1) + (2n + 1) = 4n + 2$ (符合)
 (丙) $2n + (2n + 1) = 4n + 1$ (不符合)
 (丁) $2n + 2n = 4n$ (不符合)
 \therefore (甲)(乙)正確
- 由題意可知：

m	(A) $m + 1$	(B) $m + 2$	(C) $2m - 1$	(D) $2m + 2$
奇	偶	奇	奇	偶
偶	奇	偶	奇	偶

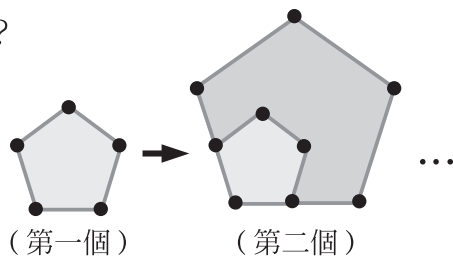
\therefore (C)正確

師說 2

〈數型關係〉

演練 2

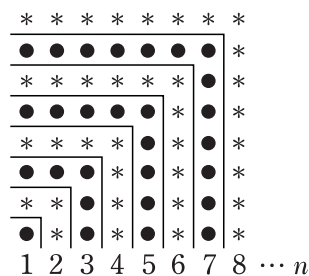
如圖，第一個五邊形中的「●」個數是 5 個，第二個五邊形中的「●」個數是 9 個，以此類推，請問：第八個五邊形中的「●」個數有多少個呢？



解

找出規律性：一個五邊形由 1 個點加上 4 個點構成，第二個五邊形再多加 4 個點構成，所以可以導出通式為： $(4n + 1)$ ， n 代表五邊形個數。
 第八個五邊形有 $\Rightarrow (4 \times 8) + 1 = 33$ 點

觀察下圖，當最後一階為 33 個時，哪一種符號(●或*)比較多？多幾個？



解

最後一階為 33 個時，其符號為●
 $(1 - 3) + (5 - 7) + (9 - 11) + \dots + (29 - 31) + 33$
 $= (-2) + (-2) + (-2) + \dots + (-2) + 33$
 $= (-2) \times 8 + 33 = 17$
 \therefore ●比較多，多 17 個

同步評量 1

- (C) 1. 若 a 為任意一個正整數，則下列哪一個型式必為奇數？
 (A) $2a$ (B) $2(a - 1)$ (C) $2a + 1$ (D) $3a$

1. (C) $2a$ 為偶數， $2a + 1 \Rightarrow$ 奇數

- (D) 2. 甲數為整數，則下列何者一定正確？ 2. (D) $2 \times \text{甲} \Rightarrow$ 偶數, $2 \times \text{甲} + 11 \Rightarrow$ 奇數
- (A) 「 $5 \times \text{甲數}$ 」為奇數 (B) 「 $2 \times \text{甲數} + 7$ 」為偶數
 (C) 「 $2 \times \text{甲數} + 8$ 」為奇數 (D) 「 $2 \times \text{甲數} + 11$ 」為奇數
- (B) 3. 已知甲數 + 乙數所得的和是偶數，而乙數 + 丙數所得的和是奇數，如果丙數是6，則下列哪一個選項是正確的？ 3. 乙 + 6 為奇數 \Rightarrow 乙為奇數, 甲 + 乙為偶數 \Rightarrow 甲為奇數
- (A) 甲數可能是4 (B) 甲數可能是7 (C) 乙數可能是10 (D) 乙數可能是8
- (C) 4. 華西街靠近西邊的房子門牌號碼為1、3、5、7、9、...的連續奇數號；靠近東邊的房子門牌號碼為2、4、6、8、10、...的連續偶數號，則下列何者正確？
- (A) 靠近東邊第50間房子為102號 4. 西邊 $(2n - 1) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 60 - 1 = 119 \\ 2 \times 51 - 1 = 101 \end{cases}$
 (B) 靠近東邊第61間房子為120號 東邊 $(2n) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 50 = 100 \\ 2 \times 61 = 122 \end{cases}$
 (C) 靠近西邊第60間房子為119號
 (D) 靠近西邊第51間房子為103號
- (D) 5. 小麟老師將120位同學全部加以編號，並依右圖的排列方式分為A、B、C、D、E五組，則117號同學會編在哪一組呢？
- | A | B | C | D | E |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
- (A) A (B) B 5. $\therefore 1 \sim 10$ 為一循環,
 (C) C (D) D $\therefore 117 \div 10 = 11 \dots 7 \Rightarrow D$ 組

能力

等差數列與級數

一 數列

依序排列的一串數稱為數列 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，其中第一個數稱為「首項 a_1 」，最後一個數稱為「末項 a_n 」，共有 n 項。

二 等差數列

在一個數列中，任何相鄰的兩項，當後項減前項所得的差都相同時，此數列稱為等差數列，這個差稱為等差數列的公差。

三 等差數列與級數的重要公式

設首項為 a_1 ，公差為 d ，第 n 項為 a_n ，前 n 項的總和為 S_n

1. 標準式： $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n - 1)d$

2. 第 n 項公式： $a_n = a_1 + (n - 1)d = S_n - S_{n-1}$

3. 前 n 項總和公式（等差級數的和）： $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$

四 等差中項

1. 假設 a, b, c 成等差數列 $\Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$ ， b 稱為 a, c 的等差中項。

2. 若在 a, b 之間，插入 m 個數，則 $b = a + (m + 1)d$ 。

師說 3

〈等差數列〉

演練 3

有一等差數列，其第 n 項是 $(-3n + 20)$ ，請問：(1) 首項 = ? (2) 公差 = ? (3) 第 20 項 = ? (4) 第幾項開始為負數呢？

解

- (1) 首項 $a_1 = -3 \times 1 + 20 = 17$
- (2) 公差 $d = a_2 - a_1 = (-3 \times 2 + 20) - 17 = 14 - 17 = -3$
- (3) $a_{20} = -3 \times 20 + 20 = -40$
- (4) $-3n + 20 < 0, -3n < -20, n > 6\frac{2}{3}$
取整數 $n = 7$

若 $a、3、x、y、15$ 成等差數列， $a、c、z、20、b$ 也成等差數列，請問： $x + y + z - c = ?$

解

- $\therefore a、3、x、y、15$ 為等差數列 $d_1 = \frac{15-3}{3} = 4$
 $\therefore a = 3 - 4 = -1,$
 $x = 3 + 4 = 7, y = 7 + 4 = 11$
 又 $-1、c、z、20、b$ 也是等差數列
 $d_2 = \frac{20 - (-1)}{3} = 7 \therefore c = -1 + 7 = 6,$
 $z = 6 + 7 = 13, b = 20 + 7 = 27$
 $\Rightarrow x + y + z - c = 7 + 11 + 13 - 6 = 25$

師說 4

〈等差級數 I〉

演練 4

1. 求等差級數 $(-11) + (-4) + \dots + 66$ 的和是多少？
2. 有一等差級數共 16 項，其總和為 728，若將各項均加 5 之後得一新級數，則此新級數之和為多少？
3. 已知一等差級數的第 4 項為 -101 ，第 9 項為 -56 ，則此等差級數自首項加到第幾項時，其和為最小？

解

1. $a_1 = -11, d = -4 - (-11) = 7,$
 $a_n = 66, a_n = a_1 + (n-1)d,$
 $66 = (-11) + (n-1) \times 7, n = 12$
 $S_{12} = \frac{(-11 + 66) \times 12}{2} = 55 \times 6 = 330$
2. $n = 16, S_n = 728,$
 新 $S_n = 728 + (16 \times 5) = 808$
3. $a_9 = a_4 + (9-4)d,$
 $\Rightarrow -56 = -101 + 5d, d = 9$
 $a_4 = a_1 + (4-1) \times 9$
 $\Rightarrow -101 = a_1 + 27,$
 $a_1 = -128$
 設此等差級數第 n 項開始為正數
 $a_n = -128 + (n-1) \times 9 = 9n - 137 > 0$
 $\Rightarrow n > \frac{137}{9}, n > 15\frac{2}{9}, n = 16$
 故此等差級數自首項加到第 16 項時，其和最小

1. 有一等差級數首項為 101，公差為 -7 ，試求前 11 項的和為多少？
2. 若甲、乙兩人同時同地出發，甲每日走 11 公里，乙第一日走 7 公里，而後每日增加固定之公里數，若出發 6 日乙可追上甲，則乙每日要固定增加多少公里？
3. 已知一等差級數 $a_7 = -333, a_{17} = -283$ ，則此等差級數自首項加到第幾項時，其和開始為正數？

解

1. $a_1 = 101, d = -7, n = 11$
 $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$
 $S_{11} = \frac{11[2 \times 101 + (11-1) \times (-7)]}{2}$
 $= \frac{11[202 - 70]}{2} = \frac{11 \times 132}{2} = 726$
2. 設乙每日增加 d 公里
 $11 \times 6 = \frac{6[2 \times 7 + (6-1)d]}{2}$
 $\Rightarrow 132 = 6(14 + 5d) \Rightarrow 22 = 14 + 5d,$
 $d = \frac{8}{5} = 1.6,$ 所以乙每日要固定增加 1.6 公里
3. $a_{17} = a_7 + (17-7)d$
 $\Rightarrow -283 = -333 + 10d, d = 5$
 $a_7 = a_1 + (7-1)d$
 $\Rightarrow -333 = a_1 + 6 \times 5, a_1 = -363$
 設此等差級數自首項加到第 n 項時，其和開始為正數
 $\frac{n[2 \times (-363) + (n-1) \times 5]}{2} > 0$
 $\Rightarrow 5n - 731 > 0 \Rightarrow n > \frac{731}{5}$
 $\Rightarrow n > 146\frac{1}{5}, n$ 取 147，所以此等差級數自首項加到第 147 項時，其和開始為正數

師說 5

〈等差級數 II〉

演練 5

已知多邊形的外角和為 360° ，一內角與其外角和為 180° ，若有一多邊形其內角度數是一個以公差為 4° 的等差數列，且其最大內角為 162° ，請問：此多邊形的邊數為何呢？

解

162° 的外角為 18° ，多邊形的外角和為 360° ，設此多邊形有 n 邊，

$$\Rightarrow a_1 = 18, d = 4$$

$$\Rightarrow 360 = \frac{n[36 + (n-1) \times 4]}{2}$$

$$\Rightarrow 720 = 4n^2 + 32n$$

$$\Rightarrow n^2 + 8n - 180 = 0 \Rightarrow (n+18)(n-10) = 0$$

$$\Rightarrow n = -18 \text{ (不合) 或 } n = 10 \text{ (邊)}$$

有一等差級數的第 4 項為 -3 ，第 8 項為 13 ，等差級數和為 1290 ，請問：此等差級數的首項、公差、項數各為多少呢？

解

設首項為 a_1 、公差為 d 、項數為 n ，

$$\begin{cases} a_1 + 3d = -3 \\ a_1 + 7d = 13 \end{cases} \Rightarrow d = 4, a_1 = -15$$

$$1290 = \frac{n[2 \times (-15) + (n-1) \times 4]}{2}$$

$$\Rightarrow 2580 = n(4n - 34) \Rightarrow 4n^2 - 34n - 2580 = 0$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 17n - 1290 = 0$$

$$\Rightarrow (n-30)(2n+43) = 0$$

$$\Rightarrow n = -\frac{43}{2} \text{ (不合) 或 } n = 30$$

師說 6

〈等差中項〉

演練 6

1. 已知 $9x + 7, 7x + 1, 3x + 4$ 三數成等差數列，求 $7x + 1 = ?$

2. 若 $a \neq 0$ ，且 $3, a, 15$ 三數的倒數成等差數列，求 $a = ?$

3. 若兩數 a, b 的等差中項為 4 ，且 $2a - b$ 與 $a + 2b$ 的等差中項為 9 ，求 $a - b = ?$

解

$$1. \frac{(9x+7) + (3x+4)}{2} = 7x+1, x = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 7x+1 = \frac{65}{2}$$

$$2. 3, a, 15 \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{a}, \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{a} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, a = 5$$

$$3. 4 = \frac{a+b}{2}, a+b = 8$$

$$9 = \frac{(2a-b) + (a+2b)}{2}, 3a+b = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 8 \cdots \textcircled{1} \\ 3a+b = 18 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$2a = 10, a = 5 \Rightarrow \text{代入} \textcircled{1} \text{ 得 } b = 3$$

$$\Rightarrow a - b = 5 - 3 = 2$$

1. 已知 $\frac{1}{2}x + 4, \frac{1}{3}x + 6, \frac{1}{4}x + 10$ 三數成等差數列，求 $\frac{1}{3}x + 6 = ?$

2. 若 $a \neq 0$ ，且 $-8, a, -24$ 三數的倒數成等差數列，求 $a = ?$

3. 若兩數 a, b 的等差中項為 7 ，且 $3a - b$ 與 $a + 3b$ 的等差中項為 13 ，求 $b - a = ?$

解

$$1. 2\left(\frac{1}{3}x + 6\right) = \left(\frac{1}{2}x + 4\right) + \left(\frac{1}{4}x + 10\right)$$

$$\frac{2}{3}x + 12 = \frac{3}{4}x + 14, x = -24$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x + 6 = -8 + 6 = -2$$

$$2. -8, a, -24 \Rightarrow -\frac{1}{8}, \frac{1}{a}, -\frac{1}{24}$$

$$\frac{2}{a} = -\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{24}\right) \Rightarrow \frac{2}{a} = -\frac{4}{24}$$

$$\Rightarrow a = -12$$

$$3. 7 \times 2 = a + b, 13 \times 2 = 3a - b + a + 3b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 14 \cdots \textcircled{1} \\ 2a + b = 13 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a = 16$$

同步評量 2

(A) 1. 下列何者不是等差級數？

- (A) 1, 1, 1, 1, 1 (B) 2 + 2 + 2 + 2 + 2
(C) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 (D) 2 + 4 + 6 + 8 + 10

1. 等差級數各項間需以 "+" 號連接，故(A)不是等差級數

(A) 2. 有一等差數列，第 n 項是 $2n - 1$ ，則下列選項何者正確？

- (A) 首項是 1 (B) 第二項是 2 2. (A) $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ (B) $a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$
(C) 第三項是 3 (D) 第四項是 4 (C) $a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$ (D) $a_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$

(B) 3. 有一等差數列的首項是 4，第六項是 34，則公差是多少？

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 30 3. 設公差為 d ，則 $4 + 5d = 34$ ， $5d = 30$ $\therefore d = 6$

(B) 4. 已知一等差級數的首項是 23，末項是 59，其和為 533，則此級數的公差是多少？

- (A) 2 (B) 3 4. 設級數共 n 項，則 $\frac{(23 + 59) \times n}{2} = 533$ ， $41n = 533$
(C) 4 (D) 5 $\therefore n = 13$ ，故公差 $d = \frac{59 - 23}{13 - 1} = 3$

(C) 5. 若兩數 a, b 的等差中項為 7，兩數的乘積為 40，求 $a + b = ?$

- (A) 6 (B) 10 (C) 14 (D) 16 5. $\frac{a + b}{2} = 7 \Rightarrow a + b = 14$



基本觀念題

(C) 1. 下列何者不是等差數列？

- (A) 0, 0, 0, 0 (B) $\frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}$
(C) $a - d, a, a + d, a + 3d$ (D) $-0.5, 0, 0.5, 1$

1. (C) $a - (a - d) = d \neq (a + 3d) - (a + d) = 2d$
 $\Rightarrow a - d, a, a + d, a + 3d$ 不是等差數列

(C) 2. 有一等差數列，公差是 3，若每項同乘以 2 形成一新等差數列，則新等差數列之公差為多少？

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) 6 (D) 9 2. 設此數列的首項為 a ，則此數列為 $a, a + 3, a + 6, \dots$
同乘以 2 後此數列為 $2a, 2a + 6, 2a + 12, \dots$ ，
公差為 $(2a + 6) - 2a = 6$

(D) 3. 若一等差數列共有 6 項，且末項比首項多 60，則其公差為多少？

- (A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 12 3. 設首項為 a ，公差為 d ，則 $(a + 5d) - a = 60$ ， $5d = 60$
 $\therefore d = 12$

(C) 4. 有一等差數列的首項為 25，第三項為 19，若從第 n 項開始出現負數，則 n 為多少？

- (A) 8 (B) 9 4. $a_3 = a_1 + (3 - 1)d \Rightarrow 19 = 25 + (3 - 1)d \Rightarrow d = -3$
(C) 10 (D) 11 $a_n = 25 + (n - 1) \times (-3) < 0$
 $\Rightarrow 25 - 3n + 3 < 0 \Rightarrow 3n > 28 \Rightarrow n > 9\frac{1}{3}$ ，又 n 為正整數 $\therefore n = 10$

(C) 5. 若一等差數列第 11 項為 33，第 21 項為 -33 ，則第 31 項為何？

- (A) -66 (B) 66 (C) -99 (D) 99 5. $(-33) + (-33 - 33) = -99$

(C) 6. 已知一等差級數共有 27 項，其第 14 項為 10，則此等差級數之和為多少？

- (A) 210 (B) 240 (C) 270 (D) 300 6. $\therefore \frac{27 + 1}{2} = 14$ ， \therefore 第 14 項為中間項
 $S_{27} = 27a_{14} = 27 \times 10 = 270$

- (C) 7. 若 a 與 b 的等差中項為 4, $2a - b$ 與 $a + 2b$ 的等差中項為 9, 則 $a - b$ 等於多少?
 (A) -2 (B) 0
 (C) 2 (D) 8

$$7. \begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(2a-b) + (a+2b)}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 8 \\ 3a+b = 18 \end{cases} \text{解得 } a=5, b=3 \therefore a-b=2$$

- (D) 8. $\frac{8}{13} = 0.615384615384\cdots$, 觀察小數點後數字出現的規則, 試求小數點後第 200 位數字為何?
 (A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 1

8. $200 \div 6 = 33 \cdots 2$, 此數為 1

- (C) 9. 有一等差數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_9$, 若 $a_1 + a_9 = 38$, 求此數列和為多少?
 (A) 152 (B) 161 (C) 171 (D) 181

9. $a_1 + a_9 = 2a_5 \Rightarrow a_5 = 19$
 \therefore 此數列和 $= 19 \times 9 = 171$

- (A) 10. 已知 $1, a, b, c, \frac{19}{3}, \dots$ 為一等差數列, 則 $3(b - a)$ 之值可被下列何者整除?
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

10. $d = (\frac{19}{3} - 1) \div 4 = \frac{4}{3}$, $3(b - a) = 3d = 3 \times \frac{4}{3} = 4$,
 4 可被 2 整除

- (D) 11. 有一三角形的三內角度數成等差數列, 若公差為 35° , 則此三角形為何種三角形?
 (A) 正三角形 (B) 等腰三角形
 (C) 直角三角形 (D) 鈍角三角形

11. 設最小角為 a° , 則 $a + (a + 35) + (a + 70) = 180$,
 $3a + 105 = 180, 3a = 75 \therefore a = 25$, 三內角度數為 $25^\circ, 60^\circ, 95^\circ$, 故此三角形為鈍角三角形

- (B) 12. 觀察以下分數的排列規則:

$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \dots$, 試求 $\frac{7}{14}$ 出現在第幾項?

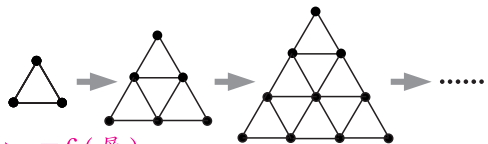
- (A) 36 (B) 42 (C) 48 (D) 50

12. $(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 7 = 42$

- (A) 13. 臺積電舉辦登山健行, 員工排成一列行走, 如果依序為男、男、女、男、女、男、男、女、男、女、……, 則第 74 個員工的性別為何?
 (A) 男 (B) 女 (C) 可能是男也可能是女 (D) 無法判斷

13. 每 5 個人為一循環,
 $74 \div 5 = 14 \cdots 4$ 應為男性

- (C) 14. 如右圖, 將三角形依規律排列, 1 個三角形有 3 個交點, 4 個三角形有 6 個交點, 則 36 個三角形有幾個交點?



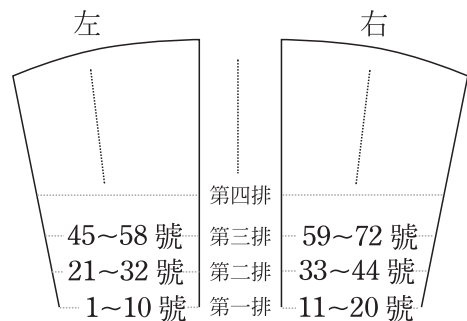
- (A) 64 (B) 48

14. $36 = \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 2] \Rightarrow n = 6$ (層)

- (C) 28 (D) 38

n 層有 $n+1$ 個交點, $1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 28$ (個)

- (C) 15. 華納電影院的座位表如右圖, 即第一排左、右區各有 10 個座位, 第二排左、右區各比第一排增加 2 個座位, 以此類推……, 若小鼎買的电影票座位號碼是 161 號, 請問: 他應坐在左區或右區第幾個位子上?



- (A) 左區第六排第 10 位 (B) 左區第六排第 1 位
 (C) 右區第六排第 1 位 (D) 右區第六排第 9 位

15. $S_5 = \frac{5}{2} [2 \times 20 + (5-1) \times 4] = 140$ 且 $a_6 = 20 + (6-1) \times 4 = 40 \therefore$ 位於右區第六排第 1 位

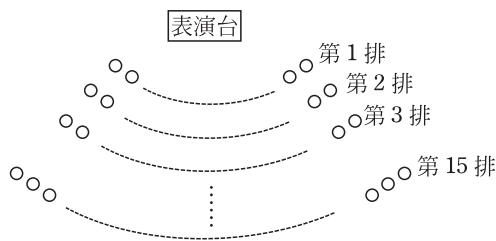


1. 在 1~100 的整數中, 被 4 除餘 3 的數有: 3, 7, 11, 15, 19, …… 成等差數列,
 $a = a_{15} = 3 + (15-1) \times 4 = 59, b = a_{20} = 3 + (20-1) \times 4 = 79, b - a = 79 - 59 = 20$

- (D) 1. 將 1~100 的正整數中, 除以 4 餘 3 的數, 由小到大排列。若第 15 個數為 a , 第 20 個數為 b , 則 $b - a = ?$

- (A) 11 (B) 15 (C) 16 (D) 20

(C) 2. 如右圖，表演台前共有 15 排座位，其中第一排有 30 個，且每一排均比前一排多 2 個座位。若某校有 1~25 班，每班 20 人，並依下列方式安排學生入座：



- (1) 依班級順序先排第一班，安排完後再排下一班。
 (2) 前排的座位排滿後，才排下一排座位。
 請問哪一班的學生全部都坐在第 8 排？
 (A) 第 12 班 (B) 第 13 班
 (C) 第 14 班 (D) 第 15 班

$$2. S_7 = \frac{7}{2} [2 \times 30 + (7-1) \times 2] = 252$$

$$a_8 = 30 + (8-1) \times 2 = 44, 252 + 44 = 296$$

$$296 \div 20 = 12 \cdots 12$$

所以第 13 班分散在第 7 排和第 8 排，第 14 班全部坐在第 8 排

97 基測二

(B) 3. 有一長條型鏈子，其外型由邊長為 1 公分的正六邊形排列而成。右圖表示此鏈之任一段花紋，其中每個黑色六邊形與 6 個白色六邊形相鄰。若鏈子上有 35 個黑色六邊形，則此鏈子共有幾個白色六邊形？



- (A) 140 (B) 142 (C) 210 (D) 212

$$3. 6 + 4 \times (35 - 1) = 6 + 136 = 142$$

97 基測一

(B) 4. 已知 $1^2 + 1 = 2^2 - 2$, $2^2 + 2 = 3^2 - 3$, $3^2 + 3 = 4^2 - 4$, ..., $99^2 + 99 = 100^2 - 100$ 。若 $1123^2 + 1123 + 2248 + 1125 = a^2$, 且 $a > 0$, 則 $a = ?$

- (A) 1124 (B) 1125
 (C) 1126 (D) 1136

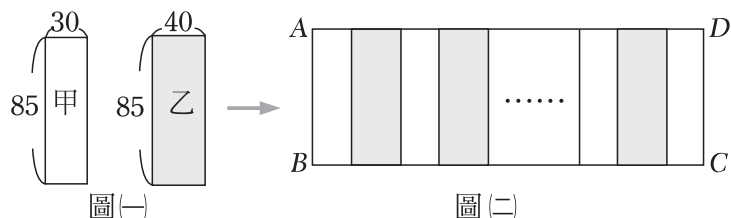
$$4. 1123^2 + 1123 = 1124^2 - 1124, \text{ 又 } 1124^2 + 1124 = 1125^2 - 1125$$

$$a^2 = 1124^2 - 1124 + 2248 + 1125 = 1124^2 + 1124 + 1125$$

$$= 1125^2 - 1125 + 1125 = 1125^2$$

96 基測二

(B) 5. 有甲、乙兩種長方形紙板各若干張，其中甲的長為 85 公分，寬為 30 公分；乙的長為 85 公分，寬為 40 公分，如圖(一)所示。今依同種紙板不相鄰的規則，將所有紙板由左至右緊密排成圖(二)的長方形 ABCD，則下列哪一個選項可能是 \overline{AD} 的長度？



- (A) 770 公分 (B) 800 公分 (C) 810 公分 (D) 980 公分

$$5. 30 + 40 = 70,$$

$$\overline{AD} = 70n + 30$$

∴ (B) 選項符合

96 基測一



(C) 1. 有一個數列 $n + d, 2n + 3d, 3n + 5d, \dots$, n 和 d 都不是 0, 且 $n \neq d$, 有關這個數列的性質，請選出正確的敘述為何？

- (A) 此數列不是等差數列 (B) 此數列是等差數列，公差是 $n + d$
 (C) 此數列是等差數列，公差是 $n + 2d$ (D) 此數列是等差數列，公差是 $2n - d$

$$1. \because (2n + 3d) - (n + d) = n + 2d,$$

$$(3n + 5d) - (2n + 3d) = n + 2d, \dots$$

以此類推：後項 - 前項皆等於 $n + 2d$,
 ∴ 為等差數列，且公差為 $n + 2d$

(C) 2. 有一個很特別的數列如下： $\sqrt{0+1}, \sqrt{1+2}, \sqrt{2+3}, \dots$ ，此數列的第 k 項為多少？

- (A) \sqrt{k} (B) $\sqrt{k+1}$ (C) $\sqrt{2k-1}$ (D) $\sqrt{2k+1}$

$$2. a_k = \sqrt{(k-1) + k} = \sqrt{2k-1}$$

(A) 3. 假設有數列為 $\frac{1+3}{5+7}, \frac{1+3+5}{7+9+11}, \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}, \dots$ 則此數列的第7項為何呢？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{49}{161}$ (D) $\frac{64}{161}$

$$\begin{aligned} 3. \text{第7項} &= \frac{1+3+5+7+9+11+13+15}{17+19+21+23+25+27+29+31} \\ &= \frac{\frac{8}{2} \times (1+15)}{\frac{8}{2} \times (17+31)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(C) 4. 右邊數列中：1、1、2、4、7、13、□、44，□內填入哪個數呢？

- (A) 16 (B) 20
(C) 24 (D) 28

4. 經過觀察後可發現下述規則：自第四個數起，每個數均為前三個數之和，亦即 $4=1+1+2$ ； $7=1+2+4$ ； $13=2+4+7$ ；…以此類推空格處應為 $4+7+13=24$ ，再檢查 $44=7+13+24$ 符合

(A) 5. 等差數列的第五項是9，第十五項是24，若 a_1 是首項， d 是公差，則坐標平面上點 (a_1+d, a_1-d) 在第幾象限？

- (A) 一 (B) 二
(C) 三 (D) 四

$$\begin{aligned} 5. \because a_5=9, a_{15}=24, \therefore \begin{cases} a_1+4d=9 \\ a_1+14d=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=3 \\ d=\frac{3}{2} \end{cases} \\ \therefore (a_1+d, a_1-d) = (3+\frac{3}{2}, 3-\frac{3}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2}) \text{ 在第一象限} \end{aligned}$$

(B) 6. 在24與-8之間，插入11個數使之成為等差數列，則所插入的第幾個數是0？

- (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7

$$\begin{aligned} 6. \because -8=24+(13-1)d, d=-\frac{8}{3}, \\ \text{又 } 0=24+(n-1) \times (-\frac{8}{3}) \Rightarrow n=10 \therefore \text{插入的第 } 10-1=9 \text{ 項} \end{aligned}$$

(A) 7. 在坐標平面上，由點 $A_1(-47, 35)$ 向右移動3個單位長，再向下移動2個單位長，到達點 A_2 。繼續由點 A_2 同樣向右移動3個單位長，再向下移動2個單位長，到達點 A_3 。如此繼續移動，依次可到達點 A_4, A_5, A_6, \dots ，則點 A_{18} 在第幾象限內？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

$$\begin{aligned} 7. A_{18} \text{ 的 } x \text{ 軸坐標} &= -47+17 \times 3 = 4, \\ y \text{ 軸坐標} &= 35+(-2) \times 17 = 1, \therefore A_{18} \text{ 為 } (4, 1) \end{aligned}$$

(A) 8. 假設某戲院共有30排坐位，依次每一排比前一排多2個坐位，且最後一排有82個坐位，請問：第1排加上第10排共有多少個坐位？

- (A) 66 (B) 72
(C) 78 (D) 84

$$\begin{aligned} 8. \because a_{30}=82, d=2 \therefore 82=a_1+29 \times 2 \Rightarrow a_1=24 \\ \text{又 } a_{10}=a_1+9d=24+9 \times 2=42, \therefore a_1+a_{10}=24+42=66 \end{aligned}$$

(B) 9. 設有兩等差級數，他們的第 n 項之比為 $(n+4):(2n-8)$ ，試求此兩級數前21項和的比？

- (A) 14:15 (B) 15:14
(C) 7:5 (D) 5:7

$$\begin{aligned} 9. S_{21}: S'_{21} &= \frac{21[a_1+(a_1+20d_1)]}{2} : \frac{21[b_1+(b_1+20d_2)]}{2} \\ &= (2a_1+20d_1):(2b_1+20d_2) = (a_1+10d_1):(b_1+10d_2) \\ &= a_{11}:b_{11} = (11+4):(2 \times 11-8) = 15:14 \end{aligned}$$

(D) 10. 一等差數列首項為 a (a 為正整數)，公差為 -1 ，則第幾項是 $-a$ ？

- (A) a (B) $2a$
(C) $a+1$ (D) $2a+1$

$$\begin{aligned} 10. \text{設第 } a_n \text{ 項為 } -a, \\ \text{則 } -a &= a+(n-1)(-1) \\ \therefore -a &= a-n+1, \text{ 即 } n=2a+1 \end{aligned}$$

(B) 11. 以2, 8, 9三數分別當做一個等差數列的首項、公差或項數，可任意安排，欲使數列的末項值最大，則需安排公差為何？

- (A) 2 (B) 8 (C) 9 (D) 無法確定

11. 等差數列【公差值】及【項數】愈大則【末項】亦會愈大，故以2為首項，8為公差，9為項數

(C) 12. 樓梯有100階，由下而上編號從1號編到100號，甲由1號階往上走，每步走1階，乙由100號階往下走，每步走2階，假設甲、乙兩人每步所用時間相同，已知中途兩人在同一階會合，則該階的號碼是幾號？

- (A) 14 (B) 24 (C) 34 (D) 44

$$\begin{aligned} 12. \text{設該階號碼為 } n \text{ 號,} \\ \text{則 } 1+(n-1) \times 1 &= 100+(n-1) \times (-2) \\ \Rightarrow n &= 100-2n+2, n=34 \end{aligned}$$

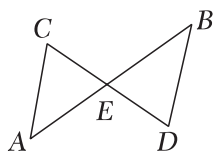
第 14 單元 平面圖形的基本性質

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

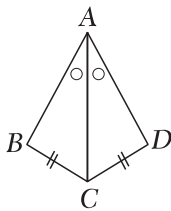
Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

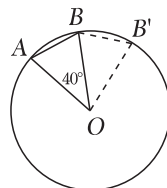
- (○) 1. 已知三角形任意兩邊相等且其夾角為 60° ，則此三角形必為正三角形。
💡 三角形兩邊相等，兩底角必相等，底角 $= (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$ 能力一
- (○) 2. 若三角形任意兩外角和為 270° ，則此三角形必為直角三角形。
💡 三角形外角和為 360° ， $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$ ，故此三角形必有一內角為直角
- (×) 3. 若兩三角形的周長和面積皆相等，則必定全等。
💡 不一定，全等必須是各邊長及角度對應相等 能力二
- (○) 4. 在直角三角形的情況下，SSA 的性質即為 RHS 全等性質。
💡 RHS 性質即是 SSA 的特例，只限用於直角三角形
- (×) 5. 如下圖(一)，若 $\overline{AE} = \overline{EB}$ ， $\overline{CE} = \overline{ED}$ ，則 $\angle A = \angle B$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。
💡 $\because \overline{AE} = \overline{EB}$ ， $\overline{CE} = \overline{ED}$ ，且 $\angle CEA = \angle BED$ ，所以 $\triangle CEA \cong \triangle DEB$ (SAS)，但 \overline{AB} 不一定等於 \overline{CD}
- (×) 6. 如下圖(二)， $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 。
💡 由圖可知 $\angle BAC = \angle DAC$ ，且 $\overline{AC} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = \overline{DC}$ ，為 SSA，不符合全等性質
- (×) 7. 對角線互相垂直的四邊形必為鳶形、菱形、正方形。
💡 不一定，請見右圖 能力三
- (×) 8. 所有種類的正多邊形地磚必定能鋪滿地面，而不留下空隙。
💡 只有正三角形、正方形、正六邊形這三種地磚，才能鋪滿地面而不留下空隙，因為周角 360° ，僅能被上述三種多邊形的內角整除
- (×) 9. 甲、乙兩個大小不同的扇形，其所夾的圓心角度數愈大，其面積愈大。
💡 扇形面積大小取決於所夾圓心角度數及其半徑(即圓心角所夾之兩邊)之長度 能力四
- (○) 10. 如下圖(三)， $\angle AOB = 40^\circ$ ，若以 O 為圓心，重複複製 $\triangle AOB$ ，則可構成一個圓內接九邊形。
💡 $360^\circ \div 40^\circ = 9$



圖(一)



圖(二)



圖(三)

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 三角形的邊角關係

一 三角形的定義

三角形：係由三條直線交於三個頂點而構成的一個封閉平面圖形。

二 三角形的組成性質

1. 兩邊和、差關係

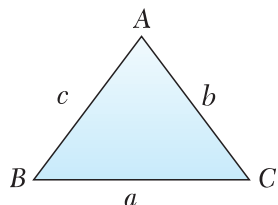
若 a 、 b 表示 $\triangle ABC$ 之兩邊長，令第三邊長為 c ，如右圖。

則 $|a - b| < c < a + b$ ，即 **兩邊差 < 第三邊 < 任意兩邊和**。

2. 內角與外角關係

(1) 任意三角形的三個內角和為 180° ，三個外角和為 360° 。

(2) 任意三角形的一外角等於其內對角的和。



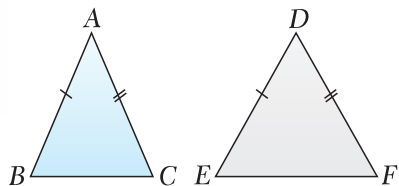
三 三角形的邊角關係

如右圖，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，則：

(1) 若 $\angle A < \angle D$ ，則 $\overline{BC} < \overline{EF}$ 。

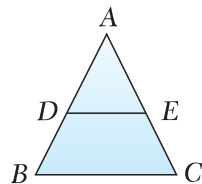
(2) 若 $\overline{BC} < \overline{EF}$ ，則 $\angle A < \angle D$ 。

(3) 任意一個三角形中，具有**大邊對大角**，**小邊對小角**的性質。



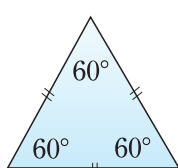
四 三角形的中點連線性質

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 。

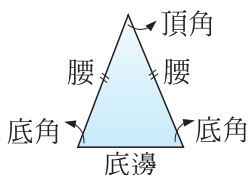


五 三角形的種類

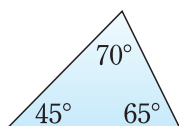
依邊長	正三角形	如圖(一)，三角形的三邊等長，各內角均為 60°
	等腰三角形	如圖(二)，三角形的兩腰等長，兩底角相等
依內角	銳角三角形	如圖(三)，三角形的三個內角度數均小於 90°
	直角三角形	如圖(四)，三角形中有一內角度數為 90°
	鈍角三角形	如圖(五)，三角形中有一內角度數大於 90°



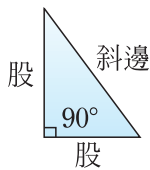
圖(一)



圖(二)



圖(三)

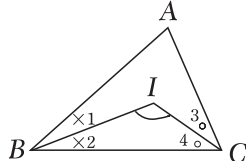
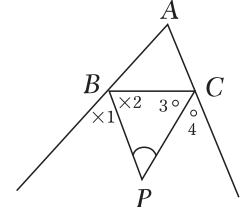
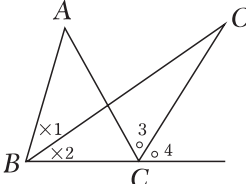


圖(四)



圖(五)

六 三角形內、外角平分線的性質

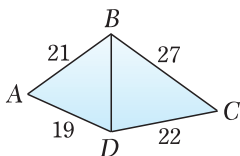
1. 內角平分		<p>$\triangle ABC$ 中, I 為 $\angle B$、$\angle C$ 內角平分線交點</p> <p>$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$</p> <p>$\Rightarrow \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$</p>
2. 外角平分		<p>$\triangle ABC$ 中, P 為 $\angle B$、$\angle C$ 外角平分線交點</p> <p>$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$</p> <p>$\Rightarrow \angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$</p>
3. 內外角平分線交點		<p>$\triangle ABC$ 中, O 為 $\angle B$ 內角平分線與 $\angle C$ 外角平分線的交點</p> <p>$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$</p> <p>$\Rightarrow \angle BOC = \frac{1}{2}\angle A$</p>

師說 1

〈三角形的三邊關係〉

演練 1

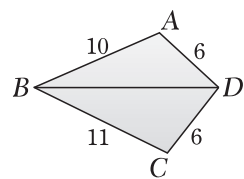
如圖, 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 中, $\overline{AB} = 21$, $\overline{AD} = 19$, $\overline{CD} = 22$, $\overline{BC} = 27$, $\overline{BD} = x$, 試求 x 的範圍為何?



解

$\because x$ 、 21 、 19 為 $\triangle ABD$ 之邊長,
 $|21 - 19| < x < (21 + 19) \Rightarrow 2 < x < 40 \dots \textcircled{1}$
 $\because x$ 、 22 、 27 為 $\triangle BCD$ 之邊長,
 $|22 - 27| < x < (22 + 27) \Rightarrow 5 < x < 49 \dots \textcircled{2}$
 由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 知, $5 < x < 40$

如右圖, 四邊形 $ABCD$ 中, 若 $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 11$, $\overline{CD} = 6$, $\overline{AD} = 6$, 求 \overline{BD} 的範圍為何?



解

$\triangle ABD$ 中, $10 - 6 < \overline{BD} < 10 + 6$
 $\Rightarrow 4 < \overline{BD} < 16$
 $\triangle BCD$ 中, $11 - 6 < \overline{BD} < 11 + 6$
 $\Rightarrow 5 < \overline{BD} < 17$
 由以上可知 $5 < \overline{BD} < 16$

師說 2

〈三角形的邊角關係〉

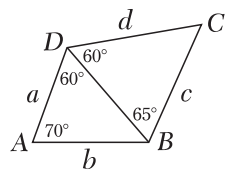
演練 2

$\triangle ABC$ 中, 若 $\overline{AB} > \overline{BC}$, 且 $\angle B = 60^\circ$, 則 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的大小為何?

解

$\because \overline{AB} > \overline{BC} \Rightarrow \angle C > \angle A$
 $\because \angle B = 60^\circ$, $\angle A + \angle C = 120^\circ$
 $\therefore \angle C > 60^\circ$, $\angle A < 60^\circ$
 $\Rightarrow \underline{\angle C > \angle B > \angle A}$

如右圖, 連接四邊形 $ABCD$ 的對角線 \overline{BD} , 若 $\angle ADB = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle DAB = 70^\circ$, $\angle DBC = 65^\circ$, 則四邊長 a 、 b 、 c 、 d 的大小關係為何呢?



解

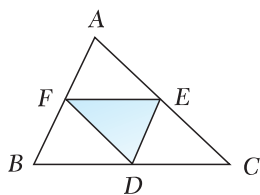
$\triangle ABD$ 中, $\angle DBA = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$
 $\because 70^\circ > 60^\circ > 50^\circ$, $\therefore \overline{BD} > b > a$
 $\triangle BDC$ 中, $\angle DCB = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$
 $\because 65^\circ > 60^\circ > 55^\circ$, $\therefore d > c > \overline{BD}$
 由以上可知,
 $d > c > \overline{BD} > b > a \Rightarrow \underline{d > c > b > a}$

師說 3

〈三角形兩邊中點連線性質〉

演練 3

如右圖， D 、 E 、 F 分別為 $\triangle ABC$ 三邊的中點，若 $\overline{AB} = 6\text{ cm}$ ， $\overline{BC} = \overline{AC} = 8\text{ cm}$ ，則 $\triangle DEF$ 的周長為何呢？



解

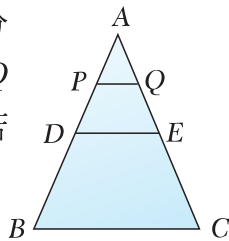
$$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的周長} = 3 + 4 + 4 = \underline{11\text{ (cm)}}$$

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點， P 、 Q 分別為 \overline{AD} 、 \overline{AE} 的中點，若 $\overline{BC} = 10$ ，求 $\overline{PQ} = ?$



解

$$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

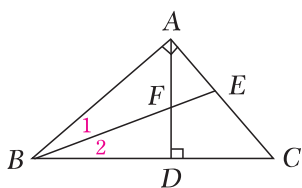
$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2} \times 5 = \underline{\underline{\frac{5}{2}\text{ (單位)}}}}$$

師說 4

〈三角形的內角與外角度數〉

演練 4

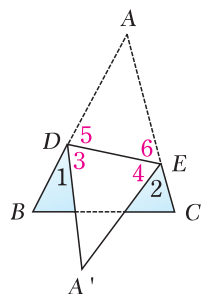
如右圖， \overline{AD} 為直角 $\triangle ABC$ 斜邊 \overline{BC} 上的高，又 $\angle B$ 的平分線交於 \overline{AC} 於 E ，交 \overline{AD} 於 F ，若 $\angle C = 50^\circ$ ，則 $\angle AEF = ?$



解

$\because \triangle ABC$ 為直角 $\triangle \therefore \triangle ABE$ 亦為直角 \triangle
 又 $\angle C = 50^\circ$ ， $\therefore \angle B = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ，
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 40^\circ \div 2 = 20^\circ$
 $\Rightarrow \angle AEF = 90^\circ - 20^\circ = \underline{70^\circ}$

如右圖，銳角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的任一點，若以 \overline{DE} 為對稱軸，將 A 折向 A' ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C = ?$



解

$(\angle 1 + \angle 3) + (\angle 2 + \angle 4) + \angle B + \angle C = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + (\angle 3 + \angle 4) = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + (\angle 5 + \angle 6) = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + (180^\circ - \angle A) = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + 130^\circ = 360^\circ$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C = \underline{230^\circ}$

同步評量 1

(C) 1. 等腰三角形的三邊長都是整數，周長為 15，則此種等腰三角形共有幾個呢？

- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5

1. $\because 15 \div 2 = 7.5 \therefore$ 兩腰的和 > 7.5
 \Rightarrow ① 4, 4, 7 ② 5, 5, 5 ③ 6, 6, 3 ④ 7, 7, 1

(D) 2. 若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle A$ 比 $\angle B$ 的 2 倍少 4° ，求 $\triangle ABC$ 各內角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的度數為何？

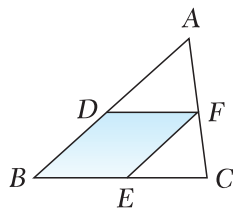
- (A) $86^\circ, 47^\circ, 47^\circ$ (B) $84^\circ, 48^\circ, 48^\circ$
(C) $82^\circ, 49^\circ, 49^\circ$ (D) $88^\circ, 46^\circ, 46^\circ$

2. $\because \overline{AB} = \overline{AC} \therefore \angle B = \angle C$ ，設 $\angle B = \angle C = x^\circ$ ，
 則 $\angle A = (2x - 4)^\circ \Rightarrow (2x - 4) + 2x = 180^\circ$ ，
 $x = 46^\circ$ ， $\angle A = (2 \times 46^\circ - 4) = 88^\circ$

(B) 3. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是各邊的中點，若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 7$ ，請問：四邊形 $DBEF$ 的周長為何呢？

- (A) 17 (B) 18
(C) 19 (D) 20

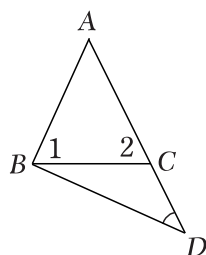
3. $\overline{DF} = 8 \div 2 = 4$ ， $\overline{EF} = 10 \div 2 = 5$
 \Rightarrow 周長 $= (4 + 5) \times 2 = 18$



(B) 4. 如右圖，已知 $\angle 1 = \angle 2 = 70^\circ$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ ，則 $\angle D$ 的度數為何呢？

- (A) 45°
(B) 50°
(C) 55°
(D) 60°

4. $\because \angle 1 = \angle 2 = 70^\circ \therefore \angle A = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$
 又 $\overline{BD} \perp \overline{AB} \therefore \angle D = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



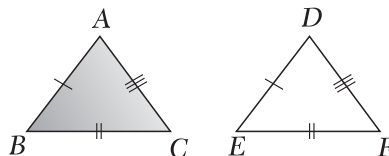
能力

三角形的全等性質

一 三角形全等的定義

若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合後， $\angle A$ 與 $\angle D$ 、 $\angle B$ 與 $\angle E$ 及 $\angle C$ 與 $\angle F$ 可以完全重合，則可稱 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，簡記為 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且此兩三角形具有下列性質：

1. 各**對應角**相等 ($\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$)
2. 各**對應邊**相等 ($\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$)
3. **面積**相等 ($\triangle ABC$ 面積 $= \triangle DEF$ 面積)



二 三角形的全等性質一覽表

假設：任意兩三角形 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$

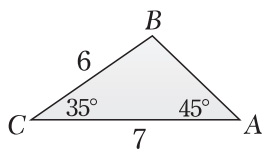
全等性質簡稱	條件	例圖
SSS	$\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$	
SAS	$\angle A = \angle D$ ， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$	
ASA	$\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\overline{AB} = \overline{DE}$	
AAS	$\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$	
RHS (僅適用於直角三角形)	$\angle B = \angle E = 90^\circ$ ， 斜邊： $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， 任一股： $\overline{BC} = \overline{EF}$ (或 $\overline{AB} = \overline{DE}$)	
SSA (非全等性質)	若 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\angle B = \angle E$ ， (1) $\overline{AC} = \overline{DF} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (2) $\overline{AC} = \overline{DG} \Rightarrow \triangle ABC \not\cong \triangle DEG$	

師說 5

〈全等性質的判別〉

演練 5

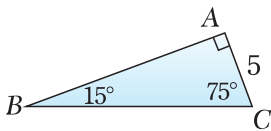
如右圖，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle C = 35^\circ$ 、 $\overline{AC} = 7$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，則下列哪一個選項中的圖形與 $\triangle ABC$ 全等呢？



- (A) (B) (C) (D)

解 (D)的圖形與 $\triangle ABC$ 全等，根據AAS性質

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 15^\circ$ 、 $\angle C = 75^\circ$ 、 $\overline{AC} = 5$ ，請問：下列哪一個三角形與 $\triangle ABC$ 全等呢？



- (A) (B) (C) (D)

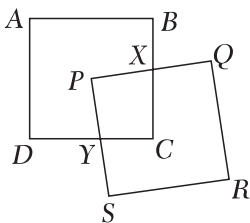
解 (C)根據已知條件可知 $\angle A = 90^\circ$ ，所以 $\triangle ABC \cong \triangle NMP$ (AAS or ASA)

師說 6

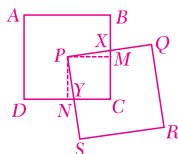
〈全等三角形的應用〉

演練 6

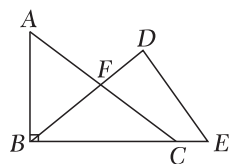
四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $PQRS$ 是邊長為10公分的兩正方形，如右圖所示， P 點位於正方形 $ABCD$ 的中心， $\overline{BX} = 4$ 公分，試問四邊形 $PXCY$ 的面積為多少平方公分呢？



解 作輔助線，由 P 點分別對 \overline{BC} 及 \overline{CD} 作垂線交於 M 、 N 兩點， $\therefore \overline{PM} = \overline{PN}$ 且 $\angle XPM = \angle NPY$ ，又 $\angle PNY = \angle PMX = 90^\circ$
 $\therefore \triangle XPM \cong \triangle PYN$ (ASA)
 \Rightarrow $PXCY$ 面積 = $PMCN$ 面積
 $= 5^2 = 25$ (平方公分)



如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle EDB$ 為全等的三角形，其中 $\overline{AB} = 9$ 公分， $\overline{BC} = 12$ 公分， $\overline{AC} = 15$ 公分，試求(1) $\overline{FD} = ?$



(2) 四邊形 $CEDF$ 的面積 = ?

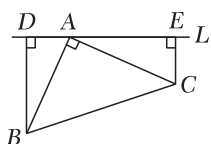
解 (1) $\because \triangle ABC$ 與 $\triangle EDB$ 為全等三角形，
 $\therefore \angle FCB = \angle FBC$ ， $\angle FAB = \angle FBA$
 $\therefore \triangle BCF$ 與 $\triangle ABF$ 均為等腰三角形
 $\Rightarrow \overline{BF} = \overline{CF}$ ， $\overline{AF} = \overline{BF}$
 $\Rightarrow \overline{AF} = \overline{CF} = \overline{BF} = \frac{15}{2}$
 $\Rightarrow \overline{FD} = \overline{BD} - \overline{BF} = 12 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$ (公分)
 (2) 四邊形 $CEDF$ 面積 = $\triangle BDE$ 面積 - $\triangle BCF$ 面積
 $= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 - \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 9 \times 12)$
 $= 27$ (平方公分)

師說 7

〈三角形全等的證明〉

演練 7

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， L 是過 A 點的直線， $\overline{BD} \perp L$ ， $\overline{CE} \perp L$ 。

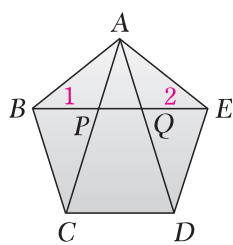


試證： $\triangle ABD \cong \triangle CAE$ 。

證

$\because \overline{BD} \perp L, \overline{CE} \perp L \therefore \angle ADB = \angle CEA = 90^\circ$
 $\because \angle ADB = 90^\circ \therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$ ，
 又 $\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$ ，
 $\angle ABD + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle CAE$ ，在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CAE$ 中，
 $\because \angle ADB = \angle CEA, \angle ABD = \angle CAE$ ，
 $\overline{AB} = \overline{AC} \therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$ (AAS)

如右圖，正五邊形 $ABCDE$ 的對角線 \overline{AC} 和 \overline{AD} 分別交 \overline{BE} 於 P 與 Q 。



試證： $\overline{BP} = \overline{QE}$ 。

證

(1) $\because ABCDE$ 為正五邊形
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AE}, \overline{BC} = \overline{DE}, \angle ABC = \angle AED$
 (2) $\triangle ABC \cong \triangle AED$ (SAS) $\therefore \angle BAC = \angle EAD$
 (3) $\triangle ABE$ 中， $\because \overline{AB} = \overline{AE} \therefore \angle 1 = \angle 2$
 (4) $\triangle BAP \cong \triangle EAQ$ (ASA) $\therefore \overline{BP} = \overline{QE}$

同步評量 2

(C) 1. 兩直角三角形在下列何種情況時不一定全等？

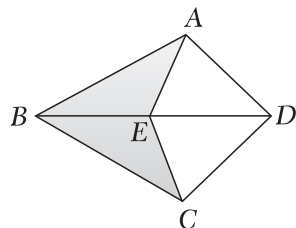
- (A) 斜邊及一股對應相等 (B) 斜邊及一銳角對應相等
 (C) 二銳角對應相等 (D) 二股對應相等

1. (A) RHS 全等 (B) AAS 全等
 (C) AAA 相似 (D) SAS 全等

(A) 2. 如右圖， $\overline{AD} = \overline{CD}$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ 且 E 點為 \overline{BD} 上的任何一點，請問：此圖形中有幾組全等三角形呢？

- (A) 3
 (B) 4
 (C) 5
 (D) 6

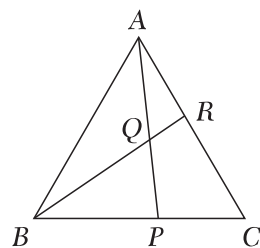
2. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ； $\triangle AED \cong \triangle CED$ ； $\triangle ABE \cong \triangle CBE$



(B) 3. 如右圖，正三角形 ABC ， $\overline{AR} = \overline{CP}$ ，假設 $\angle CAP = 25^\circ$ ，請問： $\angle BQP = ?$

- (A) 45°
 (B) 60°
 (C) 75°
 (D) 80°

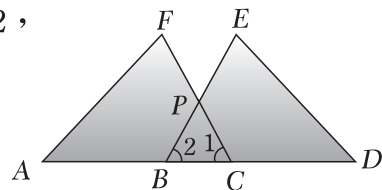
3. 因為 $\overline{AR} = \overline{CP}$ ， $\angle BAC = \angle ACP$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，
 所以 $\triangle BAR \cong \triangle ACP$ (SAS)，得 $\angle PAC = \angle ABR = 25^\circ$
 $\angle BQP = \angle ABR + \angle BAQ = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$



(D) 4. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{PB} = \overline{BC}$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，若 $\angle A = 45^\circ$ ，請問： $\angle E = ?$

- (A) 60°
 (B) 65°
 (C) 70°
 (D) 75°

4. 因為 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CD}$ ， $\angle A = \angle D$ ，
 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\triangle AFC \cong \triangle DEB$ (ASA)，
 在 $\triangle PBC$ 中， $\angle 1 = \angle 2$ 且 $\overline{PB} = \overline{BC}$ ，
 故 $\triangle PBC$ 為正三角形， $\angle E = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$



能力

四邊形的基本性質

一 四邊形的種類

1. 平行四邊形				
	名稱	性質	面積	周長
	正方形	四邊等長且四個內角都是直角的平行四邊形	a^2	$4a$
	長方形(矩形)	四個內角都是直角的平行四邊形	ab	$2(a+b)$
	菱形	四邊等長的平行四邊形	$\frac{1}{2}ab$	$2\sqrt{a^2+b^2}$
平行四邊形	兩雙對邊平行、等長且對角線互相平分的四邊形	ah	$2(a+b)$	
2. 特殊四邊形				
	名稱	性質	面積	周長
	箏形(鳶形)	兩組鄰邊等長的四邊形	$\frac{1}{2}ab$	略
	梯形	一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形，此不平行的對邊稱為兩腰	$\frac{(a+b)\times h}{2}$	$a+b+c+d$
	等腰梯形	為一梯形且兩腰等長	$\frac{(a+b)\times h}{2}$	$a+b+2c$
任意四邊形	內角和與外角和皆為 360°	略	略	

二 四邊形的對角線性質

四邊形	正方形	長方形	菱形	平行四邊形	鳶形	等腰梯形
對角線等長	★	★				★
對角線互相平分	★	★	★	★		
對角線互相垂直	★		★		★	

若四邊形的對角線互相垂直，則其面積 = 對角線的乘積 $\times \frac{1}{2}$ 。例如：鳶形、菱形、正方形皆可，使用上述面積公式。

多邊形的角度與對角線公式

170

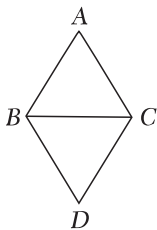
1. 任意 n 邊形的內角和	$(n-2) \times 180^\circ$
2. 正 n 邊形的每一內角皆相等	$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$
3. 任意 n 邊形的外角和	360°
4. 正 n 邊形的每一外角皆相等	$\frac{360^\circ}{n}$
5. 任意 n 邊形的對角線總數	$\frac{n(n-3)}{2}$ 條

師說 8

<四邊形的邊角關係>

演練 8

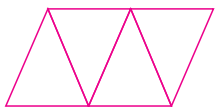
1. 如右圖，用兩個相同的正三角形組成一個四邊形，若正 $\triangle ABC$ 周長為 24，則四邊形 $ABDC$ 是哪一種四邊形呢？周長為何呢？又 $\angle ACD = ?$



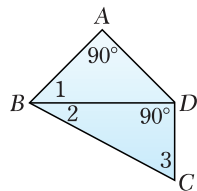
2. 承上題，以相同的 4 個三角形所排出的圖形中，若為四邊形，則必為哪種四邊形？

解

1. $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DC} = \overline{AC}$ ，且 $\angle BAC = 60^\circ$ ，
 $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$ ，
 $\therefore \underline{ABDC}$ 為菱形
 $24 \div 3 = 8$ ，
 $ABDC$ 周長 $= 8 \times 4 = \underline{32}$ (單位)
2. 如圖，平行四邊形



1. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，
 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\angle BDC = \angle A = 90^\circ$ ， $\overline{BD} > \overline{CD}$ 。請問：
 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 的大小關係為何呢？



2. 承上題，若 $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \frac{13}{5}\overline{AB}$ ，試求四邊形 $ABCD$ 之周長？

解

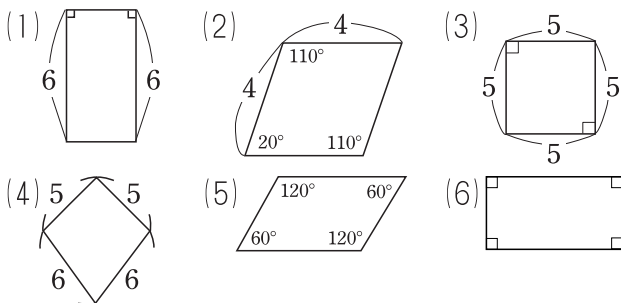
1. 已知 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $\angle 1 = (180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 45^\circ$ ，
 $\overline{BD} > \overline{CD}$
 $\therefore \angle 3 > \angle 2$ ， $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$ ，
 $\Rightarrow \angle 3 > 45^\circ$ ， $\angle 2 < 45^\circ$
 $\Rightarrow \underline{\angle 3 > \angle 1 > \angle 2}$
2. $\because \angle A = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$
 $\therefore \triangle ABD$ 為等腰直角三角形
 $\overline{AB} = \overline{AD} = 5$ ， $\overline{BC} = \frac{13}{5}\overline{AB} = 13$ ，
 $\overline{CD} = \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$
 周長 $= (2 \times 5) + 13 + \sqrt{119}$
 $= \underline{23 + \sqrt{119}}$ (單位)

師說 9

〈四邊形的對角線〉

演練 9

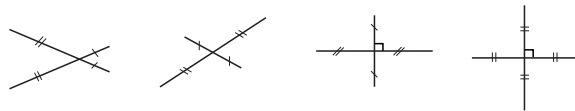
長方形具有兩條對角線會等長且互相平分的性質，請問：下列哪些四邊形也具有相同的性質呢？



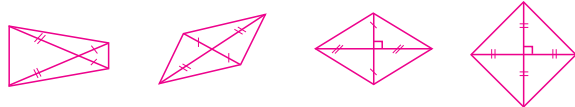
解

符合此一性質的四邊形分別是矩形、正方形。
選擇(1)(3)(6)

下列四組交叉線段各代表一種四邊形的兩條對角線，請由左至右寫出最適當的四邊形名稱。



解



等腰梯形、平行四邊形、菱形、正方形

師說 10

〈四邊形的面積〉

演練 10

設一菱形的周長為 60 公分，兩對角線長為 18 公分與 x 公分，則 $x = ?$

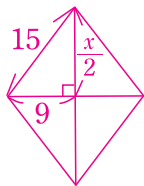
解

∵ 菱形的對角線互相平分且四個邊等長，所以菱形的一邊長為 $60 \div 4 = 15$ ，

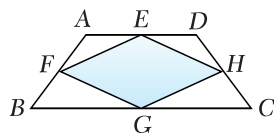
$$\therefore \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 15^2$$

$$\Rightarrow 81 + \frac{x^2}{4} = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 144,$$

$$x^2 = 576, x = \pm 24 \text{ (負不合)}, \underline{x = 24}$$



已知 $ABCD$ 為等腰梯形，其中 E 、 F 、 G 、 H 分別為各邊之中點，且 $AD = 6$ ， $BC = 12$ ， $AB = 5$ ，則四邊形 $EFGH$ 的面積為何？



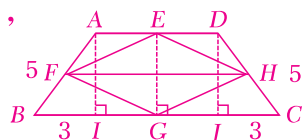
解

$$\overline{AI} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = \overline{EG},$$

$$\overline{FH} = \frac{12 + 6}{2} = 9,$$

∴ $EFGH$ 為菱形

$$\therefore \text{面積} = \overline{EG} \times \overline{FH} \times \frac{1}{2} = \underline{18 \text{ (平方單位)}}$$

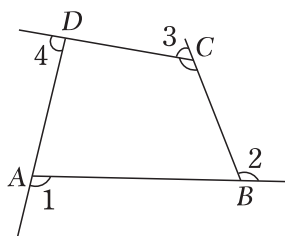


師說 11

〈四邊形的角度〉

演練 11

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 110^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ，請問： $\angle 4 = ?$



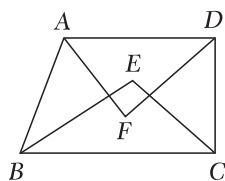
解

$$\angle 3 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$$

$$\angle 4 = 360^\circ - (100^\circ + 110^\circ + 60^\circ) = \underline{90^\circ}$$

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線相交於 E 點， $\angle A$ 、 $\angle D$ 的角平分線相交於 F 點，若 $\angle BEC = 100^\circ$ ，則 $\angle AFD = ?$



解

$$\therefore \angle B + \angle C = 2 \times (180^\circ - \angle BEC) = 160^\circ$$

$$\therefore \angle AFD = 180^\circ - \frac{(\angle A + \angle D)}{2}$$

$$= 180^\circ - \frac{(360^\circ - 160^\circ)}{2} = \underline{80^\circ}$$

同步評量 3

(C) 1. 一個四邊形最多有幾個內角是鈍角呢？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1. \because 4個角皆是鈍角，則內角和大於 360°
 \therefore 最多有3個內角是鈍角

(D) 2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，則下列敘述何者正確呢？

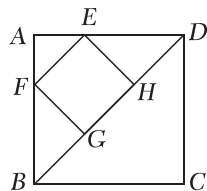
- (A) $\angle A$ 為最小角 (B) $\angle B$ 為最大角
 (C) \overline{AB} 為最大邊 (D) \overline{BC} 為最大邊

2. 由 $\overline{AB} > \overline{AC}$ 知 $\angle C > \angle B \Rightarrow 60^\circ > \angle B$ ，
 $\angle C = 60^\circ$ ， $\angle B < 60^\circ \Rightarrow \angle A > 60^\circ$
 故 $\angle A$ 為最大角， \overline{BC} 為最大邊

(C) 3. 如右圖， $ABCD$ 為一正方形， $EFGH$ 也是正方形， G 、 H 在 \overline{BD} 上，
 E 、 F 兩點分別在 \overline{AD} 、 \overline{AB} 上，且 $\overline{HD} = 4$ ，則 $\overline{BD} + \overline{EH} = ?$

- (A) 12 (B) 14
 (C) 16 (D) 18

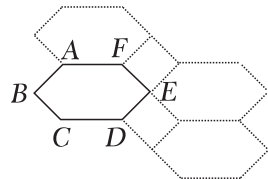
3. $\overline{BD} + \overline{EH} =$ 正方形 $EFGH$ 周長 = 16



(C) 4. 右圖為人行步道上地磚的局部圖形，在六邊形 $ABCDEF$ 中，
 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ， $\angle A = \angle C = \angle D = \angle F$ ，請問： $\angle A$ 等於
 多少度？

- (A) 133° (B) 134°
 (C) 135° (D) 136°

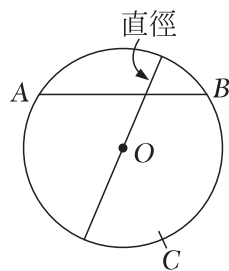
4. 六邊形內角和 = $(6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$
 $720^\circ - (2 \times 90^\circ) = 540^\circ$ ， $540^\circ \div 4 = 135^\circ$



能力四 圓形、扇形的性質

一 圓的定義與性質

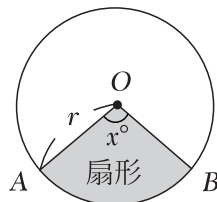
1. 圓：係指一封閉的平面曲線，其上的每一點都與一個指定的固定點等距離。
2. 圓面積 = $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ (r ：半徑； d ：直徑)
3. 圓周長 = $2\pi r = \pi d$
4. 弧：圓上兩點 A 、 B 之間所包含的圓周長片段稱為弧，以 \widehat{AB} 表示，若 \widehat{AB} 占全圓的弧長較小者稱為「劣弧」。反之， \widehat{ACB} 所占弧長較長者稱為「優弧」。
5. 弦：連接圓上相異兩點的線段長，如 \overline{AB} ，最長弦為直徑。



二 扇形的相關性質

扇形：若有一圓 O ，其內有兩條半徑 \overline{OA} 、 \overline{OB} ，與 \widehat{AB} 所圍成的區域，即為扇形，如圖所示。若圓心角 $\angle AOB = x^\circ$ ，圓 O 半徑為 r ，則有下列關係：

1. \widehat{AB} 弧長： $\frac{\widehat{AB}}{x^\circ} = \frac{\text{圓周長}}{360^\circ} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$
2. 扇形面積： $\frac{\text{扇形面積}}{x^\circ} = \frac{\text{圓面積}}{360^\circ} \Rightarrow \text{扇形面積} = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$
3. 扇形周長： $\overline{OA} + \overline{OB} + \widehat{AB} = \text{直徑} + \widehat{AB}$

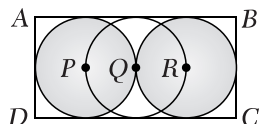


師說 12

〈圓與四邊形的關係〉

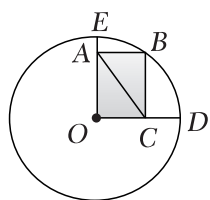
演練 12

如圖，三個圓的圓心分別是 P 、 Q 、 R ，且均與矩形 $ABCD$ 相切，已知圓心 Q 的圓半徑為 1，且 P 、 Q 、 R 三點在同一線上，請問：矩形 $ABCD$ 面積為何呢？



解
 \because 圓心 Q 的半徑為 1，直徑為 2
 \therefore 矩形 $ABCD$ 的寬 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$ ，
 長 $\overline{AB} = \overline{CD} = 4$ ，
 矩形 $ABCD$ 面積為 $2 \times 4 = 8$ (平方單位)

如圖，圓內的四邊形 $OABC$ 為一矩形，若圓 O 的直徑為 18 公分，試求 \overline{AC} 的長度為何？



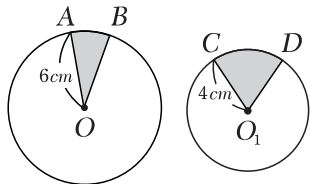
解
 $\because OABC$ 是矩形，對角線相等 $\Rightarrow \overline{OB} = \overline{AC}$
 $\therefore \overline{OB} = \overline{AC} = 9$ (公分)

師說 13

〈扇形面積與弧長〉

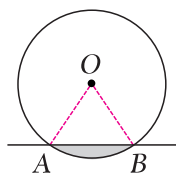
演練 13

如右圖，已知圓 O 與圓 O_1 的半徑為 6 公分與 4 公分，假設 $\angle AOB = 30^\circ$ ，且圖形中兩扇形面積相同，則 $\angle CO_1D = ?$



解
 扇形 AOB 面積 $= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \cdot 6^2 = 3\pi$ ，
 圓 O_1 的面積 $= \pi \cdot 4^2 = 16\pi$
 $\angle CO_1D = \frac{3\pi}{16\pi} \times 360^\circ = 67.5^\circ$

有一火車車輪如右圖所示，車輪部分在鐵軌之下，若 $\overline{AB} = 12$ ，車輪半徑亦為 12，請問： \widehat{AB} 的弧長為何呢？



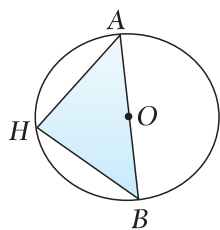
解
 連接 \overline{OA} ， \overline{OB} 可知， $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = 12$ ，
 $\triangle OAB$ 為正三角形，
 $\therefore \widehat{AB} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2 \times 12\pi = 4\pi$

同步評量 4

(B) 1. 如右圖， \overline{AB} 為直徑， $\overline{AH} = \overline{BH}$ ，若圓 O 的面積為 4π ，試求 \widehat{AH} 的長度為何？

- (A) 1
- (B) π
- (C) 2π
- (D) 3π

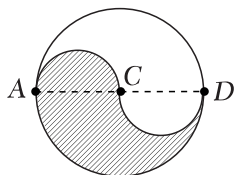
1. $\pi r^2 = 4\pi$ ， $r = \pm 2$ (負不合)，
 $\widehat{AH} = 4\pi \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = \pi$



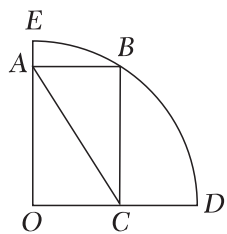
(B) 2. 如右圖， $\overline{AC} = \overline{CD} = 6$ ，求斜線部分的周長為何呢？

- (A) 6π
- (B) 12π
- (C) 18π
- (D) 24π

2. $\widehat{AC} + \widehat{CD} = 2 \times 6\pi \times \frac{1}{2} = 6\pi$
 $\widehat{AD} = 12 \times \pi \times \frac{1}{2} = 6\pi$
 斜線部分為 $6\pi + 6\pi = 12\pi$

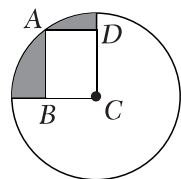


(C) 3. 如右圖，已知 $OABC$ 是長方形，扇形 OED 是 $\frac{1}{4}$ 圓， \overline{AC} 長是 5 公分，請問：圓 O 之面積為多少平方公分？



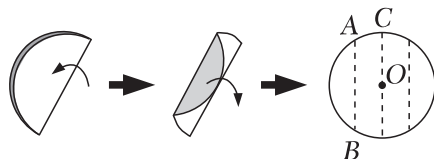
- (A) 9π 3. $\overline{AC} = \overline{OB} = 5$, \therefore 圓 O 面積 = $\pi \times 5^2 = 25\pi$
 (B) 16π
 (C) 25π
 (D) 36π

(A) 4. 如右圖， C 點為圓心， A 點為圓上一點，並使得 $ABCD$ 為一長方形，其長與寬分別是 8 與 6，求陰影部分面積為何呢？



- (A) $25\pi - 48$ 4. $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$,
 (B) $24\pi - 48$ 陰影部分 = $\frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 - 8 \times 6 = 25\pi - 48$
 (C) $23\pi - 48$
 (D) $22\pi - 48$

(B) 5. 有一圓如右圖的方法摺疊，則展開後 $\angle AOC$ 的角度為多少？



- (A) 15°
 (B) 30°
 (C) 45°
 (D) 60°
5. 做 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 交於 H ，
 令 $\overline{MH} = \overline{OH} = 1$ ，
 則 $\overline{OA} = \overline{OM} = 2$
 $\therefore \angle OAH = 30^\circ$ ，
 $\angle AOM = 60^\circ$ ， $\angle AOC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$



基本觀念題

(C) 1. 下列敘述何者錯誤？

- (A) 兩個三角形中，若有兩角及一對邊相等，則必全等
 (B) 兩個直角三角形的一邊與一銳角對應相等，則必全等
 (C) 兩個三角形中，若有兩邊及一對角相等，則必全等
 (D) 兩個等腰三角形中，若有一組對應邊及一組對應角相等，則必全等

1. (A) 屬於 AAS 或 ASA
 (B) 屬於 ASA 或 AAS
 (C) 屬於 SAS 或 SSA，但 SSA 非全等性質
 (D) 屬於 ASA

(A) 2. $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 中，若 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，而且 $\angle A = \angle D = 100^\circ$ ，則此兩個三角形全等性質為何？

- (A) SAS (B) SSS
 (C) RHS (D) ASA
2. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS 全等)

(C) 3. 一個四邊形不可能剛好有幾個直角？

- (A) 1 (B) 2
 (C) 3 (D) 4
3. \therefore 四邊形內角和為 360° ，有三個直角時，第四個內角亦必為直角，故不可能剛好有 3 個直角

(A) 4. 已知三角形兩邊長為 2、7，若第三邊長是奇數，則這三角形的周長是多少呢？

- (A) 16 (B) 17
(C) 18 (D) 19

4. $\because 7-2 < \text{第三邊} < 7+2$ ，且第三邊為奇數
 \therefore 第三邊為 7，周長 $= 2+7+7=16$

(C) 5. 下列四組數，可成為三角形三邊長的共有多少組呢？

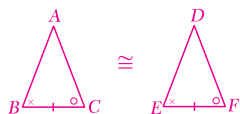
- Ⓐ 0.3、0.5、0.5 Ⓑ 5、9、14 Ⓒ $2\sqrt{2}$ 、1、3 Ⓓ 2、99、100

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

5. 只有 Ⓓ 不符合！
 $\because 5+9=14$ 無法構成三角形

(A) 6. 兩個等腰三角形中，若底邊及一底角對應相等，則這兩個等腰三角形有何種關係？

- (A) ASA 全等 (B) 不全等
(C) 面積不同 (D) RHS 全等



6. $\because \overline{BC} = \overline{EF}$ 且 $\angle C = \angle F$ ，
則 $\angle B = \angle E$ ，
故 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA)

(D) 7. 若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{EF} = 13$ ， $\overline{AC} = 5$ ，則 $\triangle DEF$ 的周長為何？

- (A) 25 (B) 27
(C) 28 (D) 30

7. 周長 $= 12+13+5=30$

(B) 8. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{QR}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PQ}$ ，則再加上下列何種條件可判定 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 為全等三角形呢？(甲) $\angle B = \angle R$ 、(乙) $\angle C = \angle P$ 、(丙) $\angle A = \angle Q$ 、(丁) $\overline{BC} = \overline{PR}$ 。

- (A) 甲或乙 (B) 丙或丁
(C) 甲或丁 (D) 乙或丙

8. (甲) SSA (非全等性質)
(乙) SSA (非全等性質)
(丙) SAS 全等
(丁) SSS 全等

(C) 9. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{EF}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ， $\overline{AC} = \overline{DE}$ ，則下列何者正確？

- (A) $\angle A = \angle D$
(B) $\angle C = \angle F$
(C) $\angle B = \angle F$
(D) $\angle D = \angle E$



9.

(C) 10. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle C$ 的外角為 110° ，則 $\triangle ABC$ 為何種三角形呢？

- (A) 直角三角形
(B) 鈍角三角形
(C) 銳角三角形
(D) 任意三角形

10. $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，
 $\angle B = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$ ，
可知其為銳角三角形

(A) 11. 已知三角形的三個外角度數比是 3 : 4 : 5，則此三角形的最大內角是多少？

- (A) 90° (B) 100°
(C) 110° (D) 120°

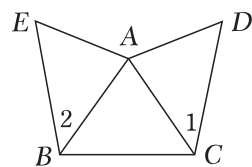
11. 最小外角 $= 360^\circ \times \frac{3}{3+4+5} = 90^\circ$ ，
最大內角 $= 90^\circ$

(B) 12. 設 $\triangle ABC$ 中， $2\angle A : 3\angle B = 8 : 9$ ， $2\angle B : \angle C = 6 : 5$ ，則 $\angle A + \angle B = ?$

- (A) 100°
(B) 105°
(C) 110°
(D) 115°

12. $2\angle B : \angle C = 6 : 5$ ， $2\angle A : 3\angle B = 8 : 9$ ，
 $4\angle A : 6\angle B : 3\angle C = 16 : 18 : 15$ ， $\angle A = 4r$ ， $\angle B = 3r$ ， $\angle C = 5r$ ，
 $\angle A + \angle B = 180^\circ \times \frac{4+3}{4+3+5} = 105^\circ$

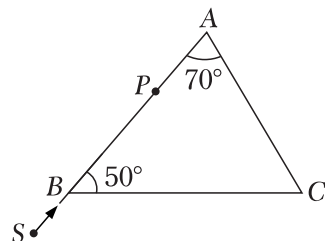
(C) 13. 如右圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{CD} = \overline{BE}$ ， $\angle D = \angle E$ ，那麼下列敘述何者錯誤？



- (A) $\overline{AB} = \overline{AC}$
- (B) $\angle ABC = \angle ACB$
- (C) $\overline{AC} = \overline{AE}$
- (D) $\triangle ABC$ 是等腰三角形

13. 因為 $\angle 1 = \angle 2$ ，
 $\overline{CD} = \overline{BE}$ ， $\angle D = \angle E$ ，
 所以 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ (ASA) $\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AE} \neq \overline{AB}$

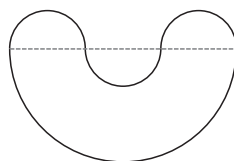
(D) 14. 如右圖，若小華由 S 點出發，只准前進不准後退，依照 $S \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow P$ 的順序走到 P 點，小華共轉了幾度呢？



- (A) 125°
- (B) 150°
- (C) 250°
- (D) 280°

14. $50^\circ + 120^\circ + 110^\circ = 280^\circ$

(A) 15. 右圖是某組合玩具的造型，是由三個相同的半圓與一個大半圓所構成，若最大半圓的直徑是 12 公分，請問此圖案的面積為多少平方公分？

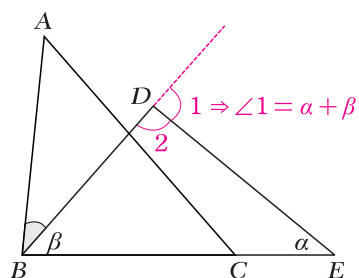


- (A) 20π
- (B) 22π
- (C) 23π
- (D) 24π

15. 面積 = $18\pi - 2\pi + 4\pi = 20\pi$ (平方公分)

歷屆基測 試題

(D) 1. 右圖是 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 重疊的情形，其中 C 在 \overline{BE} 上，且 $\overline{AC} = \overline{BE} = 9$ 、 $\overline{AB} = \overline{ED} = 7$ 、 $\overline{BC} = \overline{BD} = 6$ 。若 $\angle DEB = \alpha$ ， $\angle DBE = \beta$ ，則 $\angle ABD = ?$



- (A) $\frac{\alpha - \beta}{2}$
- (B) $\alpha - \beta$
- (C) $180^\circ - \alpha - \beta$
- (D) $180^\circ - \alpha - 2\beta$

1. 延長 \overline{BD} 得 $\angle 1$ ， $\angle 1 = \alpha + \beta$ ，
 $\angle 2 = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDB$ (SSS 全等)
 $\therefore \angle ABC = \angle 2$
 $\therefore \angle ABD = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \beta = 180^\circ - \alpha - 2\beta$

97 基測二

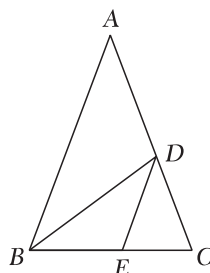
(D) 2. 在五邊形 ABCDE 中，若 $\angle A = 100^\circ$ ，且其餘四個內角度數相等，則 $\angle C = ?$

- (A) 65°
- (B) 100°
- (C) 108°
- (D) 110°

2. 五邊形內角和 = $(5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$ ，
 $\angle C = \frac{540^\circ - 100^\circ}{4} = 110^\circ$

97 基測一

(B) 3. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 \overline{AC} 、 \overline{BC} 上，且 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{CD} = \overline{DE}$ 。若 $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle ABD : \angle DBC = 3 : 4$ ，則 $\angle BDE = ?$

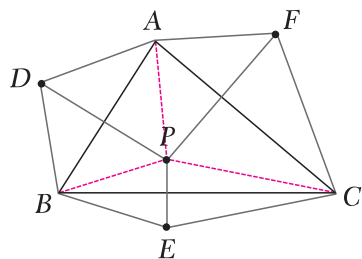


- (A) 25°
- (B) 30°
- (C) 35°
- (D) 40°

3. $\therefore \angle A = 40^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{AC} \therefore \angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$
 又 $\overline{DC} = \overline{DE} \Rightarrow \angle DCE = \angle DEC = 70^\circ$
 $\therefore \angle ABD : \angle DBC = 3 : 4 \therefore \angle DBE = 40^\circ$
 $\angle BDE = \angle DEC - \angle DBE = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

97 基測一

- (C) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 的內部有一點 P ，且 D 、 E 、 F 是 P 分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 為對稱軸的對稱點。若 $\triangle ABC$ 的內角 $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ，則 $\angle ADB + \angle BEC + \angle CFA = ?$

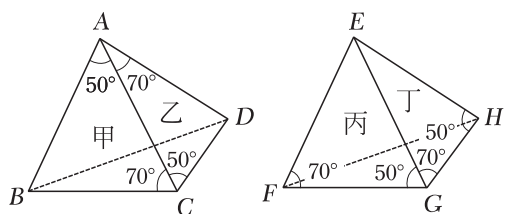


97 基測一

- (A) 180°
 (B) 270°
 (C) 360°
 (D) 480°

4. 連接 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC}
 $\therefore D$ 、 E 、 F 是 P 分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 為對稱軸之對稱點，
 $\therefore \angle ADB = \angle APB$ ， $\angle BEC = \angle BPC$ ， $\angle CFA = \angle CPA$
 $\therefore \angle ADB + \angle BEC + \angle CFA = \angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ$

- (B) 5. 如右圖，有兩個三角錐 $ABCD$ 、 $EFGH$ ，其中甲、乙、丙、丁分別表示 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle EFG$ 、 $\triangle EGH$ 。若 $\angle ACB = \angle CAD = \angle EFG = \angle EGH = 70^\circ$ ， $\angle BAC = \angle ACD = \angle EGF = \angle EHG = 50^\circ$ ，則下列敘述何者正確？

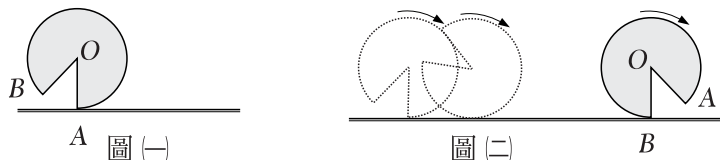


97 基測一

- (A) 甲、乙全等，丙、丁全等
 (B) 甲、乙全等，丙、丁不全等
 (C) 甲、乙不全等，丙、丁全等
 (D) 甲、乙不全等，丙、丁不全等

5. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA)
 在 $\triangle EFG$ 中 \overline{EG} 為 $\angle F = 70^\circ$ 之對邊，
 在 $\triangle EGH$ 中， \overline{EG} 為 $\angle H = 50^\circ$ 之對邊
 \therefore 丙、丁未必全等

- (C) 6. 如圖(一)，水平地面上有一面積為 30π 平方公分的灰色扇形 OAB ，其中 \overline{OA} 的長度為6公分，且與地面垂直。若在沒有滑動的情況下，將圖(一)的扇形向右滾動至 \overline{OB} 垂直地面為止，如圖(二)所示，則 O 點移動多少公分？

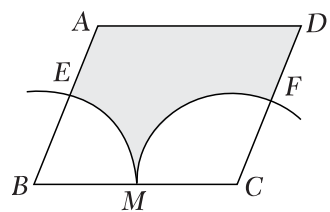


96 基測一

- (A) 20 (B) 24
 (C) 10π (D) 30π

6. \therefore 共轉了 $\frac{30\pi}{\pi \times 6^2} \times 360^\circ = 300^\circ$
 $\therefore O$ 點移動了 $2 \times \pi \times 6 \times \frac{300^\circ}{360^\circ} = 10\pi$ (公分)

- (B) 7. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BC} = 12$ ， M 為 \overline{BC} 中點， M 到 \overline{AD} 的距離為8。若分別以 B 、 C 為圓心， \overline{BM} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 、 \overline{CD} 於 E 、 F 兩點，則圖中灰色區域面積為何？



- (A) $96 - 12\pi$
 (B) $96 - 18\pi$
 (C) $96 - 24\pi$
 (D) $96 - 27\pi$

7. $\therefore \overline{BC} = 12$ ， M 到 \overline{AD} 的距離為8
 \therefore 平行四邊形 $ABCD$ 面積 $= 12 \times 8 = 96$
 $\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$
 \therefore 扇形 EBM 面積 $+ 扇形FCM$ 面積 $=$ 半徑為6的半圓面積 $= \pi \times 6^2 \times \frac{1}{2} = 18\pi$
 灰色區域面積 $= 96 - 18\pi$

96 基測一

(B) 1. 一多邊形各內角為 $2x^\circ$ 、 $3x^\circ$ 、 $4x^\circ$ 、 $4x^\circ$ 、 $5x^\circ$ ，則其最小角為多少度呢？

- (A) 30° (B) 60°
(C) 120° (D) 160°

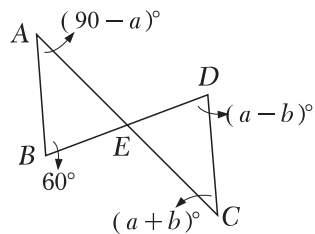
1. $(5-2) \times 180^\circ = 18x^\circ \Rightarrow 540^\circ = 18x^\circ \Rightarrow x = 30$
 \therefore 最小內角 $= 2x^\circ = 60^\circ$

(B) 2. 如右圖， $\overline{AE} = \overline{EC}$ ， $\overline{BE} = \overline{ED}$ ，試求 $\frac{a}{b} = ?$

- (A) $-\frac{1}{5}$
(B) -5
(C) $\frac{1}{5}$
(D) 5

2. 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle CDE$ 中，
 $\because \overline{AE} = \overline{EC}$ ， $\overline{BE} = \overline{ED}$ ，且 $\angle AEB = \angle CED$ ，
 故 $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (SAS)，

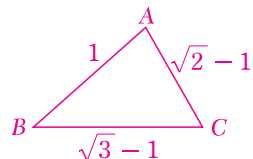
$$\begin{cases} a+b=90-a \\ a-b=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=50 \\ b=-10 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{50}{-10} = -5$$



(C) 3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3} - 1$ ， $\overline{AC} = \sqrt{2} - 1$ ，則 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之大小的關係為下列何者呢？

- (A) $\angle C > \angle B > \angle A$
(B) $\angle B > \angle C > \angle A$
(C) $\angle C > \angle A > \angle B$
(D) $\angle A > \angle B > \angle C$

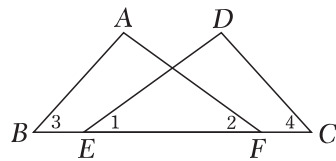
3. 大角對大邊，小角對小邊，
 $\overline{AC} < \overline{BC} < \overline{AB}$ ， $\angle B < \angle A < \angle C$



(D) 4. 如右圖，若 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， $\overline{BE} = \overline{CF}$ ，根據何種全等性質可證明 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 呢？

- (A) AAS
(B) SSS
(C) RHS
(D) ASA

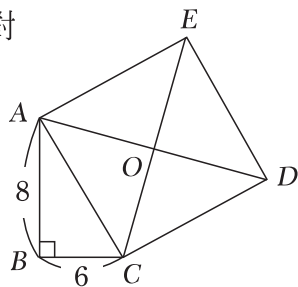
4. 因為 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，
 且 $\overline{BE} + \overline{EF} = \overline{CF} + \overline{EF} \Rightarrow \overline{BF} = \overline{CE}$
 故 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ (ASA)



(C) 5. 如右圖， $\angle ABC = 90^\circ$ ，以 \overline{AC} 為邊作正方形 $ACDE$ ， O 為兩對角線交點，設 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，則 $\triangle AOC$ 的面積為何？

- (A) 15
(B) 20
(C) 25
(D) 30

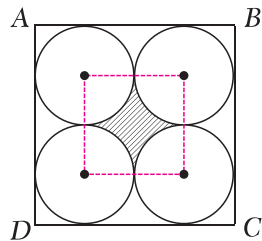
5. $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ，
 $ACDE$ 面積 $= 10^2 = 100$ ，
 $\triangle AOC$ 面積 $= \frac{1}{4} \times 100 = 25$



(B) 6. 如右圖， $ABCD$ 為邊長 4 的正方形，內切四個互切的全等圓，則斜線部分面積為多少平方公分呢？

- (A) $4 + \pi$
(B) $4 - \pi$
(C) $2\pi + 4$
(D) $2\pi - 4$

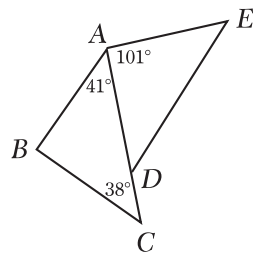
6. 如圖，斜線面積 $= (\frac{4}{2})^2 - (\frac{4}{4})^2 \pi = 4 - \pi$



(A) 7. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{AE} = \overline{BC}$ ，求 $\angle DEA = ?$

- (A) 38°
- (B) 41°
- (C) 55°
- (D) 60°

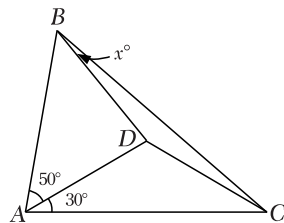
7. $\because \overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{AE} = \overline{BC}$ ，
且 $\angle ABC = 180^\circ - (41^\circ + 38^\circ) = 101^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DAE$ ，故 $\angle DEA = 38^\circ$



(B) 8. 如右圖， $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ ，則 $x^\circ = ?$

- (A) 5°
- (B) 10°
- (C) 15°
- (D) 20°

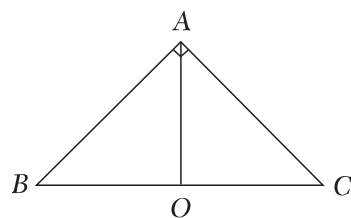
8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$
 $\therefore \angle BAD = \angle ABD = 50^\circ$ ，
 $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$ ，
 $\angle DBC = \angle DCB = x^\circ$
 $\Rightarrow x^\circ = (180^\circ \div 2) - 50^\circ - 30^\circ = 10^\circ$



(D) 9. 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ， \overline{OA} 為 $\triangle ABC$ 的高，若 $\overline{OA} = 8$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為何？

- (A) 23
- (B) 32
- (C) 46
- (D) 64

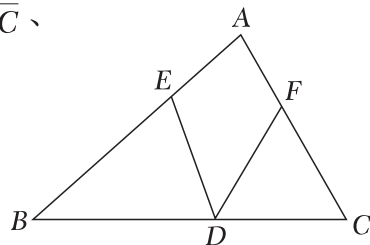
9. $\because \angle B = \angle BAO = \angle CAO = \angle C = 45^\circ$
 $\therefore \overline{BC} = 2 \times 8 = 16$ ，
 $\triangle ABC$ 面積 $= 16 \times 8 \times \frac{1}{2} = 64$ (平方單位)



(A) 10. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ， D 、 E 、 F 點分別在 \overline{BC} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，且 $\overline{BD} = \overline{BE}$ ， $\overline{CD} = \overline{CF}$ ，則 $\angle EDF = ?$

- (A) 50°
- (B) 52°
- (C) 54°
- (D) 56°

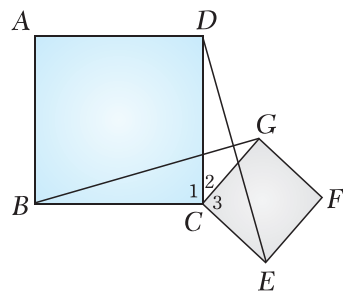
10. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle C = 100^\circ$ ，
 $\angle B = 180^\circ - 2\angle BDE$ ， $\angle C = 180^\circ - 2\angle FDC$ ，
 $\angle B + \angle C = 360^\circ - 2(\angle BDE + \angle FDC)$ ，
 $\angle BDE + \angle FDC = 130^\circ \Rightarrow \angle EDF = 50^\circ$



(B) 11. 如右圖， $ABCD$ 和 $CEFG$ 都是正方形，若 $\angle 2 = 30^\circ$ ， $\angle CED = 25^\circ$ ，則 $\angle GBC$ 為多少度呢？

- (A) 25°
- (B) 35°
- (C) 45°
- (D) 55°

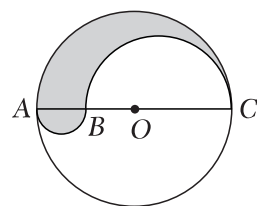
11. 因為 $\angle 1 = \angle 3 = 90^\circ$ ，
 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 120^\circ$ ，且 $\overline{BC} = \overline{CD}$ ， $\overline{CG} = \overline{CE}$
故 $\triangle BCG \cong \triangle DCE$ (SAS)，
 $\angle GBC = 180^\circ - (120^\circ + 25^\circ) = 35^\circ$



(B) 12. 如右圖， O 為大圓之圓心， $\overline{OA} = 6$ ， $\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ ，求灰色色塊周長為何？

- (A) 6π
- (B) 12π
- (C) 18π
- (D) 24π

12. 灰色色塊周長
 $= \widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{AB}$
 $= (12\pi \times \frac{1}{2}) + (9\pi \times \frac{1}{2}) + (3\pi \times \frac{1}{2})$
 $= 12\pi$



第 15 單元 立體圖形的基本性質

180

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少？測驗就知道！

(X) 1. 正方體體積為其邊長的 3 倍。

💡 應該為立方倍

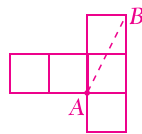
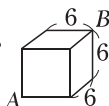
能力一

(X) 2. 埃及古夫金字塔是正三角錐，其展開圖為四個全等三角形。

💡 金字塔為正四角錐，展開圖為一個正方形與四個正三角形

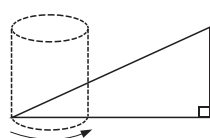
(○) 3. 如右圖，螞蟻從 A 點走到 B 點的最短距離為 $6\sqrt{5}$ 。

💡 $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$

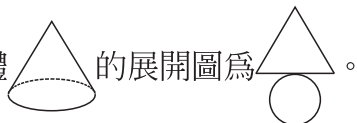


(○) 4. 如右圖，有一直角三角形，將圓柱旋轉包覆，會形成螺旋線。

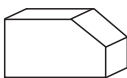
💡



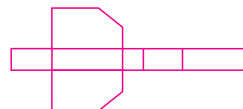
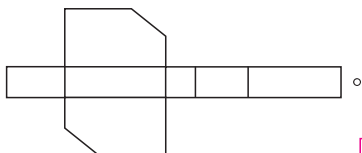
(X) 5. 圓錐體的展開圖為



(X) 6. 立體圖形



的展開圖為



💡

(X) 7. 在容器 1 立方公尺的水槽中注滿水，需要 10^9 毫公升的水。

💡 $1(m^3) = 1(kl) = 1000(l) = 1000000(ml) = 10^6(ml)$

能力二

(X) 8. 將松板大輔公仔丟入馬桶水箱，水箱水的高度乘以水箱的底面積即為公仔的體積。

💡 應該要減去原本水箱中水的高度再乘以底面積

(○) 9. 一正方體的邊長變為原長的 $\frac{1}{3}$ 倍，則體積減少了 $\frac{26}{27}$ 倍。

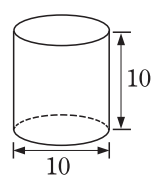
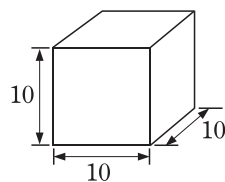
💡 原體積 = $1^3 = 1$ ，後體積 = $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$ ，體積減少 $1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ (倍)

(X) 10. 如右圖，邊長為 10 的正方體及直徑為 10 的圓柱體，體積相差 $500(4 - \pi)$ 立方單位。

💡 正方體體積 = $10^3 = 1000$

— 圓柱體體積 = $5 \times 5 \times \pi \times 10 = 250\pi$

$1000 - 250\pi = 250(4 - \pi)$



數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



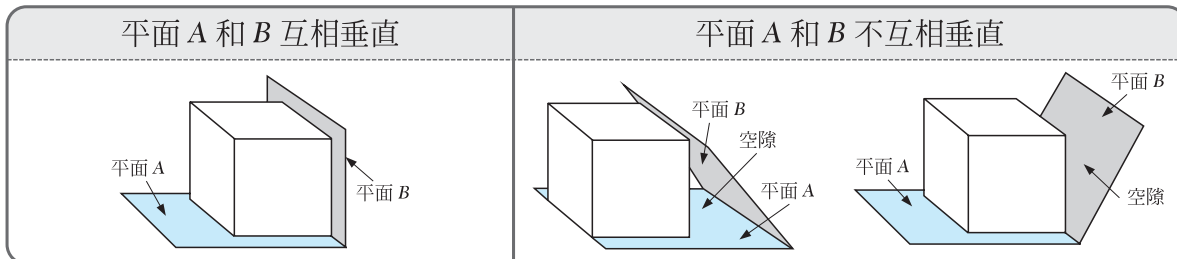
能力

立體圖形的性質

一 面與面、線與面的垂直關係

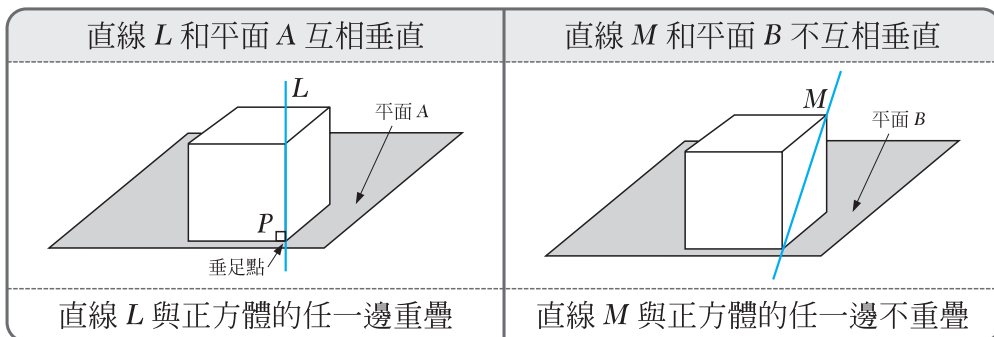
1. 平面與平面垂直的判別

檢驗兩平面是否垂直，可利用正立方體來檢驗，如下表所示：



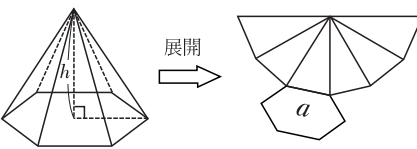
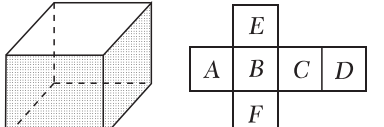
2. 直線與平面垂直的判別

檢驗直線與平面是否垂直，亦可利用正方體來檢驗，如下表所示：



二 立體圖形的性質

名稱	圖形	性質
角柱體 (設 n 角柱)		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\Rightarrow V = a \times h$ 2. 側面有 n 個矩形 3. 共有 $n + 2$ 個面 4. 共有 $2n$ 個頂點 5. 共有 $3n$ 個邊
圓柱體		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\Rightarrow V = (\pi r^2) \times h$ 2. 表面積： $A = 2\pi r^2 + hl$, ($l = 2\pi r$)
圓錐體		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\times \frac{1}{3}$ $\Rightarrow V = a \times h \times \frac{1}{3}$ 2. 底圓周長： $l = 2\pi r$ 3. 錐體斜邊長： $R = \sqrt{h^2 + r^2}$

<p>角錐體 (設 n 角錐)</p>		<p>1. 體積 = 底面積 \times 高 $\times \frac{1}{3}$ $\Rightarrow V = a \times h \times \frac{1}{3}$</p> <p>2. 側面有 n 個等腰三角形</p> <p>3. 面與頂點皆有 $n + 1$ 個</p> <p>4. 共有 $2n$ 個邊</p>
<p>正六面體的 展開圖</p>		

師說 1

〈多面體的性質〉

演練 1

1. 有一個十二角柱有 a 個頂點、 b 個邊、 c 個面。請問： $(a + c) - b = ?$
2. 若有一個七角錐的邊數比正四面體的邊數多 x 個，五角柱有 y 個面，則 $x + y = ?$

解

1. 十二角柱有 24 個頂點、36 個邊、14 個面，
 $(24 + 14) - 36 = 2$
2. $x =$ 七角錐邊數 $-$ 正四面體邊數
 $= 2 \times 7 - 2 \times 3 = 8$
 $y =$ 五角柱面數 $= 5 + 2 = 7$ ，
 $x + y = 8 + 7 = 15$

有一個五角錐形的巧克力，今天在角錐上切一刀，不可切到頂點也不可切到底面，可將巧克力分成兩個部分，請問：此兩部分的立體圖形共有多少個頂點、面與邊呢？

解

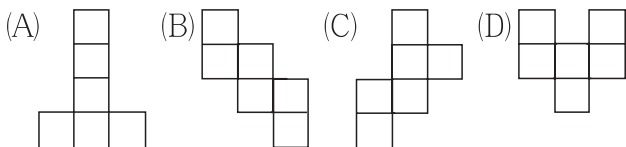
五角錐	頂點	面	邊
上半部	6	6	10
下半部	10	7	15
總計	16	13	25

師說 2

〈展開圖的判別〉

演練 2

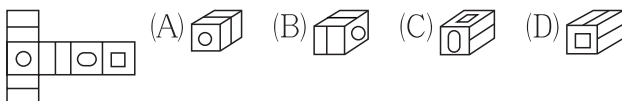
下列的展開圖中，何者不是正方體的展開圖呢？



解

(D) 無法形成正方體

下圖是一個正方體的展開圖，將它折成正方體之後的圖形是下列何者呢？



解

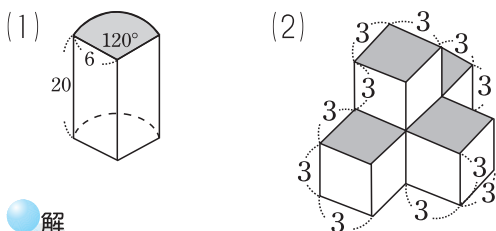


師說 3

〈體積的計算 I〉

演練 3

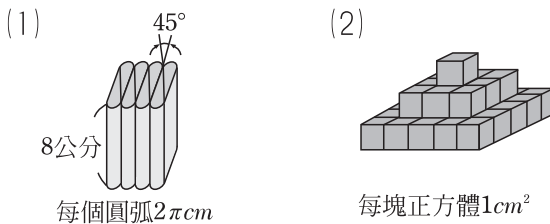
請求出下列各柱體的體積：



解

- (1) $\frac{120^\circ}{360^\circ} \times 6 \times 6 \times \pi \times 20 = 240\pi$ (單位³)
- (2) $3^3 \times 5 = 27 \times 5 = 135$ (單位³)

請求出下列圖形的體積：



解

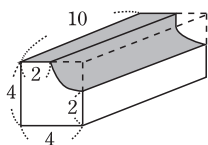
- (1) $2\pi \times 8 = 16\pi$, $16\pi \div 2\pi = 8$ (半徑)
 體積 $= (8 \times 8 \times \pi) \times 8 = 512\pi$ (cm³)
- (2) $1 + 9 + 25 = 35$ (塊)，每塊 1 cm³
 共計 35 (cm³)

師說 4

〈體積的計算 II〉

演練 4

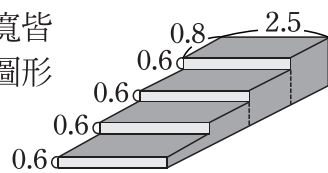
試求出右圖柱體的體積：



解

$$\begin{aligned} & (4 \times 4 - \frac{1}{4} \times 2 \times 2 \times \pi) \times 10 \\ & = (16 - \pi) \times 10 = \underline{160 - 10\pi} \text{ (單位}^3\text{)} \end{aligned}$$

右圖中每一階的長、寬皆相同，試求出此階梯圖形的體積：



解

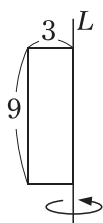
$$\begin{aligned} & \text{體積} \\ & = (0.8 \times 2.5) \times (0.6 + 0.6 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.6 \times 4) \\ & = \underline{12} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

師說 5

〈旋轉後的立體圖形〉

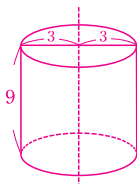
演練 5

如圖，一個長方形紙板繞這直線 L 旋轉一周，得到一個圓柱，則其體積與表面積為何？

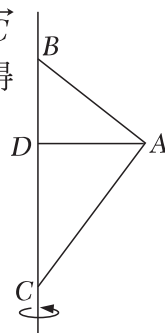


解

$$\begin{aligned} & \text{體積} = (3 \times 3 \times \pi) \times 9 \\ & \quad = \underline{81\pi} \text{ (立方單位)} \\ & \text{表面積} = 2(3 \times 3 \times \pi) + (6 \times \pi) \times 9 \\ & \quad = 18\pi + 54\pi \\ & \quad = \underline{72\pi} \text{ (平方單位)} \end{aligned}$$



如圖， $\overline{BC} = 30$ ， $\overline{AD} = 14$ ，以 \overline{BC} 為軸，將 $\triangle ABC$ 旋轉一圈，所得體積為何？

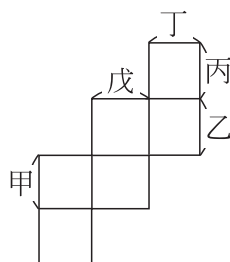


解

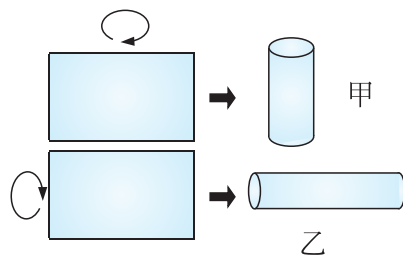
$$\begin{aligned} & \text{體積} = \frac{1}{3} \times 14^2 \times \pi \times 30 \\ & \quad = \underline{1960\pi} \text{ (立方單位)} \end{aligned}$$

同步評量 1

- (C) 1. 下列有關直角柱的敘述哪一個不正確？
- (A) 有兩個全等的底面 (B) 側面與底面垂直
(C) 側面是等腰三角形 (D) 邊的個數是底面邊數的 3 倍
- (A) 2. 小華用黏土捏了一個圓柱，但是他覺得柱高太高了，於是把柱高變為原柱高的 $\frac{1}{4}$ ，如果使體積不變，則底圓半徑為原半徑的多少倍？
- $2. \pi \times r^2 \times h = \pi \times n \times \frac{1}{4}h, n = (2r)^2$
需為原半徑的 2 倍
- (C) 3. 右圖是正方體的一個展開圖，當用它合成原來的正方體時，與甲邊重合的是哪一邊？
- (A) 乙 (B) 丙
(C) 丁 (D) 戊



(A) 4. 如右圖，有兩張相同的長方形厚紙板，分別對長、寬捲起成圓柱體而成爲兩空心圓柱，若長方形紙板的長、寬分別爲 80 cm 、 20 cm ，則甲、乙兩圓柱體哪一個體積較大？



(A) 甲

(B) 乙

(C) 一樣大

(D) 無解

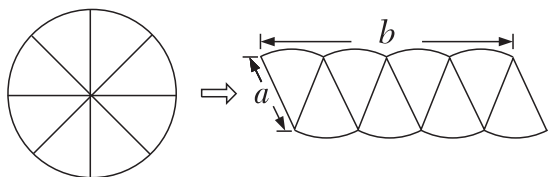
$$4. \because \text{甲} \Rightarrow 80 = 2\pi r, r = \frac{40}{\pi},$$

$$\text{體積} = \left(\frac{40}{\pi}\right)^2 \times \pi \times 20 = \frac{32000}{\pi} \text{ cm}^3$$

$$\text{乙} \Rightarrow 20 = 2\pi r, r = \frac{10}{\pi},$$

$$\text{體積} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \times \pi \times 80 = \frac{8000}{\pi} \text{ cm}^3 \quad \therefore \text{甲} > \text{乙}$$

(B) 5. 小明將一蛋糕切成 8 等分，重新排列如右圖，並用尺量出 a 、 b 長度，則 $b \div a$ 最接近哪一個數？



(A) 2 (B) 3

(C) 4 (D) 5

$$5. b = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r, a = r, b \div a = \frac{\pi r}{r} = \pi \div 3.14$$

能力 容積與容量

一 容積

一個容器內裝滿液體時，液體所占的體積，稱爲容積。

二 容量

一個中空容器能容物的量，稱爲容量。

三 體積與容積單位換算表

容量	1 公秉 (kl)	1 公石	1 公斗	1 公升 (l)	1 分公升 (dl)	1 公勺	1 毫公升 (ml)
容積 (體積)	1 立方公尺 (m^3)	—	—	1000 立方公分 (cm^3)	100 立方公分 (cm^3)	—	1 立方公分 (cm^3)

四 不規則物體的體(容)積求法

不規則物體的體積 = 增高部分水量 = 柱體內部底面積 \times 水面上升高度。

五 其它基本常識

- 1 度水的水量 = 1 立方公尺的水 = 1000 公升的水量。
- 降雨量：即一次下雨，從開始到結束所累積降雨的高度，通常以毫米 (mm) 表示。
- 雨水體積：降雨量 \times 容器底面積。

六 長方體容器的容積

容積 = (內部的長) × (內部的寬) × (內部的高)

1. 有蓋的長方體容器：

內部的長、寬、高 = 外部的(長)、(寬)、(高) - (2 × 容器壁的厚度)

2. 無蓋的長方體容器：

內部的長、寬 = 外部的(長)、(寬) - (2 × 容器壁的厚度)。

內部的高 = 外部的高 - 容器壁的厚度。

師說 6

〈容積的計算〉

演練 6

有一正方體的水槽，已知邊長為 30 公分，先注入深 20 公分的水，再放入一長方體的鐵塊其長、寬、高分別為 15 公分、12 公分、10 公分，則水上升多少公分呢？

●解

$$\begin{aligned} \text{上升高度} &= (15 \times 12 \times 10) \div (30 \times 30) \\ &= 1800 \div 900 = \underline{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

用 1 公分厚的玻璃做成一個有底無蓋的水箱，從水箱外量得長、寬、高分別為 102 公分、52 公分、46 公分，則(1)水箱容量是多少公升呢？(2)水箱本身的體積是多少立方公分呢？

●解

$$\begin{aligned} (1) & (102 - 2) \times (52 - 2) \times (46 - 1) \\ &= 100 \times 50 \times 45 = 225000 \text{ (cm}^3\text{)} = \underline{225} \text{ (l)} \\ (2) & 102 \times 52 \times 46 - 225000 \\ &= 243984 - 225000 = \underline{18984} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

師說 7

〈水費的計價〉

演練 7

阿璋家有五個人，每人每日洗澡一次，每次均要用掉一缸水，浴缸為長方體，內部的長、寬及水深分別為 100、65 及 50 公分。請問：全家 12 月分的洗澡總用水量是多少公升呢？若以 1 度水收費 10 元計算，這一家 12 月分的洗澡用水，需多少水費呢（四捨五入取整數）？（1 度水 = 1000 公升的水量）

●解

$$\begin{aligned} \text{總用水量} &= (100 \times 65 \times 50) \times 5 \times 31 \\ &= 50375000 \text{ (cm}^3\text{)} \\ &= \underline{50375} \text{ (l)} \\ \text{水費} &= (50375 \div 1000) \times 10 \\ &= 503.75 \text{ (元)} \\ &\approx \underline{504} \text{ (元)} \end{aligned}$$

已知自來水費兩個月收一次，水價計算如下表：今天小勳家 10、11 月共用水 82 度，請問：應繳水費多少元呢（取整數）？

段別	第一段	第二段	第三段	第四段
每度單價	7	9	11	11.5
實用度數	1~20	21~60	61~100	101 以上
累進差額	0	40	160	210
1. 用水費 = 每度單價 × 實際用量 - 累進差額				
2. 應繳水費 = 38 + 用水費 × (1 + 3%)				

●解

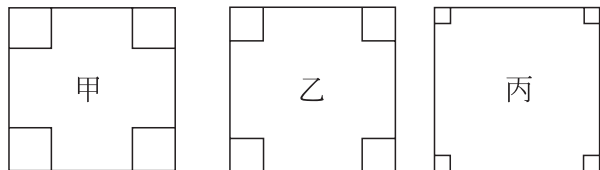
$$\begin{aligned} (1) \text{ 用水費} &= 11 \times 82 - 160 \\ &= 742 \\ \text{水費} &= 38 + 742 \times (1 + 3\%) \\ &= 802.26 \\ &\approx \underline{802} \text{ (元)} \end{aligned}$$

師說 8

〈容量與體積的比較〉

演練 8

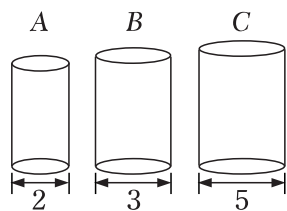
如下圖，甲、乙、丙均是每邊長 20 公分的正方形厚紙板，分別將其四個角各剪去一個每邊長為 5 公分、4 公分、2 公分大小一樣的正方形後，做成沒有蓋子的紙盒，請問：做出來的紙盒哪一個容量最大呢？



解

甲 $\Rightarrow (20 - 5 \times 2)^2 \times 5 = 500 \text{ (cm}^3\text{)}$
 乙 $\Rightarrow (20 - 4 \times 2)^2 \times 4 = 576 \text{ (cm}^3\text{)}$
 丙 $\Rightarrow (20 - 2 \times 2)^2 \times 2 = 512 \text{ (cm}^3\text{)}$
 由上可知：乙的容量最大

如右圖，有 A、B、C 三個圓柱形容器，其直徑比為 2:3:5，某日下雨將三容器置於雨中，雨停後觀察，三個容器中水的體積比為何呢？



解

體積公式 $V = (\pi r^2) \times h$,

由公式可知，半徑或直徑的平方比 = 體積比，

亦即 $V_A : V_B : V_C = r_A^2 : r_B^2 : r_C^2$,

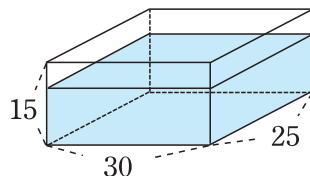
$V_A : V_B : V_C = 2^2 : 3^2 : 5^2 = \underline{4 : 9 : 25}$

同步評量 2

(A) 1. 如右圖，長方體內部長 30 公分、寬 25 公分、高 15 公分，把 9 公升的水倒入此容器裡，水深是幾公分呢？

- (A) 12 (B) 13
(C) 14 (D) 15

1. $9000 = (30 \times 25) \times h, h = 12 \text{ (公分)}$



(C) 2. 一個長 3 公尺、寬 2 公尺、高 1.2 公尺的長方體水塔，底部破了一個大洞且每分鐘漏出 24 公升的水。若水塔原本裝滿水，則幾分鐘後水會漏光呢？

- (A) 3 (B) 30
(C) 300 (D) 3000

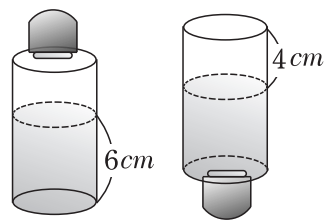
2. $3 \times 2 \times 1.2 = 7.2 \text{ (公秉)} = 7200 \text{ (公升)}$
 $7200 \div 24 = 300 \text{ (分鐘)}$

(B) 3. 如右圖，有一圓柱形塑膠瓶子，裝了的 60c.c. 的優酪乳，高度為 6 cm，若將此瓶子倒立，瓶嘴部分不能裝優酪乳，此時優酪乳距離頂端 4 cm，求此瓶子最多可裝優酪乳多少 c.c. 呢？

- (A) 90 (B) 100 (C) 110 (D) 120

3. 設底面積為 A, $60 \text{ c.c.} = 6 \times A, A = 10$,

容積 = $A \times h = 10 \times 10 = 100 \text{ (c.c.)}$



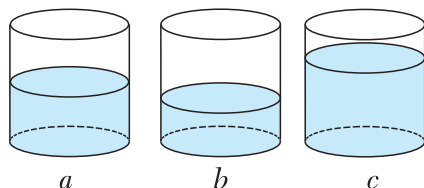
(C) 4. 自來水廠有一個底面積 300 平方公尺、高 5 公尺的蓄水池，七月颱風來時降下豪雨，七月總雨量是 2000 毫米，請問：七月分此蓄水池儲存的水量總共可供應民眾幾度的水？(1 度的水 = 1 立方公尺的水)

- (A) 6 (B) 60 (C) 600 (D) 6000

4. $2000 \text{ 毫米} = 200 \text{ 公分} = 2 \text{ 公尺}$,
 $300 \times 2 = 600 \text{ (m}^3\text{)} = 600 \text{ 度}$

(D) 5. 將甲、乙、丙三種不同物體分別放入大小相同的 a、b、c 三容器中，水位高度一樣，再將物體拿出後，水位變成如右圖所示，下列何者為甲、乙、丙三物體體積的關係呢？

- (A) 甲 > 乙 > 丙 (B) 丙 > 甲 > 乙
(C) 丙 > 乙 > 甲 (D) 乙 > 甲 > 丙



5. 物體體積與水位升高高度成正比，因為是先放入物體，再將水位調成一致後再拿起物體，故水位越低，則體積越大



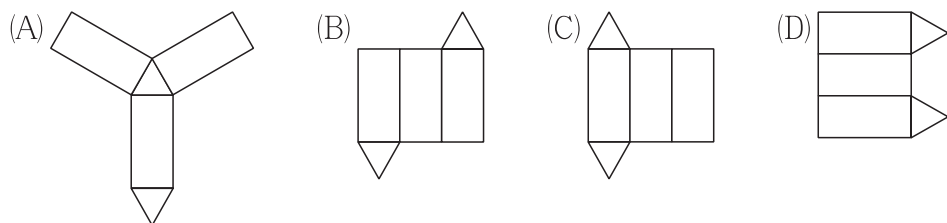
基本觀念題

(D) 1. 一個五角柱有 a 個頂點、 b 個邊， c 個面，則 $a + b + c = ?$

- (A) 29 (B) 30
(C) 31 (D) 32

1. $a + b + c = 10 + 15 + 7 = 32$

(D) 2. 下列何者不可能是三角柱的展開圖？



2. (D) 兩個三角形不可在同一側

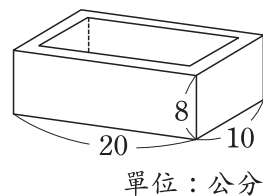
(C) 3. 設長方體的體積為 48 立方公分，若其長、寬、高之比為 1 : 2 : 3，則此長方體的表面積為多少平方公分呢？

- (A) 80 (B) 84
(C) 88 (D) 92

3. 設長為 r ，寬為 $2r$ ，高為 $3r$ ($r \neq 0$)
 $48 = 6r^3 \Rightarrow r = 2$
 表面積 = $(2 \times 4) \times 2 + (2 \times 6) \times 2 + (4 \times 6) \times 2$
 $= 16 + 24 + 48 = 88 \text{ (cm}^2\text{)}$

(B) 4. 如右圖，是放粉筆的盒子，其厚度皆為 2 公分，求此粉筆盒的體積為多少立方公分？

- (A) 1216
(B) 1024
(C) 1020
(D) 1018

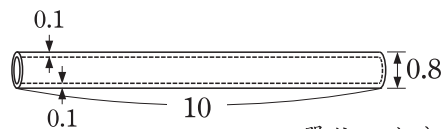


單位：公分

4. 體積 = $(20 \times 8 \times 10) - [(20 - 2 \times 2) \times (10 - 2 \times 2) \times (8 - 2)]$
 $= 1600 - 576 = 1024 \text{ (立方公分)}$

(C) 5. 如右圖，是一支空心原子筆筆管，其體積為多少立方公分？

- (A) 0.5π (B) 0.6π
(C) 0.7π (D) 0.8π

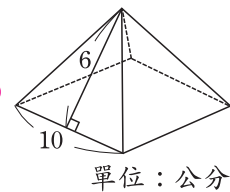


單位：公分

5. 體積 = $[\pi (0.4)^2 \times 10] - [\pi (0.3)^2 \times 10]$
 $= (0.4^2 - 0.3^2) \times 10\pi = 0.7\pi \text{ (立方公分)}$

(C) 6. 如右圖，有一個正四角錐，則其表面積為多少立方公分？

- (A) 190
(B) 200
(C) 220
(D) 240



單位：公分

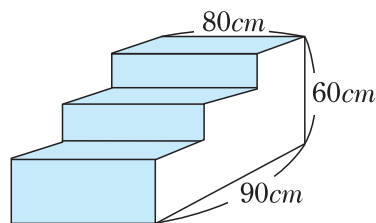
6. 表面積 = $(10 \times 10) + 4(10 \times 6 \times \frac{1}{2}) = 100 + 120 = 220$

(A) 7. 小華用 1 公分厚的木板做成沒有蓋的長方體水槽一個，已知從槽外量得它的長、寬、高分別為 32 公分、27 公分、19 公分，請問：此水槽的容量為多少公升？

- (A) 13.5 (B) 14.5
(C) 16.5 (D) 17.5

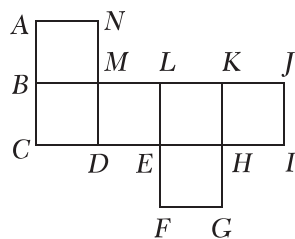
7. $32 - 1 \times 2 = 30$, $27 - 1 \times 2 = 25$, $19 - 1 = 18$
 $30 \times 25 \times 18 = 13500 \text{ (ml)} = 13.5 \text{ (l)}$

- (B) 8. 如右圖，一階梯共三層，小華的爸爸要在階梯上鋪地毯（如右圖的色塊部分）。請問：小華的爸爸需要面積多少平方公分的地毯呢？



$$8. (80 \times 60) + (80 \times 90) = 12000 \text{ (平方公分)}$$

- (C) 9. 右圖表示一正方體之展開圖，若將此展開圖折回一正方體時，則 \overline{BC} 邊與何邊接合呢？



- (A) \overline{ML}
 (B) \overline{LK}
 (C) \overline{JI}
 (D) \overline{FG}

- (A) 10. 有一圓柱體的半徑增加 6 cm 時，其體積增加 y 立方公分；若高增加 6 cm 時，其體積亦增加 y 立方公分，已知原高為 2 cm，則原半徑為多少公分呢？

- (A) 6 (B) 7
 (C) 8 (D) 9

10. 設半徑為 r cm
 $(r+6)^2 \times 2 = r^2 \times (2+6)$, $r^2 + 12r + 36 = 4r^2$, $r^2 - 4r - 12 = 0$,
 $(r+2)(r-6) = 0$, $r = -2$ 或 6 (負不合), 所以 $r = 6$ (公分)

- (A) 11. 自來水 1 度平均為 7 元，柯南國中游泳池的長、寬、高為 75 公尺、50 公尺、2 公尺，平均 100 天換一次水（換水時將水流光，再重新注入），每天平均有 80 位學生游泳，則管理費每人每天至少要繳多少元才會夠水費的支出呢？（元以下四捨五入，1 度水 = 1000 公升）

- (A) 7 (B) 14
 (C) 21 (D) 28

11. $75 \times 50 \times 2 \times 7 = 52500$ (元), $(52500 \div 100) \div 80 \approx 7$ (元)

- (D) 12. 有一個內部長 30 公分、寬 25 公分、高 15 公分的長方體容器，今把 6 公升的水倒入該容器中，則水深為多少公分呢？

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

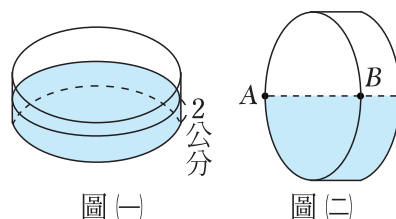
12. 水深 = $6000 \div (30 \times 25) = 8$ (公分)

- (B) 13. 施老師將 32.4 公升的酒精溶液倒入長、寬各為 30 cm、24 cm 的長方體容器中，酒精溶液的高度剛好比容器高度的 $\frac{2}{3}$ 多 5 cm，則此容器的高度為多少公分？

- (A) 45 (B) 60
 (C) 75 (D) 90

13. $32400 \div (30 \times 24) = 45$, 設 h 為容器的高度,
 $45 = \frac{2}{3}h + 5$, $h = 60$ (公分)

- (D) 14. 如右圖(一)，在圓柱形容器內裝有 2 公分的水，若其底面圓形半徑 5 公分，柱高 4 公分，將容器豎立後，如右圖(二)，液面 \overline{AB} 寬多少公分呢？



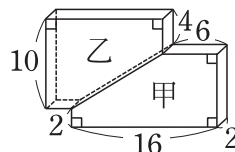
- (A) 2.5 (B) 5
 (C) 7.5 (D) 10

14. 水的體積剛好是容器體積的一半

- (A) 15. 如右圖，試求五角柱「甲」的體積為何？

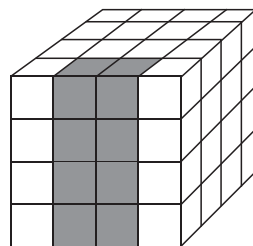
- (A) 196 (B) 169
 (C) 154 (D) 136

15. 甲體積 = $(\square - \triangle) \times \text{高}$
 $= [(16 \times 8) - (\frac{1}{2} \times 10 \times 6)] \times 2$
 $= (128 - 30) \times 2 = 196$ (立方單位)





- (D) 1. 如右圖，將 64 塊邊長為 1 公分的小正方體堆砌成邊長為 4 公分的實心正方體。若拿掉圖中 8 塊灰色小正方體，則新立體圖形的表面積為多少平方公分？

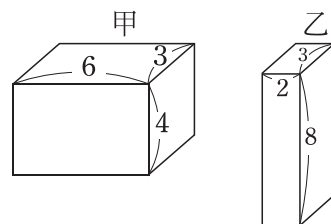


97 基測二

- (A) 88
(B) 92
(C) 96
(D) 100

1. 原正方體的表面積為 96 個小正方形，新立體圖形的表面積比原正方體多了 4 個小正方形 $\Rightarrow 96 + 4 = 100 (cm^2)$

- (B) 2. 右圖為甲、乙兩個長方體，依圖中所給的邊長長度（單位：公分），計算甲體積與乙體積的比值為何？

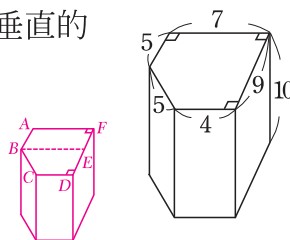


- (A) 1 (B) 1.5 (C) 2 (D) 2.5

96 基測二

2. $\frac{\text{甲體積}}{\text{乙體積}} = \frac{6 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 8} = \frac{3 \times 1 \times 1}{1 \times 1 \times 2} = \frac{3}{2} = 1.5$

- (A) 3. 如右圖，柱體的兩底面為全等的五邊形、側面均為與兩底面垂直的長方形。根據右圖的數據及符號，求此柱體體積為何？



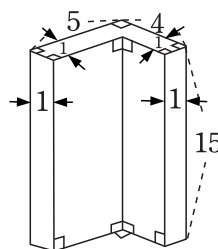
- (A) 570
(B) 590
(C) 610
(D) 630

3. 將此柱體底面分為長方形 $ABEF$ 與梯形 $BCDE$ ，如圖所示。

則此柱體體積 $= [7 \times 5 + \frac{1}{2}(4+7)(9-5)] \times 10 = 570 (\text{單位}^3)$

95 基測二

- (A) 4. 右圖為一柱體，其中上、下兩個 L 型底面全等，且側面皆與底面垂直。根據圖中的數據，求此柱體的體積為何？



- (A) 120
(B) 135
(C) 150
(D) 300

4. 體積 $= \text{底面積} \times \text{高} = (3 \times 1 + 4 \times 1 + 1 \times 1) \times 15 = 8 \times 15 = 120 (\text{單位}^3)$

94 基測二

- (C) 5. 小宇用 1500 個大小相同的實心正方體小木塊，緊密地疊成一個最大的實心正方體，請問：疊完後剩下幾個小木塊？

- (A) 0 (B) 56
(C) 169 (D) 500

5. $11^3 = 1331, 12^3 = 1728 \therefore 11^3 < 1500 < 12^3, \therefore \text{最大正方體的邊長} = 11, \text{體積} = 11^3 = 1331, \text{剩下個數} = 1500 - 1331 = 169 (\text{個})$

93 基測二

- (D) 6. 有一個體積為 512 立方公分的正方體，求此正方體的表面積為多少平方公分？

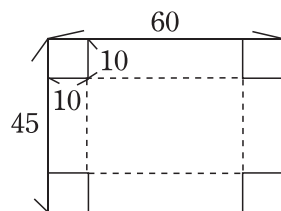
- (A) 114 (B) 192
(C) 256 (D) 384

6. 將 512 作因數分解， $512 = 2^9 = (2^3)^3 = 8^3$ ，則此正方體邊長為 8，表面積為 $8 \times 8 \times 6 = 384 (cm^2)$

93 基測一



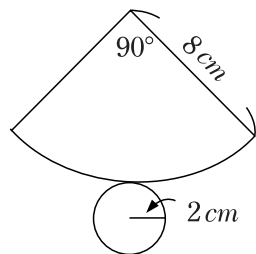
- (A) 1. 將長 60 cm、寬 45 cm 的鋁片，四個角落都減掉一邊長 10 cm 的正方形，然後沿虛線摺起成一長方體容器，此容器的容積是多少公升呢？



- (A) 10 (B) 100
(C) 1000 (D) 10000

1. $(60 - 10 \times 2) \times (45 - 10 \times 2) \times 10 = 10000 (cm^3) = 10 (\text{公升})$

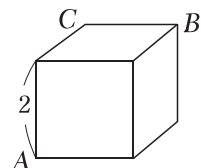
- (C) 2. 右圖是圓錐的展開圖，扇形的半徑為 8 公分，圓心角為 90° ，求這個圓錐的表面積為多少平方公分？



- (A) 12π
 (B) 16π
 (C) 20π
 (D) 22π

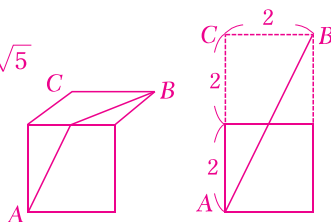
2. 圓錐表面積 = 扇形面積 + 底圓圓面積
 $= \frac{1}{4}(\pi \times 8^2) + \pi \times 2^2$
 $= 16\pi + 4\pi = 20\pi (cm^2)$

- (B) 3. 如右圖，邊長為 2 的正方體，如果在正方體表面移動，從 A 走到 B，請問：最短的距離為何？



- (A) $\sqrt{5}$
 (B) $2\sqrt{5}$
 (C) $3\sqrt{5}$
 (D) $4\sqrt{5}$

3. $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

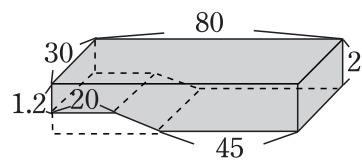


- (C) 4. 長 40 公尺、寬 20 公尺的游泳池，若每分鐘注水 2000 公升，則需幾個小時才能使水深增加 60 公分？

4. $\because 60 \text{ 公分} = 0.6 \text{ 公尺}$ ，總需水量 = $40 \times 20 \times 0.6 = 480 m^3$ ，
 又 2000 公升水的體積 = $2m^3$ 。 \therefore 共需注水 $480 \div 2 = 240$ 分鐘 = 4 小時

- (A) 3 小時 50 分鐘 (B) 3 小時 55 分鐘 (C) 4 小時 (D) 4 小時 5 分鐘

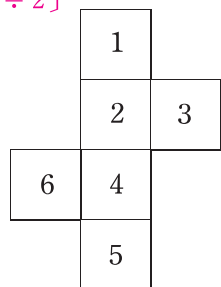
- (B) 5. 遊樂區興建一座游泳池，內部的長、寬各為 80 公尺、30 公尺，兒童戲水區水深 1.2 公尺，長度為 20 公尺，成人游泳區水深 2 公尺，長度為 45 公尺，兩區之間以斜坡銜接，則游泳池的容積為多少立方公尺？



- (A) 4040 (B) 4140
 (C) 4240 (D) 4340

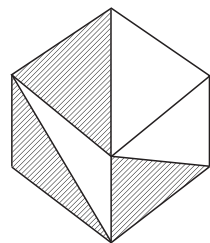
5. 由游泳池的側邊看去可將其視為一六角柱，
 游泳池側邊的面積 = $80 \times 2 - [(20 + 35) \times (2 - 1.2) \div 2]$
 $= 138$ (立方公尺)
 游泳池容積 = $138 \times 30 = 4140$ (立方公尺)

- (C) 6. 有一個正立方體盒子，在各面上分別以 1~6 的數字標示，其展開圖如右圖，請問：下面哪一個才是正確的立方體盒子？



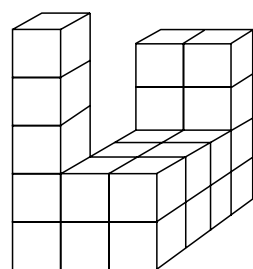
- (A) (B) (C) (D)

- (C) 7. 下列何者為右圖之展開圖？



- (A) (B) (C) (D)

- (C) 8. 如右圖，共若干個正立方體積木所堆成，若小積木每邊長 1 公分，請問：圖形的「全部表面積」為多少平方公分？



- (A) 50
 (B) 62
 (C) 70
 (D) 72

8. $(13 \times 2) + (13 \times 2) + (9 \times 2) = 70 (cm^2)$

第 16 單元

垂直、平分與平行

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆☆

191

Try! Try! 說謎解思

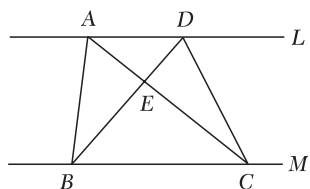
● 數學健康知多少？測驗就知道！

- (X) 1. 若有兩圖形的角度相同、對應線段成比例即為線對稱圖形。
💡 線對稱圖形係指圖形沿對稱軸摺疊兩邊會完全疊合在一起
- (X) 2. 一條直線可以有無限條的中垂線。
💡 直線可無限延伸，所以沒有中垂線
- (O) 3. 線對稱圖形在對稱軸的兩側必可找到對稱點。
💡 對稱軸兩側必有對應的兩點
- (X) 4. 等腰三角形、箏形、平行四邊形、矩形皆為線對稱圖形。
💡 平行四邊形非線對稱圖形
- (X) 5. 若要將一線段分成兩線段，使其長度比為 11 : 5，則至少需作中垂線 8 次。
💡 $(11 + 5) = 16 = 2^4$ ，需作 4 次
- (X) 6. 同位角相等、內錯角相等、對頂角相等皆能用來判斷兩線段平行。
💡 對頂角相等無法判斷兩線段平行
- (X) 7. 兩平行線的一組同側內角平分線必互相平行。
💡 同側內角的平分線必互相垂直
- (X) 8. 如下圖(一)，若 $L \parallel M$ ，則 $\triangle ABE$ 面積 : $\triangle AED$ 面積 = $\overline{BE}^2 : \overline{ED}^2$ 。
💡 $\triangle ABE$ 與 $\triangle AED$ 同高不同底，故 $\triangle ABE$ 面積 : $\triangle AED$ 面積 = $\overline{BE} : \overline{ED}$
- (O) 9. 尺規作圖中，過直線外一點，僅能作一直線垂直於此直線。
💡 過直線外一點，恰有一直線垂直於此直線
- (X) 10. 如下圖(二)，依其作圖痕跡判斷， L 為 \overline{AB} 的中垂線。
💡 L 不一定是 \overline{AB} 之中垂線，但一定是 \overline{AB} 之垂線

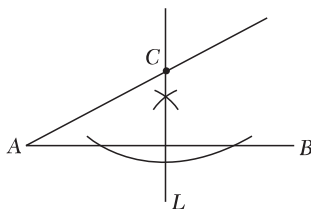
能力一

能力二

能力三



圖(一)



圖(二)

數學

健康狀況檢核表

※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 垂直、平分與線對稱圖形

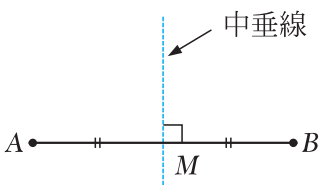
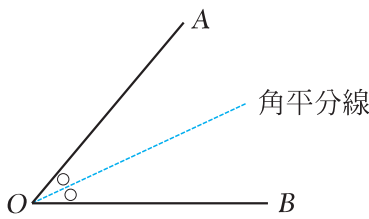
一 點、直線與平面

點	點是幾何最基本圖形，沒有形狀、大小，只是用來表示物體所在的位置。
直線	相異兩點，恰決定一直線。
平面	不在同一直線上的相異三點，恰決定一平面。

二 垂直

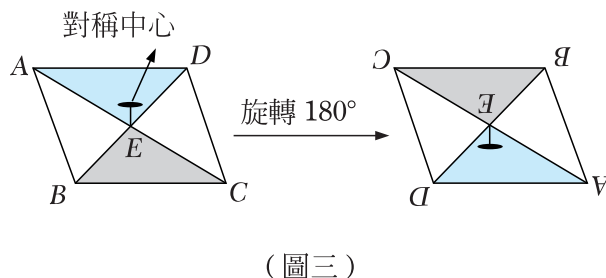
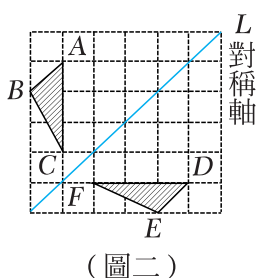
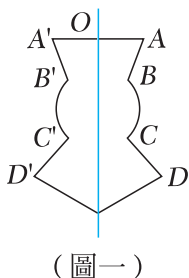
兩條直線或線段相交，其所成的夾角為直角（ 90° ）時，則稱這兩條直線或線段互相垂直，而其交點稱為「垂足」。

三 平分

垂直平分線（中垂線）	角平分線
<p>在平面上，過一線段的中點，且垂直於這一線段的直線，稱做這個線段的中垂線。若要將一線段2^n等分，線段中點作圖需作$(2^n - 1)$次。</p>	<p>將一角平分為兩等角的直線，稱為角平分線或分角線。將一角分為2^n等分，需作角平分線$(2^n - 1)$次。</p>
	

四 線對稱圖形與點對稱圖形

1. 如果一個圖形沿著某一條直線對摺後，**摺線兩邊的圖形會完全疊合在一起**，我們就稱這個圖形為**線對稱圖形**，而摺線就是**對稱軸**（如下圖一）。
2. 當兩個圖形對於一條直線成對稱時，可稱其中一個圖形是另一個圖形相對於此直線的**鏡射圖形**，而此直線正是這兩個鏡射圖形的**對稱軸**（如下圖二）。
3. 在平面上，如果一個圖形能找到一點為中心，**繞此點旋轉 180° 後能和原圖形完全重合**，那麼就稱它為**點對稱圖形**，旋轉中心點稱做**對稱中心**（如下圖三）。
4. 點對稱圖形中，對稱中心**平分**兩對稱點的連線段。



五 線對稱與點對稱圖形的簡易判別

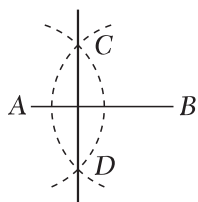
1. 凡是正 n 邊形皆為線對稱圖形。
2. 凡是平行四邊形（包括正方形、矩形及菱形等）皆為點對稱圖形。
3. 正 n 邊形中，若 n 為偶數則為點對稱圖形；若 n 為奇數則非點對稱圖形。

師說 1

〈垂直與平分〉

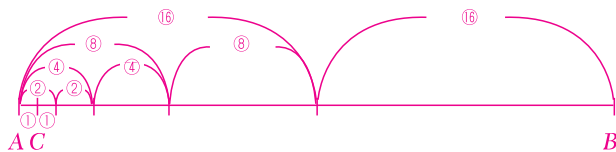
演練 1

1. 如圖，以 A 點為圓心， a 為半徑畫一弧，然後，以 B 點為圓心， b 為半徑畫一弧（設 $a \neq b$ ），若此弧交於 C 、 D 二點，請問： \overline{CD} 與 \overline{AB} 的關係為何？
2. 若將已知線段分成兩段，且比例為 $1:31$ ，請問：最少要做幾次（條）中垂線？

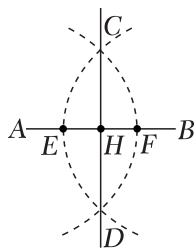


解

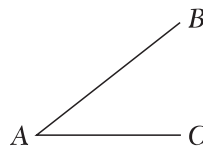
1. \because 半徑 $a \neq b \therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$ 但 \overline{CD} 不平分 \overline{AB}
2. $\because \overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 31$
 $\therefore (1 + 31) = 32 = 2^5$,
 需最少做 5 次（條）中垂線



1. 下圖(一)是利用尺規作圖繪製 \overline{AB} 之中垂線，請問：哪些線段的長度等於 \overline{AC} 呢？
2. 下圖(二) $\angle CAB$ ，若要將其平分為八等分，至少要做幾次（條）角平分線呢？



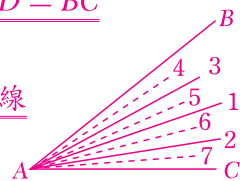
圖(一)



圖(二)

解

1. $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AF} = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{BC}$
2. 8 等分 = 2^3 等分
 \Rightarrow 作 $2^3 - 1 = 7$ 次角平分線

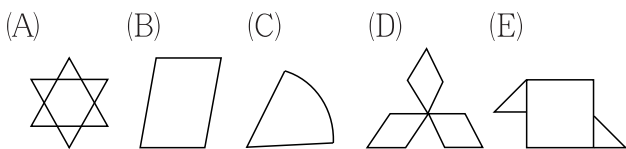


師說 2

〈對稱圖形〉

演練 2

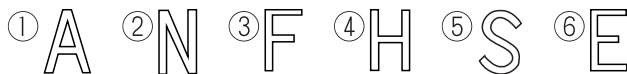
下列的圖形中，哪些是線對稱的圖形呢？哪些是點對稱的圖形呢？



解

- 線對稱圖形：(A)、(C)、(D)
 點對稱圖形：(A)、(B)

請選出下列圖形中同時具有線對稱性質與點對稱性質的圖形？



解

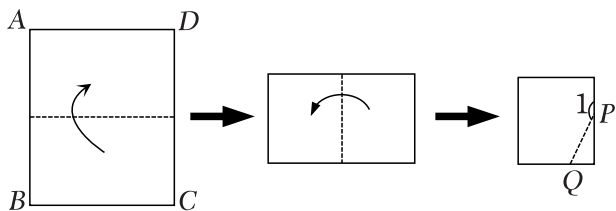
- 線對稱圖形：①、④、⑥
 點對稱圖形：②、④、⑤
 同時具有兩項性質的是④

師說 3

〈圖形的摺疊與角度〉

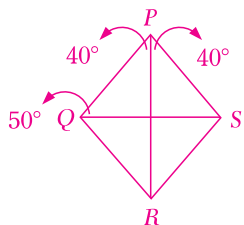
演練 3

秀蓮要在矩形 $ABCD$ 內部正中央剪出一個一內角為 80° 的菱形，她將 $ABCD$ 先上下對摺，再左右對摺，如下圖所示，然後在右下角沿著 PQ 剪下，則 $\angle 1$ 可為多少度？

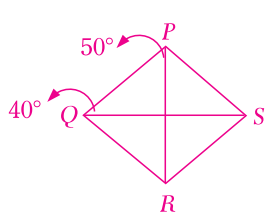


解

(1) $\angle 1 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

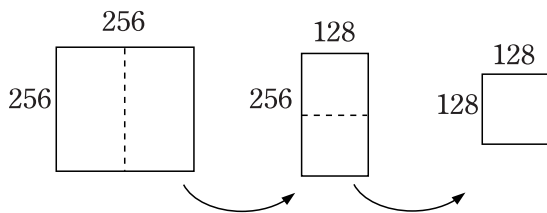


(2) $\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$



$\therefore \angle 1$ 可為 140° 或 130°

假設有一張長 4 公分、寬 4 公分的紙，對摺一次後變成長 4 公分、寬 2 公分，對摺兩次後變成長 2 公分、寬 2 公分，對摺三次後變成長 2 公分、寬 1 公分，對摺四次後變成長 1 公分、寬 1 公分。若有一張紙長 256 公分、寬 256 公分，請問：此張紙要對摺幾次才會變成長 1 公分、寬 1 公分的正方形呢？



解

$\because 256 = 2^8 \Rightarrow 256 \times 256 = 2^8 \times 2^8$
 $\therefore 8 + 8 = \underline{16}$ (次)

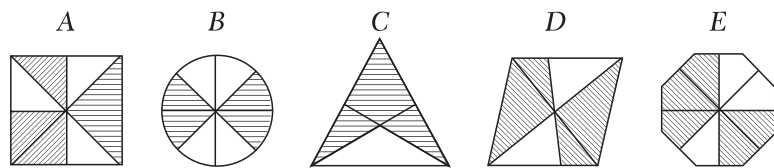
同步評量 1

(D) 1. 下列何者為點對稱圖形？

- (A) 正三角形 (B) 等腰直角三角形 (C) 梯形 (D) 平行四邊形

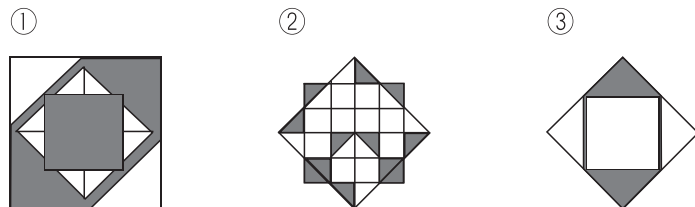
1. 具有對稱點之圖形，稱為點對稱圖形，故凡是平行四邊形皆為點對稱圖形

(B) 2. 下面的圖形何者是線對稱圖形呢？



- (A) A、B (B) B、C (C) C、D (D) D、E

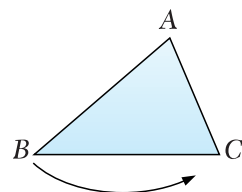
(D) 3. 下面的圖形中，各有幾條線對稱軸呢？



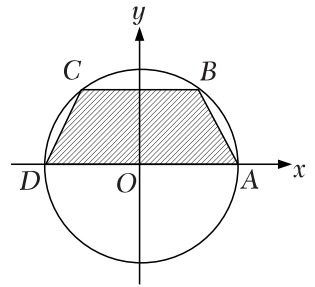
- (A) (4, 1, 2) (B) (2, 1, 4) (C) (4, 2, 0) (D) (2, 0, 2)

(B) 4. 如右圖，求 $\triangle ABC$ 中，將 B 點摺疊到 C 點，再展開，而得到一條摺線 L ，請問： L 是下列何者呢？

- (A) \overline{BC} 的高 (B) \overline{BC} 的中垂線
 (C) $\angle BAC$ 的角平分線 (D) \overline{BC} 的中線



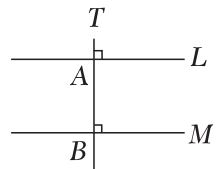
- (C) 5. 如右圖，梯形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，若 A 點坐標為 $(5, 0)$ ， C 點坐標為 $(-3, 4)$ ，請問： $\overline{BC} = ?$
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
5. $\because \overline{BC} \parallel x$ 軸，且 y 軸為 \overline{BC} 、 \overline{AD} 中垂線，
 $\therefore B$ 點坐標 $(3, 4)$ ，則 $\overline{BC} = |-3 - 3| = 6$



能力二 平行線的性質與判別

一 平行線的意義

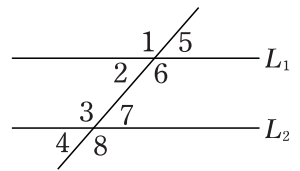
係指在同一平面上，如果兩條直線同時垂直於另一直線，則稱這兩條直線為平行線。如右圖， L 、 M 、 T 是同一平面上的三條直線， $L \perp T$ 、 $M \perp T$ ，則 L 與 M 為兩平行線，記為 $L \parallel M$ 。



二 平行線與截角

在同一平面上，若兩平行線被一直線所截，則會形成：

- 同位角相等： $\angle 1 = \angle 3$ 、 $\angle 5 = \angle 7$ 、 $\angle 2 = \angle 4$ 、 $\angle 6 = \angle 8$ 。
- 內錯角相等： $\angle 2 = \angle 7$ 、 $\angle 3 = \angle 6$ 。
- 同側內角互補： $\angle 2 + \angle 3 = \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$ 。



三 兩平行線被一直線所截，則有下列情形

1. 一組同位角的平分線必互相 平行	2. 一組內錯角的平分線必互相 平行	3. 一組同側內角的平分線必互相 垂直

四 兩平行線之間的距離處處相等 (以三角形的面積為例)

1. $L \parallel M$ ，同底等高	2. $L \parallel M$ ，等底等高 ($\overline{BC} = \overline{CD}$)	3. $L \parallel M$ ，等底等高 ($\overline{BC} = \overline{BG} + \overline{GH} + \overline{HC}$)
$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle DBC$ 面積 $\triangle ABO$ 面積 = $\triangle CDO$ 面積	$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle ACD$ 面積	$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle DBG$ 面積 + $\triangle EGH$ 面積 + $\triangle FHC$ 面積

五 在一平面上，若有兩角的兩邊互相平行，則有下列情形出現

1. 相等： $\angle 1 = \angle 2$		2. 互補： $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
(1)	(2)	(1)
(3)	(4)	(2)

六 平行線的應用

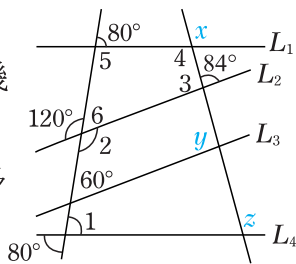
1. 若 $L_1 // L_2$ ，則 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	2. 若 $L_1 // L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$
3. 若 $L_1 // L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$	4. 若 $L_1 // L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 540^\circ$

師說 4

〈平行線的判別〉

演練 4

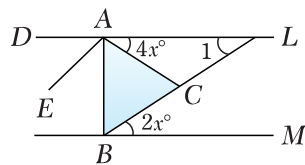
如圖，有四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 ，請問：哪幾條互相平行呢？又 $\angle x, \angle y, \angle z$ 的度數分別是多少呢？



解

- (1) $\because \angle 1 = 80^\circ \therefore L_1 // L_4$ (同位角相等)
 $\because \angle 2 + 60^\circ = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ ，
 $\therefore L_2 // L_3$ (同側內角互補)
- (2) $\angle 3 = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ = \angle y$ ，
 $\angle 5 = 100^\circ, \angle 6 = 60^\circ$ ，
 $\angle 4 = 360^\circ - 96^\circ - 100^\circ - 60^\circ$
 $= 104^\circ = \angle x = \angle z$

如圖， $L // M$ ， $\triangle ABC$ 為正三角形，且 \overline{AE} 平分 $\angle BAD$ ，請問： \overline{AE} 是否平行 \overline{BC} 呢？ $\angle 1$ 的度數為何呢？



解

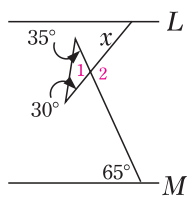
- (1) $\because L // M, \therefore \angle ACB = 4x^\circ + 2x^\circ, 60^\circ = 4x^\circ + 2x^\circ, x^\circ = 10^\circ$
 $\Rightarrow \angle BAD = 180^\circ - 60^\circ - (4 \times 10^\circ) = 80^\circ$
 $\therefore \overline{AE}$ 平分 $\angle BAD$
 $\therefore \angle EAB = 80^\circ \div 2 = 40^\circ$
 $\therefore \angle EAB \neq \angle ABC$ ，故不平行
- (2) $\angle 1 = 2x^\circ = 20^\circ$

師說 5

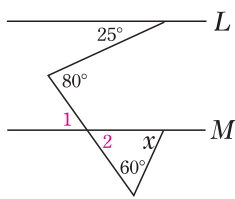
〈平行線間的角度關係〉

演練 5

如下圖(一)、(二)，當 $L \parallel M$ 時，請求出 $\angle x$ 的度數為何呢？



圖(一)

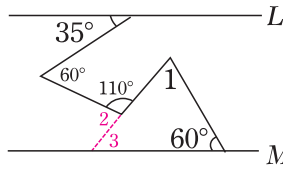


圖(二)

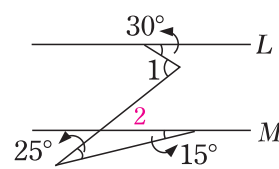
解

- (1) $\because \angle 2 = \angle 1 = 180^\circ - 35^\circ - 30^\circ = 115^\circ$
 $\Rightarrow 65^\circ + \angle x = 115^\circ \therefore \underline{\angle x = 50^\circ}$
- (2) $\because L \parallel M \therefore 25^\circ + \angle 1 = 80^\circ, \angle 1 = 55^\circ$
 $\Rightarrow \angle 2 = \angle 1 = 55^\circ,$
 $\angle x = 180^\circ - 60^\circ - \angle 2 = \underline{65^\circ}$

如下圖(一)、(二)，當 $L \parallel M$ 時，請求出 $\angle 1$ 的度數為何呢？



圖(一)



圖(二)

解

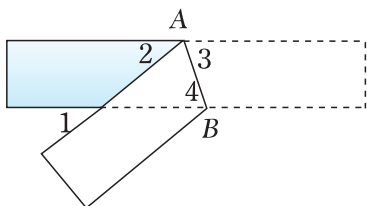
- (1) $\angle 2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ,$
 $35^\circ + \angle 2 = 60^\circ + \angle 3,$
 $35^\circ + 70^\circ = 60^\circ + \angle 3 \Rightarrow \angle 3 = 45^\circ,$
 $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3 - 60^\circ$
 $= 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = \underline{75^\circ}$
- (2) $\angle 2 = 15^\circ + 25^\circ = 40^\circ$
 $\angle 1 = 30^\circ + \angle 2 = 30^\circ + 40^\circ = \underline{70^\circ}$

師說 6

〈平行線的應用〉

演練 6

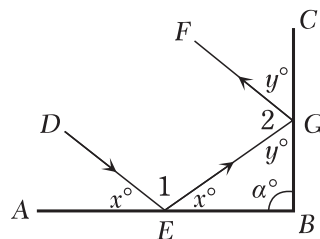
如圖，將長方形紙條沿 \overline{AB} 摺疊，若 $\angle 1 = 30^\circ$ ，請問： $\angle 4$ 的度數為何呢？



解

- $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ (同位角相等)，
 $\angle 3 = \angle 4 = (180^\circ - \angle 2) \div 2$
 $= (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = \underline{75^\circ}$

如圖， \overline{AB} 與 \overline{BC} 是兩面呈現 α° 的鏡子，已知 \overline{DE} 光線射向 \overline{AB} 面的鏡子，經過兩次反射之後，入射光線 \overline{DE} 與反射光線 \overline{FG} 平行，請問： α° 是多少？

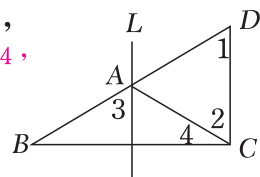


解

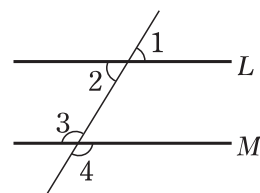
- \because 入射角 = 反射角，且 $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \angle 1 + 2x^\circ = 180^\circ,$
 $\angle 2 + 2y^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle 1 + 2x^\circ + \angle 2 + 2y^\circ = 360^\circ,$
 $2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ, x^\circ + y^\circ = 90^\circ$
 $\therefore \alpha^\circ = 180^\circ - 90^\circ = \underline{90^\circ}$

同步評量 2

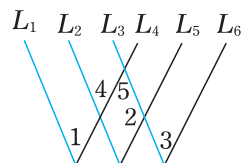
- (D) 1. 如右圖， \overline{BC} 的垂直平分線 L 交 \overline{BD} 於 A ， $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，則下列敘述何者錯誤呢？
- (A) $\angle 3 + \angle B = \angle 2 + \angle 4$ (B) $\angle 2 = \angle 3$
 (C) $\angle 1 = \angle 2$ (D) $\angle 1 = \angle 4$



- (B) 2. 如右圖，下列有關平行線的敘述，何者正確？
- (A) 若 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，可知 $L \parallel M$
 (B) 若 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$ ，可知 $L \parallel M$
 (C) 若 $\angle 1 = \angle 4$ ，可知 $L \parallel M$ 2. $\because \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ,$
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow L \parallel M$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ \Rightarrow L \parallel M$
 (D) 若 $\angle 2 = \angle 4$ ，可知 $L \parallel M$

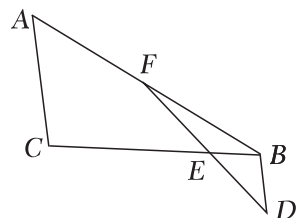


- (C) 3. 如右圖， $L_1 // L_2 // L_3$ ， $L_4 // L_5 // L_6$ ，已知 $\angle 1 = 52^\circ$ ，請問：
 $\angle 2 - \angle 3 = ?$
 (A) 84° (B) 80°
 (C) 76° (D) 72°



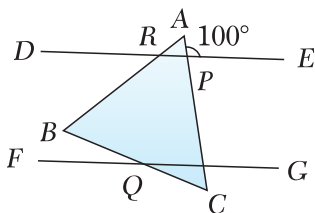
3. $\therefore \angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 3$ ，
 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 5 = 128^\circ$ ，
 $\angle 2 - \angle 3 = 128^\circ - 52^\circ = 76^\circ$

- (A) 4. 如右圖， $\overline{AC} // \overline{BD}$ ， $\angle BDF = 45^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ACB = 100^\circ$ ，請問： $\angle BFE = ?$
 (A) 15° (B) 25°
 (C) 35° (D) 45°



4. $\therefore \overline{AC} // \overline{BD}$
 $\therefore \angle BAC + \angle ABD = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD = 120^\circ$
 $\triangle BFD$ 中， $\angle BEF + 120^\circ + 45^\circ = 180^\circ$
 $\therefore \angle BFE = 15^\circ$

- (B) 5. 如右圖， $\overline{DE} // \overline{FG}$ ，若 $\triangle ABC$ 為正三角形，且 $\angle APE = 100^\circ$ ，請問： $\angle BQF = ?$
 (A) 15° (B) 20°
 (C) 25° (D) 30°



5. $\angle ARP + \angle A = 100^\circ$ ，
 $\angle ARP = 40^\circ = \angle DRB$ ，
 $\angle DRB + \angle BQF = \angle RBQ$ ，
 $40^\circ + \angle BQF = 60^\circ$ ， $\angle BQF = 20^\circ$

能力 尺規作圖

尺規作圖：運用直尺（沒有刻度）、圓規繪製幾何圖形稱為尺規作圖。

尺規作圖的七大方法

等線段作圖	等角作圖	中垂線作圖	角平分線作圖	直線上一點 作垂線	直線外一點 作垂線	直線外一點 作平行線
-------	------	-------	--------	--------------	--------------	---------------

師說 7 <等線段作圖／等角作圖>

演練 7

已知：兩線段 a 、 b （如圖）

求作：作一線段，使其長等於 $a - b$

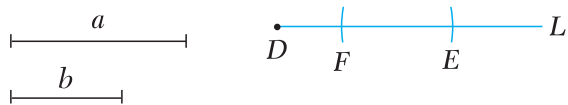
作法：(a) 以 D 為圓心， a 為半徑向右畫弧，交 L 於 E 點。

(b) 畫一直線 L ，並在 L 上任意取一點 D 點。

(c) 以 E 為圓心， b 為半徑向左畫弧，交 L 於 F 點。

(d) 則 \overline{DF} 即為所求。

請將上面作法按照作圖順序排列出來。



解

(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)

如圖，請利用等角作圖方式，在 \overline{BC} 上找一點 P ，使得 $\angle PAB = \angle PBA$ 。

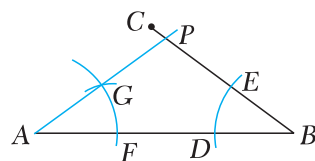
作法：(a) 連接 \overline{AG} 並延長，交 \overline{BC} 於 P 點，則 $\angle PAB = \angle PBA$ 。

(b) 以 A 點為圓心， \overline{BD} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 F 點。

(c) 以 F 為圓心， \overline{DE} 為半徑畫弧，交前弧於 G 點。

(d) 以 B 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\angle B$ 的兩邊於 D 、 E 兩點。

請將作法按照作圖順序排列出來。



解

(d) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)

師說 8

〈中垂線作圖／角平分線作圖〉

演練 8

如圖，已知 $\triangle ABC$ ，請在 \overline{BC} 上找一點 M ，使得 $\triangle ABM$ 與 $\triangle ACM$ 的面積相等。

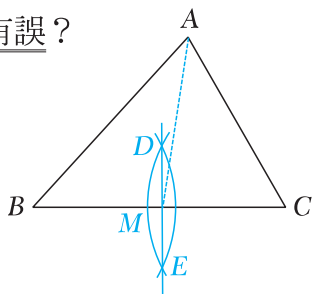
作法：(a)分別以 B 、 C 兩點為圓心。

(b)適當長為半徑畫弧。

(c)此兩弧交於 D 、 E 兩點。

(d)連接 \overline{DE} 交 \overline{BC} 於 M ，即為所求。

上述作法哪一個步驟有誤？



解

(b)有誤，應為「以大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 長為半徑畫弧。」

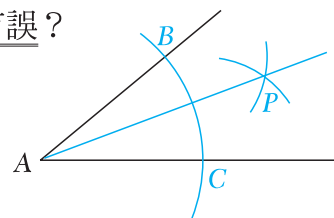
如圖，已知 $\angle A$ ，求作 $\angle A$ 的角平分線。

作法：(a)以 A 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 為半徑畫弧，交 $\angle A$ 的兩邊於 B 、 C 兩點。

(b)分別以 B 、 C 為圓心，適當長為半徑畫弧，兩弧交於 P 點。

(c)連接 P 、 A 兩點， \overline{PA} 即為所求。

上述作法哪些步驟有誤？



解

(a)有誤，應以 A 為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\angle A$ 的兩邊於 B 、 C 兩點

(b)有誤，應分別以 B 、 C 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 為半徑畫弧，兩弧交於 P 點

師說 9

〈過直線上一點作垂線／過直線外一點作垂線〉

演練 9

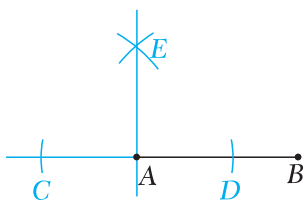
如圖，已知 \overline{AB} ，求作過 A 點且垂直於 \overline{AB} 之垂線。

(a)向___側延長 \overline{AB} 。

(b)以___點為圓心，___長為半徑畫弧，交直線於___、___兩點。

(c)分別以 C 、 D 為圓心，以___的長為半徑畫弧，兩弧交於___點。

(d)連接___、___兩點，則 \overline{EA} 即為所求。



解

(a)左

(b) A 、適當、 C 、 D

(c)大於 $\frac{1}{2}\overline{CD}$ 、 E

(d) E 、 A

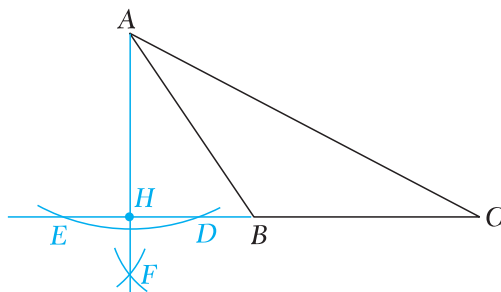
如圖，求作 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的高。

(a)向左側延長___。

(b)以 A 為圓心，___ A 到 \overline{BC} 延長線的垂直距離為半徑畫弧，交於___、___兩點。

(c)分別以 D 、 E 兩點為圓心，大於___的長為半徑畫弧，兩弧交於___點。

(d)連接___、___兩點，且交於 \overline{BC} 延長線於___點，則 \overline{AH} 即為所求。



解

(a) \overline{BC}

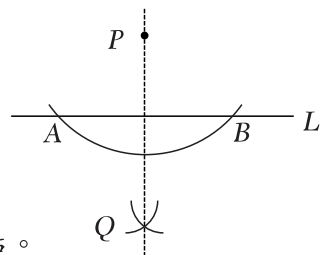
(b)大於、 D 、 E

(c) $\frac{1}{2}\overline{DE}$ 、 F

(d) A 、 F 、 H

同步評量 3

(D) 1. 如右圖，以尺規作圖， P 點為直線 L 外的一點，若要畫一直線通過 P 點，且與 L 垂直，以下是作圖的步驟，請依照順序排列出來。



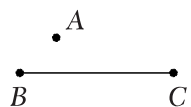
甲：作 \overleftrightarrow{PQ} ，即為所求的直線。

乙：以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 L 於 A 、 B 兩點。

丙：分別以 A 、 B 為圓心，大於 \overline{AB} 的 $\frac{1}{2}$ 為半徑畫弧，兩弧交於 Q 點。

- (A) 乙 → 甲 → 丙 (B) 甲 → 乙 → 丙 (C) 丙 → 乙 → 甲 (D) 乙 → 丙 → 甲

(A) 2. 如右圖，已知一點 A 及一線段 \overline{BC} ，請在 \overline{BC} 上找出一點 D ，使得 $\overline{BD} = \overline{AB}$ ，則下列作圖何者正確呢？



- (A) (B) (C) (D)

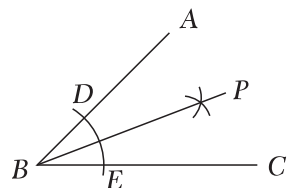
(C) 3. 如右圖，已知 $\angle ABC$ ，要作其角平分線，其步驟如下所示：

甲：以 B 點為圓心，以 x 為半徑畫弧，交 \overline{BA} 、 \overline{BC} 於 D 、 E 兩點。

乙：分別以 D 、 E 兩點為圓心，以 y 為半徑畫弧，設兩弧交於 P 點。

丙：連接 \overleftrightarrow{BP} ，則 \overleftrightarrow{BP} 即為所求。

下列有關 x 、 y 的敘述何者正確？

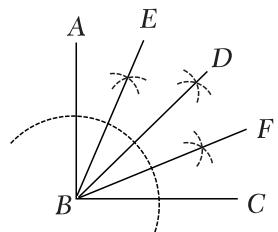


- (A) x 、 y 均有最短的限制
 (B) x 、 y 均無長度限制
 (C) x 無長度限制、 y 需有最短的限制
 (D) x 需有最短的限制、 y 無長度限制

(B) 4. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，求 $\angle EBF = ?$

- (A) 35°
 (B) 45°
 (C) 55°
 (D) 65°

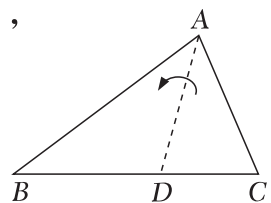
$$4. \angle EBF = \frac{1}{2} (\angle CBD + \angle ABD) = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$



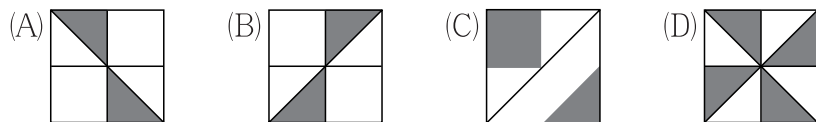
基本觀念題

(C) 1. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，摺疊使 \overline{AC} 、 \overline{AB} 在同一直線上，再展開，得到一條摺痕 \overline{AD} ，則 \overline{AD} 為何？

- (A) \overline{BC} 的高 (B) \overline{BC} 的中垂線
 (C) $\angle A$ 的角平分線 (D) $\angle A$ 的對角線



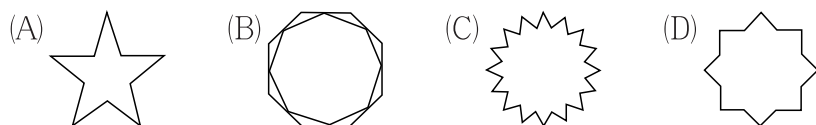
(C) 2. 下列何者是線對稱圖形？



(D) 3. 下列何者不是線對稱圖形？

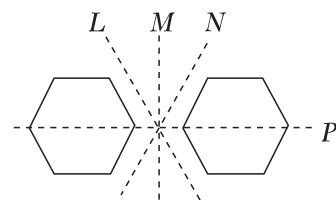


(C) 4. 下列何者的對稱軸有 16 條？

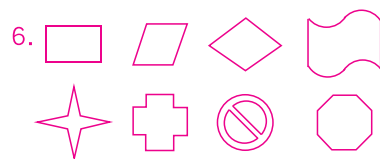
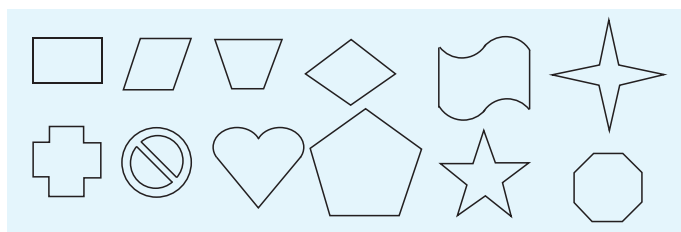


(D) 5. 如右圖，兩個正六邊形互為鏡射圖形，則其對稱軸是圖中哪一條虛線呢？

- (A) P (B) L
(C) N (D) M



(B) 6. 下列 12 個圖形中，點對稱的圖形有幾個呢？



- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

(D) 7. 有一個線對稱圖形， A 、 B 兩點是對稱點， C 、 D 兩點也是對稱點。

甲說： \overline{AB} 平行於 \overline{CD}

乙說： \overline{AB} 垂直於對稱軸

丙說： \overline{AC} 和 \overline{BD} 的長度相等

丁說：對稱軸會經過 \overline{AB} 的中點，也會經過 \overline{CD} 的中點

請問：誰的說法是正確的？

- (A) 只有甲、乙的說法正確 (B) 只有甲、丁的說法正確
(C) 只有甲的說法正確 (D) 四個人的說法都正確

(A) 8. 下列是四個等腰三角形的頂角，哪一種等腰三角形無法用旋轉方式來拼出正多邊形呢？

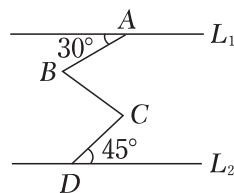
- (A) 35° (B) 40° (C) 60° (D) 90°

8. 只有 35° 無法整除 360°

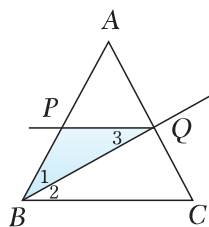
(B) 9. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle BCD - \angle ABC = ?$

- (A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 25°

9. $\because L_1 \parallel L_2 \therefore 30^\circ + \angle BCD = \angle ABC + 45^\circ$,
 $\angle BCD - \angle ABC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

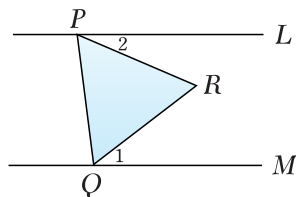


- (D) 10. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，請問：下列敘述何者錯誤呢？



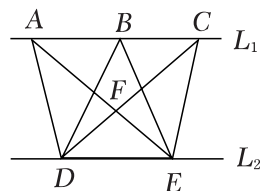
- (A) $\overline{BP} = \overline{PQ}$
 (B) $\overline{PQ} = \overline{CQ}$
 (C) $\overline{AP} = \overline{AQ}$
 (D) $\overline{BP} = \overline{AQ}$
10. (A) $\because \angle 1 = \angle 3 \therefore \overline{BP} = \overline{PQ}$
 (B) $\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC} \therefore \overline{BP} = \overline{CQ} = \overline{PQ}$
 (C) $\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC} \therefore \overline{AP} = \overline{AQ}$
 (D) 條件不足，無法推得

- (A) 11. 如右圖， $L \parallel M$ ， $\triangle PQR$ 為正三角形，請問： $\angle 1 + \angle 2 = ?$



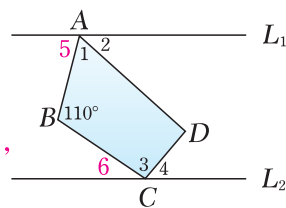
- (A) 60°
 (B) 65°
 (C) 70°
 (D) 75°
11. $\angle 1 + \angle 2 = \angle PRQ = 60^\circ$

- (A) 12. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， \overline{AE} 交 \overline{CD} 於F點， $\triangle ADF$ ， $\triangle BDE$ ， $\triangle DEF$ 與 $\triangle CFE$ 的面積分別為a、b、c與d，請問：下列敘述何者錯誤？



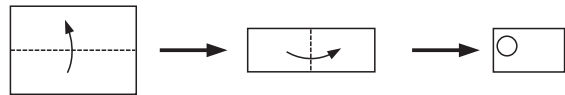
- (A) $a = b$
 (B) $a = d$
 (C) $b = a + c$
 (D) $b = c + d$
12. (A) 不成立
 (B) $\because a + c = c + d \Rightarrow a = d$
 (C) $\triangle BDE$ 與 $\triangle ADF$ 同底等高
 (D) $\triangle BDE$ 與 $\triangle CDE$ 同底等高

- (C) 13. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，點A在 L_1 上，點C在 L_2 上， $\angle ABC = 110^\circ$ 。若 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，請問： $\angle ADC = ?$



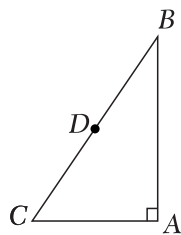
- (A) 115°
 (B) 120°
 (C) 125°
 (D) 130°
13. $\because \angle 5 + \angle 6 = 110^\circ$ ， $\angle 5 = 180^\circ - 2\angle 1$ ，
 $\angle 6 = 180^\circ - 2\angle 3 \Rightarrow 360^\circ - 2(\angle 1 + \angle 3) = 110^\circ$ ，
 $\angle 1 + \angle 3 = 125^\circ$ ，
 又 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle ADC = 125^\circ$

- (B) 14. 如下圖，一張長方形的紙，由下往上對折，再由左往右對折，最後於左上角剪了一個小洞，請問：何圖為這張紙展開的樣子？



- (A) (B) (C) (D)

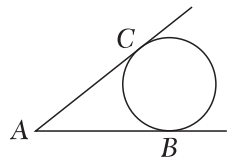
- (A) 15. 如右圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形，已知： $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ，D點為 \overline{BC} 的中點。求作：在 \overline{AB} 上取一點E，使得 $\overline{DE} \parallel \overline{CA}$ 。則下列的做法何者是正確的呢？



- (A) 取 \overline{AB} 中點E，連接 \overline{DE}
 (B) 以B點為圓心， \overline{BD} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於E點，連接 \overline{DE}
 (C) 作 $\angle C$ 之角平分線交 \overline{AB} 於E點，連接 \overline{DE}
 (D) 過D點作一直線垂直 \overline{BC} ，交 \overline{AB} 於E點，連接 \overline{DE}



(C) 1. 如右圖， $\angle A$ 的兩邊分別與圓相切於 B 、 C 兩點。以下是甲、乙兩人找出圓心的作法：



甲：(1) 過 B 點作一直線 L 垂直直線 \overline{AB} 。

(2) 連接 \overline{BC} ，作 \overline{BC} 中垂線交 L 於 O 點， O 點即為所求。

乙：(1) 作 $\angle A$ 的平分線 L 。

(2) 以 A 為圓心， \overline{AB} 長為半徑畫弧交 L 於 O 點， O 點即為所求。

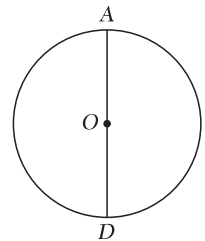
對於兩人的做法，下列哪一個判斷是正確的？

1. \therefore 過切點垂直切線的直線和弦的中垂線皆會通過圓心
 \therefore 甲是對的！
 $\therefore OA > AB$ ($\triangle OAB$ 為直角 \triangle)
 \therefore 乙是錯的！

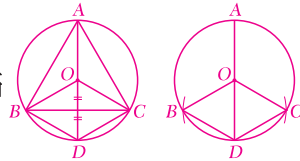
- (A) 兩人都正確 (B) 兩人都錯誤
 (C) 甲正確，乙錯誤 (D) 甲錯誤，乙正確

97 基測二

(A) 2. 如右圖， \overline{AD} 為圓 O 的直徑。甲、乙兩人想在圓上找 B 、 C 兩點，作一個正三角形 ABC ，其作法如下：



甲：(1) 作 \overline{OD} 中垂線，交圓於 B 、 C 兩點



(2) 連 \overline{AB} 、 \overline{AC} ， $\triangle ABC$ 即為所求。

乙：(1) 以 D 為圓心， \overline{OD} 長為半徑畫弧，交圓於 B 、 C 兩點

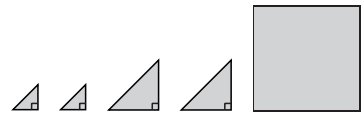
(2) 連 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} ， $\triangle ABC$ 即為所求。

對於甲、乙兩人的作法，下列判斷何者正確？

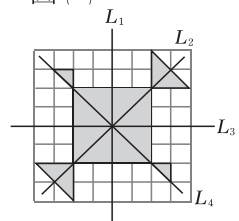
- (A) 甲、乙皆正確
 (B) 甲、乙皆錯誤
 (C) 甲正確、乙錯誤
 (D) 甲錯誤、乙正確
2. 甲：(1) $\therefore \overline{BC}$ 為 \overline{OD} 之中垂線， $\therefore \overline{BO} = \overline{BD}$ ， $\overline{CO} = \overline{CD}$ ，又 $\overline{OB} = \overline{OC}$ (半徑相等) = \overline{OD} $\therefore \triangle OBD$ 、 $\triangle OCD$ 皆為正三角形
 (2) $\therefore \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ \dots \textcircled{1}$ ，又 \overline{AD} 為 \overline{BC} 之中垂線， $\therefore \overline{AB} = \overline{AC} \dots \textcircled{2}$ ，由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2} \Rightarrow \triangle ABC$ 為正三角形
 乙：(1) \therefore 以 D 為圓心， \overline{OD} 為半徑畫弧交圓於 B 、 C ， $\therefore \overline{BD} = \overline{DO} = \overline{DC}$ 又 $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ (半徑相等)， $\therefore \triangle OBD$ 、 $\triangle OCD$ 皆為正三角形
 (2) $\therefore \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ \dots \textcircled{1}$ ，又 \overline{AD} 為 \overline{BC} 之中垂線， $\therefore \overline{AB} = \overline{AC} \dots \textcircled{2}$ ，由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2} \Rightarrow \triangle ABC$ 為正三角形

97 基測一

(B) 3. 如圖(一)，兩種大小不同的等腰直角三角形紙板各兩個和正方形紙板一個。將圖(一)所有的紙板放到方格紙上拼成一個對稱圖形，如圖(二)所示，則下列哪一條直線是圖(二)對稱軸？



圖(一)

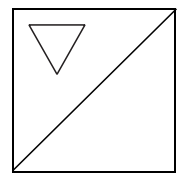


圖(二)

- (A) L_1
 (B) L_2
 (C) L_3
 (D) L_4

96 基測二

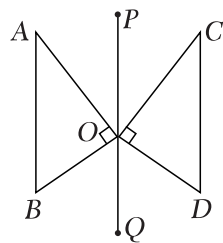
(C) 4. 右圖是小方畫的正方形風箏圖案，且他以圖中的對角線為對稱軸，在對角線的下方畫一個三角形，使得新的風箏圖案成為一對稱圖形。若下列有一圖形為此對稱圖形，則此圖為何？



- (A) (B) (C) (D)

96 基測一

- (D) 5. 右圖為一線對稱圖形，直線 PQ 為對稱軸， A 、 B 的對稱點分別為 C 、 D 。若 $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle B > \angle A$ ，且 $\angle BOQ > \angle AOP$ ，則關於 D 點的位置，下列敘述何者正確？



94 基測二

- (A) A 、 O 、 D 三點在同一直線上，且 $\overline{OD} = \overline{OA}$
 (B) A 、 O 、 D 三點在同一直線上，且 $\overline{OD} = \overline{OB}$
 (C) PQ 為 $\angle BOD$ 的平分線，且 $\overline{OD} = \overline{OA}$
 (D) PQ 為 $\angle BOD$ 的平分線，且 $\overline{OD} = \overline{OB}$

5. $\because PQ$ 為對稱軸 $\therefore \overline{OD} = \overline{OB}$ ，且 $\angle BOQ = \angle DOQ$
 $\Rightarrow PQ$ 為 $\angle BOD$ 之平分線，又 $\angle BOQ > \angle AOP$
 $\therefore \angle BOQ > 45^\circ \Rightarrow \angle BOQ + \angle DOQ + 90^\circ > 180^\circ$
 所以 A 、 O 、 D 三角不在同一直線上，故選(D)



- (A) 1. 下列對稱圖形中，對稱軸最少的圖形是下列何者？

- (A) 長方形 (B) 正五邊形 (C) 正三角形 (D) 正方形

- (D) 2. 在同一平面上，一角的兩邊分別平行於另一角之兩邊，則此兩角角度的關係為下列何者呢？

- (A) 相等 (B) 互補或互餘 (C) 相等或互餘 (D) 相等或互補

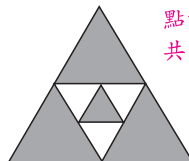
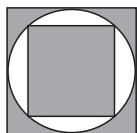
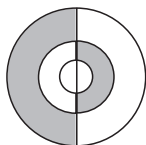
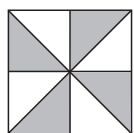
- (A) 3. 如下圖，請問：線對稱圖形的個數與點對稱圖形的個數的差為多少呢？

①

②

③

④



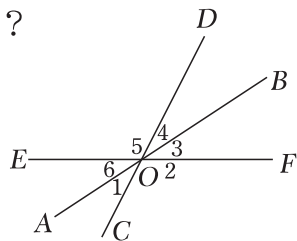
3. 線對稱圖形：②、③、④
 點對稱圖形：①、③
 共 $3 - 2 = 1$ (個)

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- (C) 4. 如右圖，請問：有三條直線相交於 O 點，共有幾組對頂角呢？

- (A) 2
 (B) 4
 (C) 6
 (D) 8

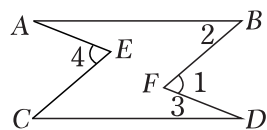
4. $\angle 1$ 與 $\angle 4$ ， $\angle 1 + \angle 6$ 與 $\angle 4 + \angle 3$ ，
 $\angle 2$ 與 $\angle 5$ ， $\angle 2 + \angle 3$ 與 $\angle 5 + \angle 6$ ，
 $\angle 3$ 與 $\angle 6$ ， $\angle 1 + \angle 2$ 與 $\angle 4 + \angle 5$ ，
 共 6 組



- (B) 5. 如右圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AE} \parallel \overline{FD}$ ， $\overline{CE} \parallel \overline{FB}$ ， $\angle 2 = 45^\circ$ ， $\angle 3 = 30^\circ$ ，請問： $\angle 4 + \angle 1$ 的度數為何？

- (A) 140° (B) 150°
 (C) 160° (D) 170°

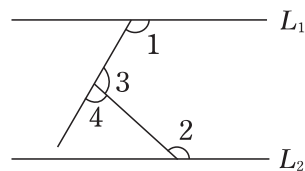
5. $\angle 1 = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$
 $\therefore \angle 1 = \angle 4 \therefore \angle 1 + \angle 4 = 150^\circ$



- (C) 6. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $\angle 1 = 120^\circ$ ， $\angle 2 = 138^\circ$ ，請問： $\angle 4$ 的度數為何？

- (A) 49° (B) 50°
 (C) 78° (D) 92°

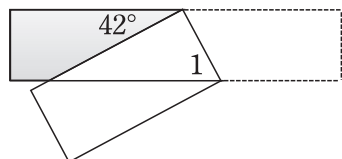
6. $\therefore \angle 3 = 360^\circ - (120^\circ + 138^\circ) = 102^\circ$
 $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$



- (C) 7. 一條等寬的紙條折疊如右圖，則 $\angle 1 = ?$

- (A) 65° (B) 67°
 (C) 69° (D) 71°

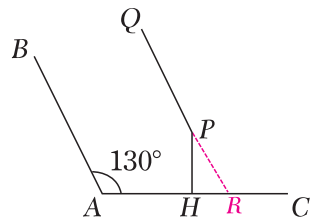
7. $\angle 1 = (180^\circ - 42^\circ) \div 2 = 69^\circ$



(B) 8. 如右圖， $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ ， $\overline{PH} \perp \overline{AC}$ ，若 $\angle BAC = 130^\circ$ ，則 $\angle QPH = ?$

- (A) 120°
- (B) 140°
- (C) 150°
- (D) 160°

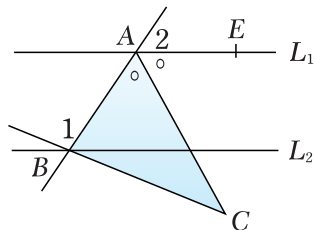
8. 延長 \overline{QP} 交 \overline{AC} 為 R 點，則 $\angle PRH = 50^\circ$ ，
 $\angle QPH = 50^\circ + 90^\circ = 140^\circ$



(D) 9. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， \overline{AC} 平分 $\angle EAB$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 50^\circ$ ，則 $\angle C$ 的度數為何？

- (A) 32°
- (B) 33°
- (C) 34°
- (D) 35°

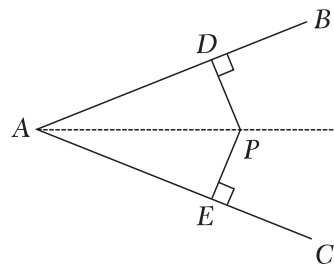
9. $\angle 1 = \angle C + \angle BAC$
 $\Rightarrow 100 = \angle C + 65^\circ$
 $\Rightarrow \angle C = 35^\circ$



(C) 10. 如右圖，若 $\overline{DP} = \overline{EP}$ ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\angle DAP = \angle EAP$
- (B) $\overline{AD} = \overline{AE}$
- (C) $\overline{AB} = \overline{AC}$
- (D) $\triangle ADP$ 面積 = $\triangle AEP$ 面積

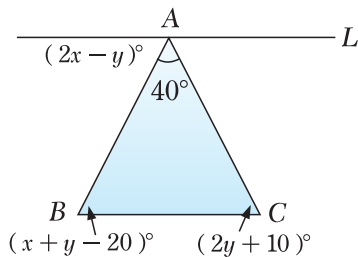
10. $\because \overline{DP} = \overline{EP} \therefore \overline{AD} = \overline{AE}$
 $\angle DAP = \angle EAP, \overline{AP} = \overline{AP}$
 但 \overline{AB} 與 \overline{AC} 不一定等長



(B) 11. 如右圖，若 $L \parallel \overline{BC}$ ，則 $x + y = ?$

- (A) 62
- (B) 82
- (C) 92
- (D) 100

11. $\begin{cases} 2x - y = x + y - 20 \\ 2x - y + 40 + 2y + 10 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -20 \\ 2x + y = 130 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 48 \\ y = 34 \end{cases} \Rightarrow x + y = 82$



(B) 12. 在直角坐標平面上有一長方形 PQRS，已知 $P(-7, 3)$ 、 $Q(13, 3)$ 、 $R(13, -8)$ ，則下列哪一條方程式為長方形 PQRS 的對稱軸？

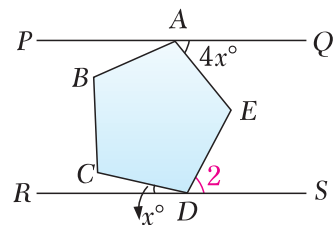
- (A) $x^2 - 3 = 0$
- (B) $x - 3 = 0$
- (C) $y = x + 3$
- (D) $x - 5 = 0$

12. $\frac{(-7) + 13}{2} = 3, x = 3, x - 3 = 0$

(D) 13. 如右圖， $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ 且 ABCDE 是正五邊形，請問： $\angle PAB$ 的度數為何呢？

- (A) 21°
- (B) 22°
- (C) 23°
- (D) 24°

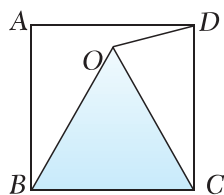
13. 正五邊形每一內角 $\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$
 $\angle 2 = 180^\circ - 108^\circ - x^\circ = 72^\circ - x^\circ$
 $\angle AED = \angle QAE + \angle EDS \Rightarrow 4x^\circ + (72^\circ - x^\circ) = 108^\circ$
 $\therefore x = 12^\circ$
 故 $\angle PAB = 180^\circ - 108^\circ - (4 \times 12^\circ) = 24^\circ$



(D) 14. 如右圖，ABCD 為一正方形， $\triangle BCO$ 為正三角形，請問： $\angle ODC$ 的度數為何呢？

- (A) 45°
- (B) 55°
- (C) 65°
- (D) 75°

14. $\because \overline{OC} = \overline{BC}$ 且 $\overline{DC} = \overline{BC}, \overline{OC} = \overline{DC}, \triangle OCD$ 為等腰 \triangle ，
 $\triangle OBC$ 中， $\angle OCB = 60^\circ, \therefore \angle OCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle ODC = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$



第 17 單元

四邊形的幾何推理

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★☆☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. 梯形是平行四邊形的一種。

💡 平行四邊形不包含梯形

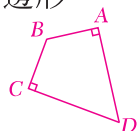
能力一

(○) 2. 正方形的性質包含菱形及長方形的性質。

💡 正方形四邊相等且四個角皆是直角

(X) 3. 正方形、菱形、矩形、等腰梯形中有 2 種四邊形的對角沒有互補。

💡 僅有菱形對角沒有互補

(X) 4. 四邊形 $ABCD$, 若 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, 則可確定其為平行四邊形。💡 如圖, $\because \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, 但 \overline{AD} 與 \overline{BC} 不平行, 故不一定為平行四邊形

(○) 5. 兩個全等的等腰三角形是無法拼成箏形的。

💡 兩個全等的等腰三角形能拼成平行四邊形、菱形、正方形

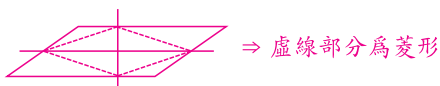
(X) 6. 任意四邊形四邊中點連線段所構成的四邊形面積為原四邊形面積的 $\frac{1}{4}$ 。

能力二

💡 中點連線段的四邊形面積為原四邊形面積的 $\frac{1}{2}$

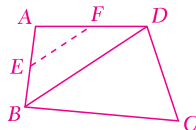
(○) 7. 過平行四邊形的兩對角線交點, 作互相垂直的兩直線, 連接其與各邊的交點, 所形成的四邊形為菱形。

💡 如右圖,



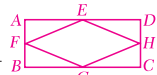
⇒ 虛線部分為菱形

(○) 8. 任意四邊形的兩鄰邊中點連接線段, 必為兩條對角線其中之一的一半, 且平行該對角線。

💡 $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BD}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ 

(X) 9. 矩形各邊中點的連線段可圍成正方形。

💡 如右圖, 為一菱形

(○) 10. 正方形的邊長為 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 若對角線長增加 $\frac{a}{2}$, 則新正方形的面積比原正方形的面積增加 $\frac{5}{8}a^2$ 。💡 $(\frac{3}{2}a)^2 \times \frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = \frac{9}{8}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{5}{8}a^2$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

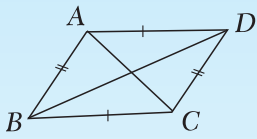
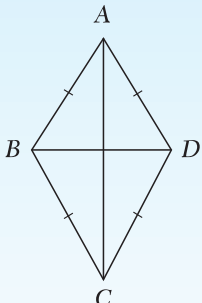
答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



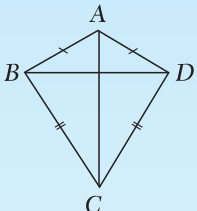
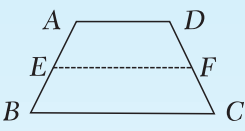
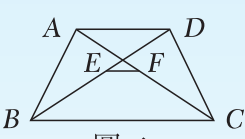
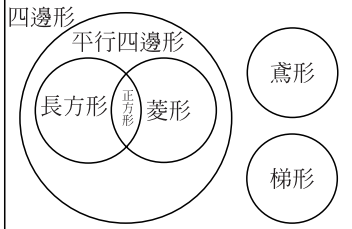
能力

四邊形的性質

一 平行四邊形家族 (平行四邊形、正方形、矩形、菱形)

<p>(一) 平行四邊形</p> 	<p>性質：(1) 任一對角線可將平行四邊形分為兩個全等的三角形 (2) 兩組對邊相等且平行</p> <p>判別：(1) 一組對邊平行且相等 (2) 兩雙對邊分別平行 (3) 兩組對角相等 (4) 兩對角線互相平分</p>
<p>(二) 菱形</p> 	<p>定義：四邊相等的四邊形為菱形</p> <p>性質：(1) 對角線平分其頂角 (2) 對角線互相垂直平分 (3) 四邊相等</p> <p>判別：菱形與正方形的判別在於正方形四個角皆為直角。 (正方形是菱形的一種)</p> <p>其它：假設菱形的對角線長為 a、b (1) 菱形面積 = $a \times b \times \frac{1}{2}$ (2) 菱形周長 = $2\sqrt{a^2 + b^2}$</p>

二 特殊四邊形家族 (鳶形、梯形)

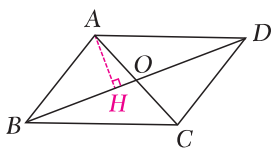
<p>(一) 鳶 (箏) 形</p> 	<p>性質：兩對角線互相垂直，其中一對角線被另一對角線所平分</p> <p>判別：鳶形與菱形的判別在於鳶形的兩對角線不互相平分，且不是四邊都等長且兩雙鄰邊相等的四邊形</p> <p>其它：鳶形面積 = 對角線的乘積 $\times \frac{1}{2}$</p>
<p>(二) 梯形</p>  <p>圖一</p>  <p>圖二</p>	<p>定義：一組對邊平行，而另一組對邊不平行的四邊形</p> <p>性質：1. 以等腰梯形為例： (1) 兩底角相等 (2) 兩腰相等 (3) 兩對角線相等 2. 梯形的中線平行於兩底，且其長等於兩底和的一半 $EF = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC})$ (如圖一) 3. 梯形兩對角線中點所成的線段平行於兩底，且其長等於兩底差的絕對值的一半，$EF = \frac{1}{2} \overline{AD} - \overline{BC}$ (如圖二)</p> <p>其它：梯形面積 = (上底 + 下底) \times 高 $\times \frac{1}{2}$ = 中線長 \times 高</p>
<p>四邊形的家譜 (文氏圖)</p>	

師說 1

〈平行四邊形的角度、周長與面積〉

演練 1

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點，若 $\angle BAD$ 的兩倍比 $\angle ABC$ 的三倍多 85° ，且 $\overline{AC} = 8\text{ cm}$ ， $\overline{BD} = 10\text{ cm}$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，請問：(1) $\angle BCD - \angle ADC = ?$ (2) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？

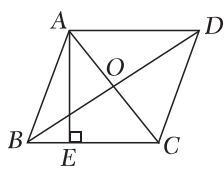


解

(1) 設 $\angle ABC$ 為 x° ， $2\angle BAD = 3\angle ABC + 85^\circ$ ，
 又 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，
 $\therefore x + (3x + 85) \div 2 = 180^\circ$ ，
 $x = \angle ABC = 55^\circ$ ， $\angle BAD = 125^\circ$ ，
 故 $\angle BCD - \angle ADC = 125^\circ - 55^\circ = 70^\circ$

(2) 做輔助線 $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ ，在 $\triangle AOH$ 中 $\angle AOH = 60^\circ$ ，
 $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 4$ ， $\therefore \overline{AH} = 2\sqrt{3}$
 $\Rightarrow ABCD$ 面積 $= 2\triangle ABD$ 面積
 $= 2 \times 10 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$
 $= 20\sqrt{3} (\text{cm}^2)$

如圖， $ABCD$ 為平行四邊形， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AE} = 12\text{ cm}$ ， $\overline{CD} = 13\text{ cm}$ ，且 $\triangle AOD$ 面積 $= 51\text{ cm}^2$ ，若 $3\angle BCD = 4\angle ABC + 71^\circ$ ，請問：(1) $\angle BAD - \angle ADC = ?$ (2) 平行四邊形 $ABCD$ 的周長為何？



解

(1) 設 $\angle ABC = x^\circ$ ， $3\angle BCD = 4x + 71^\circ$
 $\because \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ，
 $\angle BCD = 180^\circ - x^\circ$
 $3(180^\circ - x^\circ) = 4x^\circ + 71^\circ$ ，
 $x^\circ = 67^\circ = \angle ABC = \angle ADC$ ，
 $\angle BAD = 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$ ；
 $\angle BAD - \angle ADC = 113^\circ - 67^\circ = 46^\circ$

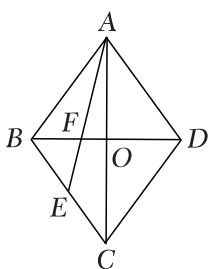
(2) $ABCD$ 面積
 $= 4\triangle AOD$ 面積 $= 4 \times 51 = 204 (\text{cm}^2)$
 $\overline{BC} = 204 \div 12 = 17 (\text{cm})$ ，
 平行四邊形 $ABCD$ 周長
 $= 2 \times (17 + 13) = 60 (\text{cm})$

師說 2

〈菱形的周長與面積〉

演練 2

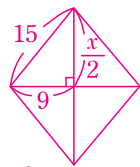
如圖， $ABCD$ 為菱形， E 點為 \overline{BC} 的中點，且 $\overline{BF} : \overline{FO} = 2 : 1$ ，若 \overline{OF} 的長為 5 公分，菱形 $ABCD$ 面積為 600 平方公分，請問：此菱形的周長為何呢？



解

$\because \overline{BF} : \overline{FO} = 2 : 1$
 $\therefore \overline{BO} = 3\overline{OF} = 15$ ， $\overline{BD} = 30$
 $\because \overline{AC} \times \overline{BD} \times \frac{1}{2} = 600$ ， $\overline{AC} \times \overline{BD} = 1200$ ，
 $\therefore \overline{AC} = 1200 \div 30 = 40$
 菱形 $ABCD$ 周長
 $= 2\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2} = 2\sqrt{40^2 + 30^2} = 100 (\text{公分})$

假設菱形的周長為 60 公分，兩對角線長為 18 公分與 x 公分，請問：(1) $x = ?$ (2) 菱形的面積為何？



解

(1) 菱形的一邊長 $= 60 \div 4 = 15$ ，
 根據商高定理 $(\frac{18}{2})^2 + (\frac{x}{2})^2 = 15^2$ ，
 $81 + \frac{x^2}{4} = 225$ ， $\frac{x^2}{4} = 144$ ， $x^2 = 576$ ，
 $x = \pm 24$ (負不合)

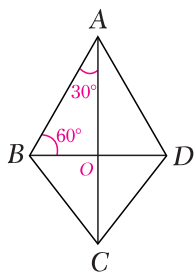
(2) 菱形面積 $= (24 \times 18) \times \frac{1}{2} = 216 (\text{平方公分})$

師說 3

〈梯形與鳶形〉

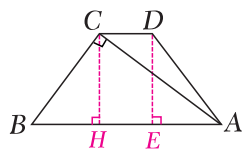
演練 3

如圖，鳶形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AD} = 12$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = 10$ ，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ，請問：鳶形 $ABCD$ 的面積為何呢？



解
 $\triangle ABD$ 中， $\because \overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\triangle ABD$ 為正三角形，
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BD} = 12$ ，
 在直角 $\triangle ABO$ 中依照商高數比例可知，
 $\overline{AO} = 6\sqrt{3}$ ，在 $\triangle BOC$ 中，
 $\overline{CO} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，
 $\therefore \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{CO} = 6\sqrt{3} + 8$ ， $\overline{BD} = 12$
 鳶形面積 $= 12(6\sqrt{3} + 8) \div 2$
 $= 36\sqrt{3} + 48$ (平方單位)

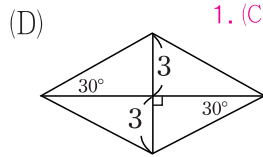
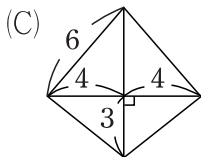
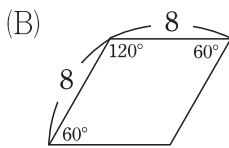
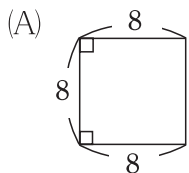
如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 15$ ， $\overline{AB} = 25$ ，
 請問：梯形 $ABCD$ 的面積為何呢？



解
 作輔助線 \overline{CH} ， \overline{DE} ，分別垂直 \overline{AB} ，
 $\overline{AC} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ ，
 $\overline{CH} = (15 \times 20) \div 25 = 12$ ，
 $\overline{AE} = \overline{BH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ ，
 $\therefore \overline{CD} = \overline{HE} = 25 - 18 = 7$ ，
 梯形面積 $= (7 + 25) \times 12 \times \frac{1}{2}$
 $= 192$ (平方單位)

同步評量 1

(C) 1. 若「四邊等長的四邊形稱為菱形」，則下列哪一個四邊形不一定是菱形呢？



1. (C) 為菱形

(A) 2. 若 $ABCD$ 為平行四邊形， $\overline{AB} = x + y$ ， $\overline{BC} = x - 2y + 40$ ， $\overline{CD} = 2x - 18$ ， $\overline{AD} = x + 3y$ ，請問： $ABCD$ 的周長為何呢？

- (A) 168 (B) 186 (C) 164 (D) 146

2. $x + 3y = x - 2y + 40 \Rightarrow y = 8$ ，
 $x + y = 2x - 18 \Rightarrow x = 26$ ，
 周長 $= (34 + 50) \times 2 = 168$

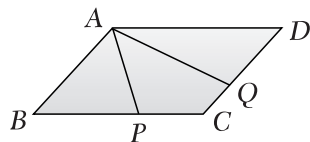
(B) 3. 一等腰梯形腰長 13 公分，高 12 公分，上底長 8 公分，則其面積為多少平方公分？

- (A) 165 (B) 156 (C) 184 (D) 148

3. 面積 $= (8 + 18) \times 12 \times \frac{1}{2} = 156$

(D) 4. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形，分別在 \overline{BC} 、 \overline{CD} 上取 P 、 Q 兩點，使得 $\angle APC$ 與 $\angle AQC$ 互補，若 $\angle PAQ = 48^\circ$ ，請問： $\angle ABC$ 的度數為何呢？

- (A) 42° (B) 44°
 (C) 46° (D) 48°

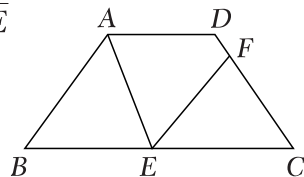


4. $\angle C = 360^\circ - (180^\circ + 48^\circ) = 132^\circ$ ，
 $\angle ABC = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

(C) 5. 如右圖，等腰梯形 $ABCD$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{CD}$ ， $\overline{BE} = \overline{CF}$ ， $\angle ADC = 110^\circ$ ， $\angle DAE = 60^\circ$ ，請問： $\angle DFE = ?$

- (A) 100° (B) 110°
 (C) 120° (D) 130°

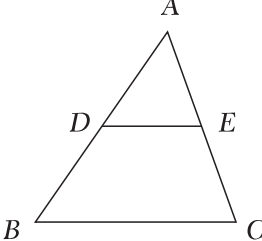
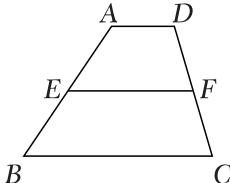
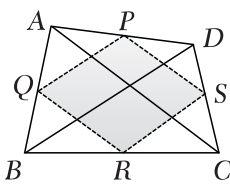
5. $\angle C = \angle B = 70^\circ$ ， $\angle BAE = 50^\circ$
 因為 $\overline{AB} = \overline{EC}$ ， $\overline{BE} = \overline{CF}$
 所以 $\angle CFE = 60^\circ$ ，故 $\angle DFE = 120^\circ$



能力

中點連線的性質

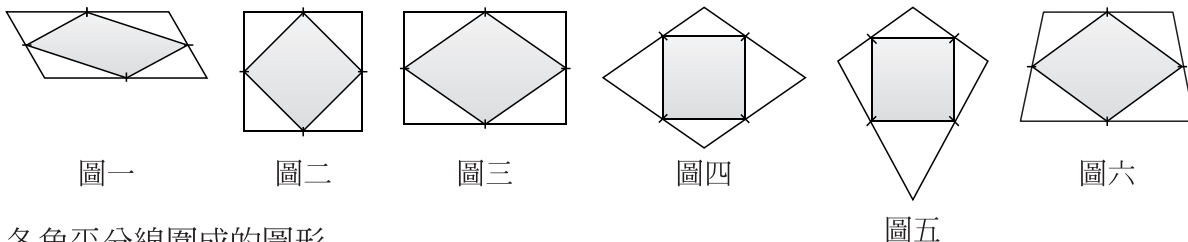
一 幾何圖形的中點連線性質

<p>1. 三角形的中點連線性質</p>		<p>如圖，在$\triangle ABC$中，D點、E點分別是\overline{AB}、\overline{AC}的中點，則有下列性質：</p> <p>(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$</p> <p>(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$</p> <p>(3) $\triangle ADE$ 面積 = $\frac{1}{4}\triangle ABC$ 面積</p>
<p>2. 梯形的中點連線性質</p>		<p>如圖，在梯形$ABCD$中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$E$點、$F$點分別是$\overline{AB}$、$\overline{DC}$的中點，則有下列性質：</p> <p>(1) $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$</p> <p>(2) $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$</p>
<p>3. 四邊形的中點連線性質</p>		<p>如圖，任意四邊形$ABCD$，其各邊中點為P、Q、R、S，則有下列性質：</p> <p>(1) $PQRS$ 必為平行四邊形</p> <p>(2) $PQRS$ 的周長 = $\overline{AC} + \overline{BD}$</p> <p>(3) $PQRS$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times \square ABCD$ 面積</p>

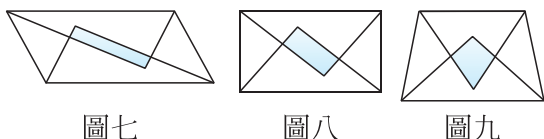
二 四邊形綜合性質歸納

四邊形 \ 構成	1. 連接各邊中點	2. 角平分線圍成的形狀
平行四邊形	平行四邊形 (圖一)	矩 形 (圖七)
正方形	正方形 (圖二)	無
矩 形	菱 形 (圖三)	長方形 (圖八)
菱 形	矩 形 (圖四)	無
鳶 形	矩 形 (圖五)	無
等腰梯形	菱 形 (圖六)	鳶 形 (圖九)

1. 連接各邊中點所成圖形



2. 各角平分線圍成的圖形

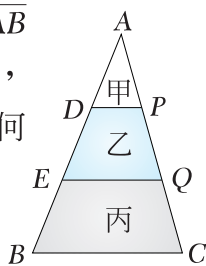


師說 4

〈三角形中點連線性質〉

演練 4

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 將 \overline{AB} 平均三等分，且 $\overline{DP} \parallel \overline{EQ} \parallel \overline{BC}$ ，請問：甲、乙、丙的面積比為何呢？



解

$\because D, E$ 將 \overline{AB} 平均三等分，

\therefore 假設 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB} = 1$ ，

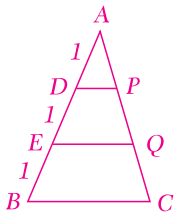
\therefore 由圖可知，令 $\overline{DP} = 1$

根據三角形中點連線性質，

則 $\overline{EQ} = 2$ ， $\overline{BC} = 2 \times 2 - 1 = 3$ ，

甲面積：乙面積：丙面積

$= 1^2 : (2^2 - 1^2) : (3^2 - 2^2) = \underline{1 : 3 : 5}$



如圖， $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} =$

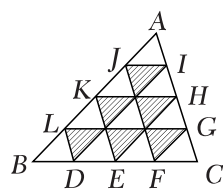
\overline{FC} ， $\overline{LD} \parallel \overline{KE} \parallel \overline{JF} \parallel \overline{AC}$ ，

$\overline{GF} \parallel \overline{HE} \parallel \overline{ID} \parallel \overline{AB}$ ，已知

$\overline{AB} = 9$ 、 $\overline{BC} = 8$ 、 \overline{AC}

$= 7$ ，請問：斜線部分所

有三角形周長的總和為多少呢？



解

周長總和 $= 6\overline{JI} + 6\overline{LD} + 6\overline{GF}$

$$= 6 \times \frac{\overline{BC}}{4} + 6 \times \frac{\overline{AC}}{4} + 6 \times \frac{\overline{AB}}{4}$$

$$= \frac{3}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$$

$$= \frac{3}{2} \times 24 = \underline{36 \text{ (單位)}}$$

師說 5

〈四邊形中點連線性質〉

演練 5

如右圖，平行四邊形

$ABCD$ ， E 、 F 、 G 、

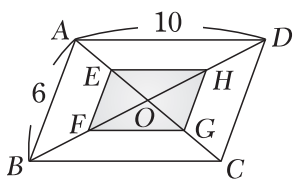
H 分別是 \overline{OA} ， \overline{OB} ，

\overline{OC} ， \overline{OD} 的中點，

假設 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 10$ ，請問：(1) 四邊形 $EFGH$

的周長為何呢？(2) $EFGH$ 面積與 $ABCD$ 面積

的比值為何呢？



解

(1) $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3$ ， $\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 5$ ，

$\therefore EFGH$ 周長 $= 2(3 + 5) = \underline{16 \text{ (單位)}}$

(2) \because 面積比 $=$ 邊長的平方比 $=$ 周長的平方比，

$\therefore EFGH$ 周長： $ABCD$ 周長 $= 16 : 32 = 1 : 2$

$\Rightarrow EFGH$ 面積： $ABCD$ 面積

$= 1^2 : 2^2 = 1 : 4 \Rightarrow$ 比值為 $\underline{\frac{1}{4}}$

假設菱形 $ABCD$ 的

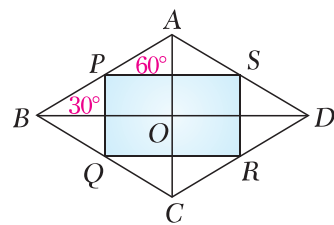
周長為 32 公分，

$\angle A = 120^\circ$ ，請問：

菱形 $ABCD$ 四邊中

點 P 、 Q 、 R 、 S 所

連成的四邊形 $PQRS$ 的周長與面積為何呢？



解

\because 由商高數的比例可知 $\overline{AO} = 4$ ， $\overline{BO} = 4\sqrt{3}$

$PQRS$ 的周長 $= \overline{AC} + \overline{BD} = \underline{8 + 8\sqrt{3} \text{ (cm)}}$

$ABCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

$PQRS$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 32\sqrt{3} = \underline{16\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}}$

同步評量 2

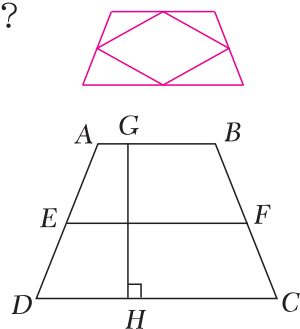
(B) 1. 依序連接一等腰梯形四邊中點所圍成的四邊形為下列何者呢？

(A) 正方形 (B) 菱形 (C) 矩形 (D) 等腰梯形 1. 菱形

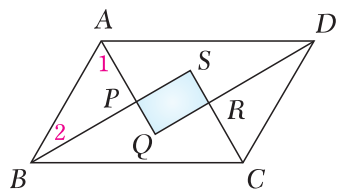
(B) 2. 如右圖， $ABCD$ 為一梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 E 、 F 分別為兩腰 \overline{AD} 與 \overline{BC} 之中點， \overline{GH} 為此梯形的高，則下列哪一個選項可表示為梯形 $ABCD$ 的面積呢？

(A) $\overline{AB} \times \overline{GH}$ (B) $\overline{EF} \times \overline{GH}$ 2. 梯形面積
 $= (\overline{AB} + \overline{DC}) \times \frac{1}{2} \times \overline{GH}$
 $= \overline{EF} \times \overline{GH}$

(C) $(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{GH}$ (D) $(\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{EF}$



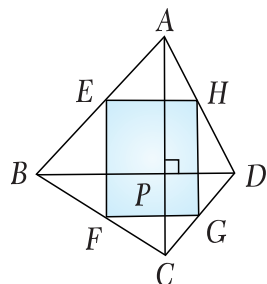
- (C) 3. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，作 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的內角平分線，交於 P 、 Q 、 R 、 S 四點，則四邊形 $PQRS$ 一定是下列哪一種圖形？



- (A) 正方形 (B) 菱形
(C) 矩形 (D) 等腰梯形

3. $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$,
 $\Rightarrow \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$,
 $\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = 90^\circ$, $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$,
 同理 $\angle Q = \angle S = \angle SRQ = 90^\circ$, $\therefore PQRS$ 為矩形

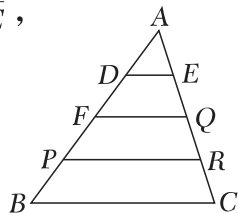
- (D) 4. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 P ，又 E 、 F 、 G 、 H 為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 的中點，若 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BD} = 6$ ，則四邊形 $EFGH$ 的面積為何？



- (A) 41
(B) 24
(C) 21
(D) 12

4. 四邊形 $EFGH$ 面積
 $=$ 四邊形 $ABCD$ 面積 $\times \frac{1}{2}$
 $= (8 \times 6) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 12$

- (A) 5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{FP} = \overline{PB}$ ， $\overline{AE} = \overline{EQ} = \overline{QR} = \overline{RC}$ ，若 $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{DE} + \overline{FQ} + \overline{PR} = ?$



- (A) 18
(B) 20
(C) 22
(D) 24

5. $\overline{FQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 6$, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{FQ} = 3$,
 $\overline{PR} = \frac{1}{2}(\overline{FQ} + \overline{BC}) = 9 \Rightarrow \overline{DE} + \overline{FQ} + \overline{PR} = 18$



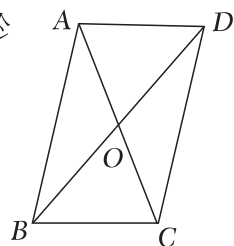
基本觀念題

1. (A) 兩雙對邊相等；(B)、(C) 有可能是等腰梯形；(D) 有可能是梯形

- (A) 1. 四邊形 $ABCD$ 滿足下列何種條件時，才能確定其為平行四邊形呢？

- (A) $\angle A = \angle C$ ，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (B) $\angle A = \angle B$ ，且 $\angle C = \angle D$
 (C) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (D) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$

- (D) 2. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， $\angle BCD$ 為鈍角， \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，則下列哪一個敘述不正確呢？



- (A) $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 面積相同
 (B) $\angle BAD = \angle DCB$
 (C) $\overline{AB} = \overline{CD}$
 (D) $\overline{AC} = \overline{BD}$

2. 平行四邊形對角線不一定等長

- (C) 3. 等腰梯形的四個內角平分線，可能會圍成以下何種圖形呢？

- (A) 正方形 (B) 矩形 (C) 鳶形 (D) 菱形

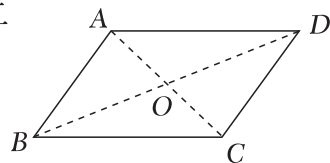
3. 鳶(等)形

- (C) 4. 三梯形其對應高比為 $1:2:3$ ，其對應中線比為 $2:3:5$ ，請問：其面積比為何呢？

- (A) $1:2:3$ (B) $1:4:9$ (C) $2:6:15$ (D) $4:9:25$

4. 面積比 $= (r \times 2k) : (2r \times 3k) : (3r \times 5k) = 2rk : 6rk : 15rk = 2 : 6 : 15$

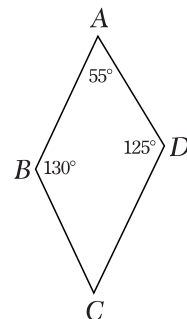
(C) 5. 如右圖，下列作圖法何者無法將平行四邊形 $ABCD$ 分成二等分呢？



- (A) 作對角線 \overline{BD} 的垂直平分線交一組對邊於兩點
- (B) 過對角線交點 O ，作一直線交一組對邊於兩點
- (C) 作 $\angle A$ 的平分線
- (D) 連接對角線 \overline{AC}

5. (C) 僅有平行四邊形中的矩形、正方形和菱形才可能作角平分線將其平分

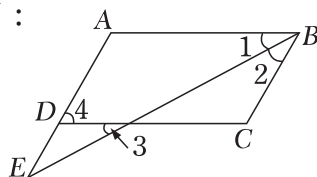
(A) 6. 如右圖，對於四邊形 $ABCD$ 的敘述下列何者不正確？



- (A) \overline{AB} 和 \overline{CD} 不平行
- (B) \overline{AD} 和 \overline{BC} 不平行
- (C) $ABCD$ 不是平行四邊形
- (D) $ABCD$ 為梯形

6. $\angle C = 360^\circ - (55^\circ + 130^\circ + 125^\circ) = 50^\circ$,
 (A) $\because \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180^\circ \therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

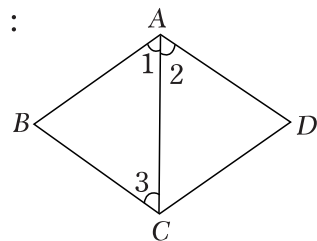
(B) 7. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle E = 40^\circ$ ，請問：
 $\angle 3 + \angle 4 + \angle C = ?$



- (A) 210°
- (B) 220°
- (C) 230°
- (D) 240°

7. $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 3$,
 $40^\circ + \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$,
 $\angle 2 = 40^\circ = \angle 1$, $\angle 4 = 80^\circ$, $\angle C = 100^\circ$,
 $\angle 3 + \angle 4 + \angle C = 40^\circ + 80^\circ + 100^\circ = 220^\circ$

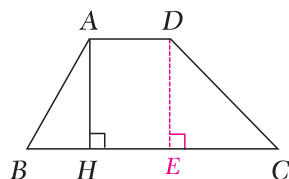
(D) 8. 如右圖， $ABCD$ 為一菱形， \overline{AC} 為對角線， $\angle 1 = 55^\circ$ ，請問：
 $\angle B + \angle 3 - \angle 2 = ?$



- (A) 55°
- (B) 60°
- (C) 65°
- (D) 70°

8. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 55^\circ$,
 $\angle B = 180^\circ - (2 \times 55^\circ) = 70^\circ$,
 $\angle B + \angle 3 - \angle 2 = 70^\circ$

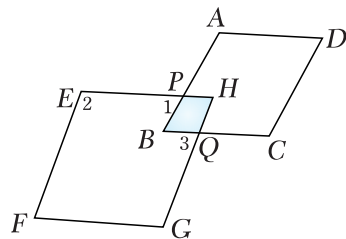
(B) 9. 如右圖， $ABCD$ 為一梯形，已知上底 $\overline{AD} = 2$ ，下底 $\overline{BC} = 7$ ，
 兩腰各為 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ，請問：此梯形的高為何呢？



- (A) $\frac{13}{5}$
- (B) $\frac{12}{5}$
- (C) $\frac{13}{4}$
- (D) $\frac{7}{4}$

9. 令 $\overline{BH} = x$, $\overline{CE} = 5 - x$, $3^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2$,
 $9 - x^2 = 16 - (25 - 10x + x^2)$,
 $9 - 16 + 25 = 10x$, $x = \frac{9}{5}$,
 $\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\frac{9}{5})^2} = \frac{12}{5}$

(A) 10. 如右圖，有兩個透明的滑鼠墊其形狀均為平行四邊形，今將其一部分重疊，得四邊形 $PBQH$ ，已知 $\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ， $\angle 3 = 65^\circ$ ，請問： $\angle B$ 的度數為何？



- (A) 55°
- (B) 60°
- (C) 65°
- (D) 70°

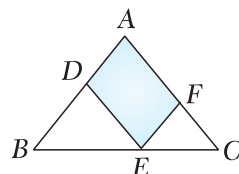
10. $\angle BPH = 130^\circ$, $\angle PHQ = 60^\circ$,
 $\angle BQH = 115^\circ$,
 $\angle B = 360^\circ - (130^\circ + 60^\circ + 115^\circ) = 55^\circ$

(D) 11. 下列何者不是平行四邊形的性質？

- (A) 兩組對角相等
- (B) 兩組對邊相等
- (C) 對角線互相平分
- (D) 兩條對角線等長

11. 平行四邊形對角線不一定等長

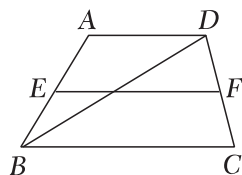
(D) 12. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ ， $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ， $\triangle BDE$ 與 $\triangle EFC$ 周長和為 46，則 $\triangle ABC$ 周長為何？



- (A) 16
- (B) 23
- (C) 32
- (D) 46

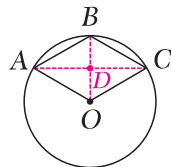
12. 因為 $\overline{AD} = \overline{FE}$ 且 $\overline{AF} = \overline{DE}$,
 所以 $\triangle ABC$ 周長 = $\triangle BDE$ 與 $\triangle EFC$ 周長和 = 46

(A) 13. 如右圖，梯形 $ABCD$ 面積被 \overline{BD} 分成 3 : 7 之兩部分，則梯形 $ABCD$ 被中線 \overline{EF} 所截之兩梯形面積比為何？



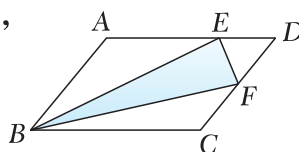
- (A) 2 : 3 13. $\because \triangle ADB$ 面積 : $\triangle BCD$ 面積 = 3 : 7 $\therefore \overline{AD} : \overline{BC} = 3 : 7$ (同高)
 (B) 3 : 4 設 $\overline{AD} = 3r, \overline{BC} = 7r (r \neq 0), \overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) = 5r$
 (C) 3 : 7 $\Rightarrow \frac{\text{梯形 } AEFD \text{ 面積}}{\text{梯形 } EBCF \text{ 面積}} = \frac{\frac{1}{2}(3r + 5r)}{\frac{1}{2}(5r + 7r)} = \frac{2}{3}$
 (D) 4 : 5

(C) 14. 如右圖，四邊形 $OABC$ 為菱形，且圓 O 半徑為 6，則此菱形面積為多少？



- (A) $6\sqrt{3}$ (B) 6 14. $\overline{AD} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$
 \therefore 菱形面積 = $6 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$
 (C) $18\sqrt{3}$ (D) 31

(D) 15. 如右圖， $ABCD$ 是一平行四邊形，其面積是 180， $\overline{CF} = \overline{DF}$ ， $\overline{AE} = 2\overline{ED}$ ，則 $\triangle BEF$ 之面積是多少平方單位？



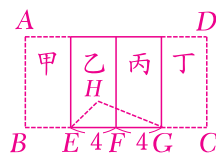
- (A) 30 (B) 40
 (C) 50 (D) 60 15. $\triangle BEF$ 面積 = $ABCD$ 面積 - $\triangle AEB$ 面積 - $\triangle DEF$ 面積 - $\triangle BCF$ 面積
 $= 180 - \frac{180}{3} - \frac{180}{12} - \frac{180}{4} = 60$

歷屆基測 試題

(B) 1. 將長方形 $ABCD$ 分為甲、乙、丙、丁四個全等的小長方形，如右圖所示，其中 $E、F、G$ 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC} = 4, \overline{AB} = 8$ 。若在此四個小長方形內找一點 H ，使得 $\overline{EH} = 3, \overline{GH} = 6$ ，則 H 在下列哪一個長方形內？

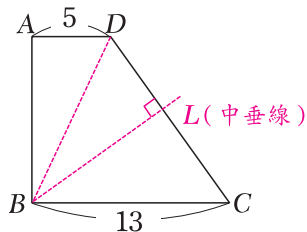


- (A) 甲 (B) 乙 1. $6 - 3 < 8 < 6 + 3 \Rightarrow 3 < 8 < 9,$
 (C) 丙 (D) 丁 H 點一定落在乙中



97 基測二

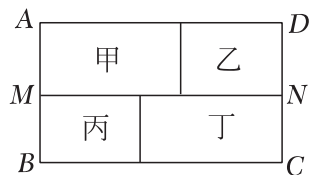
(C) 2. 如右圖，在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BC} = 13$ 。若作 \overline{CD} 的中垂線恰可通過 B 點，則 $\overline{AB} = ?$



- (A) 8 2. $\because \overline{BD} = \overline{BC} \therefore \overline{AB} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$
 (B) 9
 (C) 12
 (D) 18

97 基測二

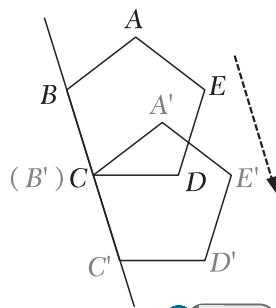
(C) 3. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $M、N$ 兩點分別是 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的中點，且長方形 $AMND$ 分成甲、乙兩長方形，長方形 $MBCN$ 分成丙、丁兩長方形。若面積比甲 : 乙 = 7 : 3，丙 : 丁 = 5 : 9，則乙 : 丙 = ?



- (A) 1 : 1 3. $\frac{3}{7+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \Rightarrow$ 乙的面積 = $\frac{3}{20} \times ABCD$ 面積
 (B) 3 : 5 $\frac{5}{5+9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{28} \Rightarrow$ 丙的面積 = $\frac{5}{28} \times ABCD$ 面積
 (C) 21 : 25 \therefore 乙 : 丙 = $\frac{3}{20} : \frac{5}{28} = 21 : 25$
 (D) 27 : 35

97 基測二

- (C) 4. 如右圖，將五邊形 $ABCDE$ 沿直線 \overline{BC} 往下平移，使得新五邊形 $A'B'C'D'E'$ 的頂點 B' 與 C 點重合。若 $\angle A = 103^\circ$ ， $\angle E = 110^\circ$ ， $\angle D = 113^\circ$ ， $\angle B = 115^\circ$ ，則 $\angle A'CD = ?$

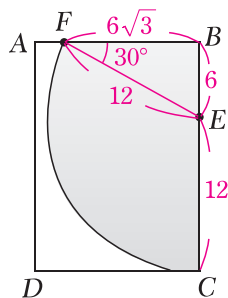


97 基測二

- (A) 30°
 (B) 32°
 (C) 34°
 (D) 36°

4. 五邊形內角和 $= 180^\circ \times 3 = 540^\circ$
 $\angle BCD = 540^\circ - (103^\circ + 110^\circ + 113^\circ + 115^\circ) = 99^\circ$
 $\angle A'CB = 180^\circ - \angle A'CC' = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
 $\angle A'CD = \angle BCD - \angle A'CB = 99^\circ - 65^\circ = 34^\circ$

- (A) 5. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 為矩形， $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{AB} = 8\sqrt{3}$ ， E 點在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BE} = 6$ 。以 E 為圓心，12為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 F ，求圖中灰色部分面積為何？

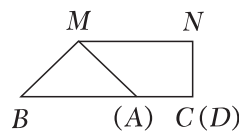
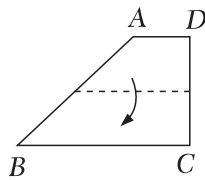


97 基測二

- (A) $48\pi + 18\sqrt{3}$
 (B) $72\pi - 18\sqrt{3}$
 (C) $120\pi + 9\sqrt{3}$
 (D) 36π

5. 在直角 $\triangle FBE$ 中， $\because \overline{EF} = 12$ ， $\overline{BE} = 6$ ， $\overline{FB} = 6\sqrt{3}$
 $\therefore \angle FEB = 60^\circ$ ， $\angle FEC = 120^\circ$
 $\triangle FEB$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$
 扇形 FEC 面積 $= 12 \times 12 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 48\pi$
 灰色面積 $= 48\pi + 18\sqrt{3}$

- (B) 6. 圖(一)為一梯形 $ABCD$ ，其中 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{CD} = 12$ 。若將 \overline{AD} 疊合在 \overline{BC} 上，出現摺線 \overline{MN} ，如圖(二)所示，則 \overline{MN} 的長度為何？



圖(一)

圖(二)

96 基測一

- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 21

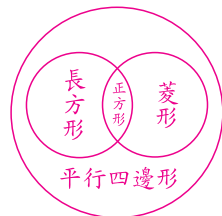
6. $\overline{MN} = (\overline{AD} + \overline{BC}) \div 2 = (6 + 18) \div 2 = 12$



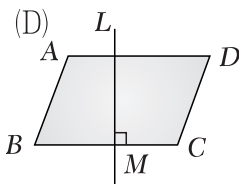
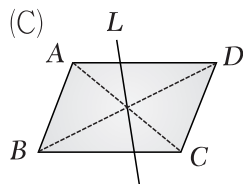
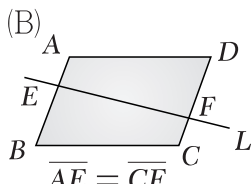
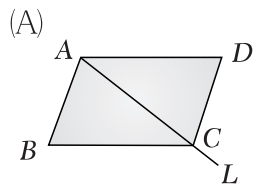
- (B) 1. 下列敘述何者錯誤？

- (A) 假設平行四邊形具有性質 A ，則菱形也具有性質 A
 (B) 假設長方形具有性質 B ，則平行四邊形也具有性質 B
 (C) 假設長方形具有性質 C ，則正方形也具有性質 C
 (D) 假設菱形具有性質 D ，則正方形也具有性質 D

1.



- (D) 2. 下列哪一條直線 L 不一定可以把平行四邊形 $ABCD$ 的面積平分呢？



2. (D) 平行四邊形被拆成兩個梯形後(上底+下底)不一定相同

L 是 \overline{BC} 的中垂線

- (A) 3. 若平行四邊形相鄰兩邊長為28與30，且此兩邊之夾角為 45° ，其面積為多少平方單位？

3. $x^2 + x^2 = 28^2$ ， $x = 14\sqrt{2}$ ，面積 $= 30 \times 14\sqrt{2} = 420\sqrt{2}$

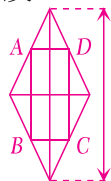
- (A) $420\sqrt{2}$ (B) $320\sqrt{2}$ (C) $240\sqrt{2}$ (D) $230\sqrt{2}$

- (A) 4. 平行四邊形 $ABCD$ 中， $2\overline{AB} = 3\overline{AD}$ ， $\overline{CD} - \overline{BC} = 4$ ，則此平行四邊形的周長為何？

- (A) 40 (B) 50
 (C) 60 (D) 70

4. $\because ABCD$ 為平行四邊形 $\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，
 $\begin{cases} 2\overline{AB} = 3\overline{AD} \\ \overline{CD} - \overline{BC} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\overline{AB} - 3\overline{AD} = 0 \dots ① \\ \overline{AB} - \overline{AD} = 4 \dots ② \end{cases} \Rightarrow ② \times 3 - ① \text{得 } \overline{AB} = 12, \overline{AD} = 8$
 周長 $= 2(12 + 8) = 40$

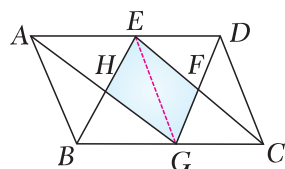
- (C) 5. 菱形的兩對角線長分別為 24 及 10，若以四邊中點連接而成的四邊形其對角線長的和為多少呢？



- (A) 18 (B) 22
(C) 26 (D) 30

5. $\overline{AB} = \overline{CD} = 12$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 5$, $\overline{AC} = \overline{BD} = 13$,
對角線長的和 = $2 \times 13 = 26$

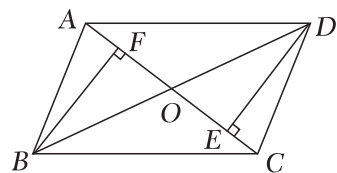
- (B) 6. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， E 、 G 分別為 \overline{AD} 、 \overline{BC} 的中點，若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 120 平方公分，請問：四邊形 $EHGF$ 面積為何呢？



- (A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50

6. 連接 \overline{EG} ，
則四邊形 $EHGF$ 面積 = $\frac{1}{4} \times ABCD$ 面積 = 30

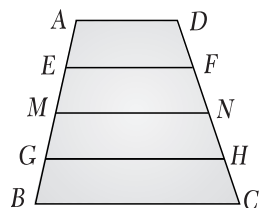
- (C) 7. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ ，若 $\overline{AF} : \overline{EF} = 1 : 6$ ，且 $\triangle ABF$ 面積 = 16 cm^2 ，則平行四邊形 $ABCD$ 面積為多少？



- (A) 144 (B) 196
(C) 256 (D) 265

7. 設 $\overline{AF} = k$, $\overline{EF} = 6k$
 $\therefore \overline{OA} = \overline{AF} + \overline{OF} = 4k$,
 $\triangle ABO$ 面積 = $4 \triangle ABF$ 面積 = $4 \times 16 = 64$,
 $ABCD$ 面積 = $64 \times 4 = 256 \text{ (cm}^2\text{)}$

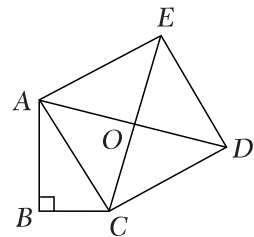
- (A) 8. 如右圖， $ABCD$ 為梯形， E 、 M 、 G 分別四等分 \overline{AB} ，且 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$ ，假設 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BC} = 8$ ，請問： $\overline{EF} + \overline{MN} + \overline{GH} = ?$



- (A) 18 (B) 22
(C) 26 (D) 30

8. $\overline{MN} = (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \frac{1}{2} = 6$, $\overline{MN} = (\overline{EF} + \overline{GH}) \times \frac{1}{2}$,
 $\overline{EF} + \overline{GH} = 2\overline{MN} = 12$, $\overline{EF} + \overline{MN} + \overline{GH} = 6 + 12 = 18$

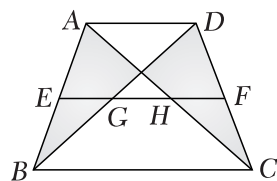
- (D) 9. 如右圖， $\angle ABC = 90^\circ$ ，以 \overline{AC} 為邊作一正方形 $ACDE$ ， O 點為兩對角線之交點，假設 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，請問： $\triangle AOC$ 的面積為多少平方單位？



- (A) 22 (B) 23
(C) 24 (D) 25

9. $\overline{AC} = 10$
 $\triangle AOC$ 面積 = $\frac{1}{4} \times ACDE$ 面積 = $\frac{1}{4} \times 100 = 25$

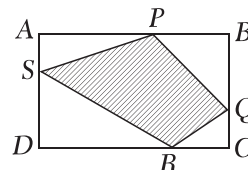
- (B) 10. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，兩邊中點連線長 $\overline{EF} = 14$ ，且 $\overline{AD} : \overline{BC} = 2 : 5$ ，請問： \overline{GH} 為何呢？



- (A) 5 (B) 6
(C) 7 (D) 8

10. 令 $\overline{AD} = 2r$, $\overline{BC} = 5r$, $(2r + 5r) \times \frac{1}{2} = 14$, $r = 4$,
 $\overline{GH} = (\overline{BC} - \overline{AD}) \times \frac{1}{2} = (20 - 8) \times \frac{1}{2} = 6$ (單位)

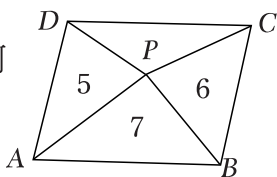
- (D) 11. 如右圖，在長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AP} = 6$ ， $\overline{BQ} = 4$ ， $\overline{CR} = 3$ ， $\overline{SD} = 4$ ，請問：斜線部分面積為何呢？



- (A) 26 (B) 27
(C) 28 (D) 29

11. 斜線面積
= $(6 \times 10) - \frac{1}{2} [(2 \times 6) + (4 \times 7) + (3 \times 2) + (4 \times 4)]$
= 29

- (C) 12. 如右圖，設 P 點為平行四邊形 $ABCD$ 內部一點，已知 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAD$ 之面積為 7、6、5，請問： $\triangle PCD$ 的面積為何呢？




- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5

12. 通過 P 點作 \overline{AD} 之平行線交 \overline{AB} 與 \overline{DC} 於 Q 、 O 兩點，
則 $\triangle OPD$ 面積 + $\triangle PQA$ 面積 = $\triangle DPA$ 面積 (同底等高)，同理，
 $\triangle OPC$ 面積 + $\triangle PQB$ 面積 = $\triangle PBC$ 面積， $\triangle DPC$ 面積 = $5 + 6 - 7 = 4$

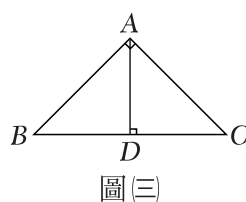
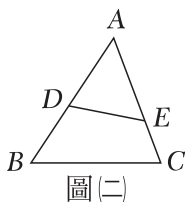
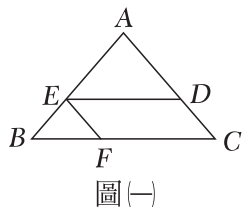
1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

- (X) 1. 有兩個五邊形其對應角相等, 則必為相似圖形。
 💡 四邊(含)以上多邊形必須同時滿足對應角相等、對應邊成比例才相似。
- (X) 2. 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 兩點分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上, 若 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。
 💡 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ 不一定 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (如圖) 
- (X) 3. 兩相似三角形通常依據 AA、ASA、SSS 三種性質來證明相似。
 💡 AA、SAS、SSS
- (O) 4. 若兩相似三角形面積的比是 2:3, 則其對應邊比是 $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ 。
 💡 面積比為邊長的平方比
- (O) 5. (A) $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{15}$; (B)1、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$; (C) $\sqrt{2}$ 、2、 $\sqrt{6}$, 以上是三個三角形的三邊長, 則(A)(B)(C)三個三角形皆相似。
 💡 (A)(B)(C)三邊長的連比均為 $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$
- (X) 6. 有一個五邊形 $ABCDE$ 用影印機放大 160% 得五邊形 $A'B'C'D'E'$, 若 $\angle B = 85^\circ$, 則 $\angle B' = 136^\circ$ 。
 💡 相似形邊長成比例, 角度不變
- (O) 7. 如下圖(一), 平行四邊形 $DEFC$ 內接於三角形 ABC , 則 $\triangle AED \sim \triangle EBF$ 。
 💡 $\because \overline{EF} \parallel \overline{AC}, \therefore \angle BEF = \angle A, \angle EFB = \angle C, \because \overline{ED} \parallel \overline{BC}, \therefore \angle ADE = \angle C \Rightarrow \angle EFB = \angle ADE$ 故 $\triangle AED \sim \triangle EBF$ (AA 相似)
- (X) 8. 如下圖(二), 若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AED$ 相似, 其中 \overline{DE} 不平行於 \overline{BC} , 其對應邊的比例為

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$$
。
 💡 $\because \triangle ABC \sim \triangle AED, \angle A$ 為共同角 $\therefore \angle B = \angle AED, \angle C = \angle ADE \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$
- (O) 9. 兩個全等的三角形必相似, 其對應邊長比為 1:1。
 💡 如題目所述
- (O) 10. 如下圖(三), 直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ, \overline{AD} \perp \overline{BC}$, 則 $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$ 。
 💡 $\because \angle B = \angle CAD, \angle C = \angle BAD, \therefore \triangle DAC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$



數學

健康狀況檢核表

※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 相似形的概念與應用

一 相似形基本觀念

1. 若兩多邊形相似，則：

- (1) 對應角相等
- (2) 對應邊成比例

2. 相似三角形條件

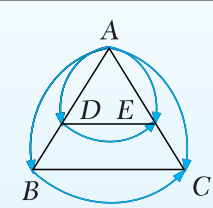
- (1) 三角對應相等 (AA 相似)
- (2) 一角對應相等，且夾此角的兩邊對應成比例 (SAS 相似)
- (3) 三邊對應成比例 (SSS 相似)。

注意		
	相似形的條件	對應角 對應邊
多邊形種類	三角形	符合其中一者即相似
	四邊以上的多邊形	兩者同時符合才相似

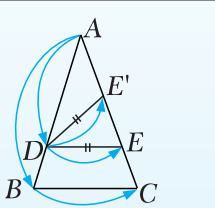
二 相似形比例性質

1. 三角形兩邊截成比例性質

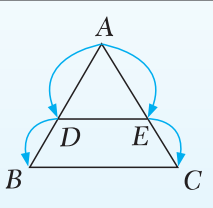
性質		箭頭說明
(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (如圖一)		\Rightarrow
(2) 若 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ ，則 \overline{DE} 不一定與 \overline{BC} 平行 $\therefore \overline{DE} = \overline{DE'}$ ， $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE'}}{\overline{BC}}$ ，但 $\overline{DE'}$ 與 \overline{BC} 不平行 (如圖二)		不可逆
(3) $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ (如圖三)	(4) $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ (如圖四)	\Leftrightarrow 互逆



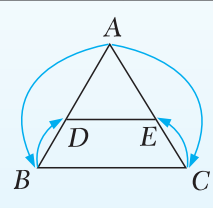
(圖一)



(圖二)



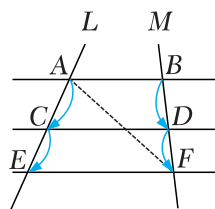
(圖三)



(圖四)

2. 平行線截線段長成比例 (由三角形比例而來)

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \Leftrightarrow \overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$$

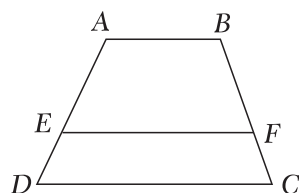


3. 梯形截邊成比例性質

(1) 在梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ，則 $\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{BF} : \overline{FC}$ 。

(2) 承(1)，若 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{CD} = b$ ， $\overline{AE} : \overline{ED} = m : n$ ，

$$\text{則 } \overline{EF} = \frac{na + mb}{m + n}。$$



4. 三角形內分比與外分比性質

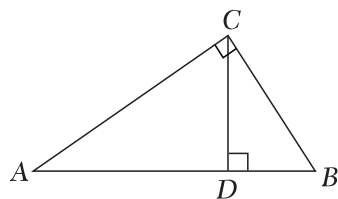
內分比	外分比
\overline{AD} 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABC$ 中, $\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$	\overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 之外角 , $\triangle ABC$ 中, $\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$

5. 直角三角形母子相似定理

若 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D , 則:

(1) $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$

① $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}$	口訣：高 2 兩段乘
② $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}$	口訣：斜 2 短乘長
③ $\overline{BC}^2 = \overline{BA} \times \overline{BD}$	



6. 兩相似三角形

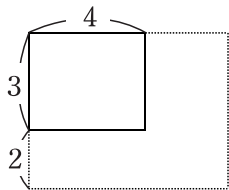
- (1) 對應邊長之比 = 對應高之比 = 對應分角線之比 = 對應中線之比。
 (2) 對應面積比 = 對應邊長平方比。

師說 1

〈相似形的意義〉

演練 1

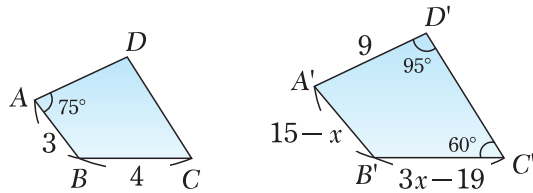
如右圖所示, 長方形長為 4 公分, 寬為 3 公分, 若將寬增加 2 公分, 且所得的長方形與原長方形相似, 那麼長要增加多少?



解

設長要增加 x , 則 $3 : 4 = (3 + 2) : (4 + x)$
 $3(4 + x) = 4(3 + 2)$, $12 + 3x = 20$, $3x = 8$
 $\therefore x = \frac{8}{3}$
 需增加 $\frac{8}{3}$ (公分)

如下圖, 四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$, 求:



- (1) $\overline{B'C'}$ = ? (2) $\overline{CD} : \overline{C'D'}$ = ? (3) $\angle B$ = ?

解

- (1) $\because \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \therefore \frac{3}{15-x} = \frac{4}{3x-19}$,
 $3(3x-19) = 4(15-x)$,
 $9x-57 = 60-4x$, $13x = 117$
 $\therefore x = 9 \Rightarrow \overline{B'C'} = 3 \times 9 - 19 = 8$ (單位)
- (2) $\because \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = 4 : 8 = 1 : 2$
- (3) $\angle B = \angle B' = 360^\circ - 75^\circ - 60^\circ - 95^\circ = 130^\circ$

師說 2

〈相似形比例線段性質〉

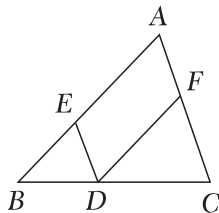
演練 2

D 是 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 上任意一點，若由 D 點作 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ 交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 E 、 F 兩點。

- (1) $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CF} : \overline{FA}$ 是否成立？何故？
- (2) 若 $\overline{AE} = 2x - 5$ ， $\overline{EB} = 4x - 14$ ， $\overline{CF} = 3$ ， $\overline{AF} = 2$ ，則 $\overline{BE} = ?$

解

- (1) $\because \overline{DE} \parallel \overline{AC}$
 $\therefore \overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CD} : \overline{DB}$
 又 $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$
 $\therefore \overline{CD} : \overline{DB} = \overline{CF} : \overline{FA}$
 $\therefore \overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CF} : \overline{FA}$
- (2) $(2x - 5) : (4x - 14) = 3 : 2$
 $3(4x - 14) = 2(2x - 5)$
 $12x - 42 = 4x - 10 \Rightarrow 8x = 32, x = 4$
 $\therefore \overline{BE} = 4 \times 4 - 14 = 2$ (單位)



如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = x - 3$ ， $\overline{BD} = x - 1$ ， $\overline{BC} = x - 3$ ， $x - 2$ ， $\overline{DE} = 3$ ，則 $x = ?$ $\overline{AB} = ?$

解

$$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC} \quad \therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

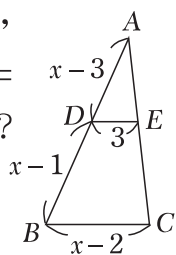
$$\frac{x-3}{(x-3)+(x-1)} = \frac{3}{x-2}$$

$$(x-3)(x-2) = 3(2x-4)$$

$$(x-3)(x-2) = 6(x-2)$$

$$\because x \neq 2, x-3 = 6 \Rightarrow x = 9$$

故 $\overline{AB} = 2x - 4 = 2 \times 9 - 4 = 14$ (單位)



師說 3

〈多條平行截線等比例線段〉

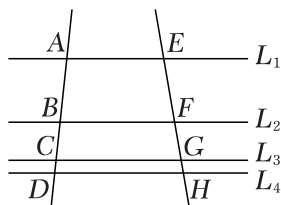
演練 3

如圖，已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ ，則

- (1) 若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 5 : 3 : 1$ ，且 $\overline{EH} = 18$ ，則 $\overline{FG} = ?$
- (2) 若 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{AD} = 5 : 8 : 10$ ，則 $\overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH} = ?$

解

- (1) $\because L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$
 $\therefore \overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 5 : 3 : 1$
 $\overline{FG} = 18 \times \frac{3}{5+3+1} = 6$
- (2) $\because L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$
 $\therefore \overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD}$
 $= \overline{AB} : (\overline{AC} - \overline{AB}) : (\overline{AD} - \overline{AC})$
 $= 5 : (8 - 5) : (10 - 8) = 5 : 3 : 2$



如圖，已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，

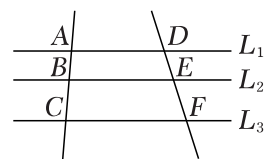
若 $\overline{AB} = x + 1$ ， $\overline{BC} = 7 - x$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{EF} = x$ ，求 $x = ?$

解

$$\because \frac{x+1}{7-x} = \frac{3}{x}$$

$$x^2 + x = 21 - 3x \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x-3)(x+7) = 0, x = 3 \text{ 或 } -7 \text{ (不合)}$$



師說 4

〈坐標平面的相似形〉

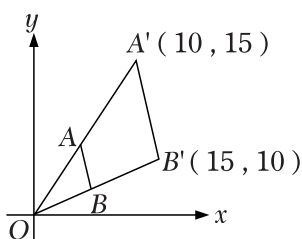
演練 4

如圖，若 $\triangle OAB \sim \triangle OAB'$ ，且 $\triangle OAB'$ 為 $\triangle OAB$ 的 5 倍放大圖，則 A 點坐標為何？ B 點坐標為何？

解

$$A \text{ 點 } \left(\frac{10}{5}, \frac{15}{5} \right) \Rightarrow (2, 3)$$

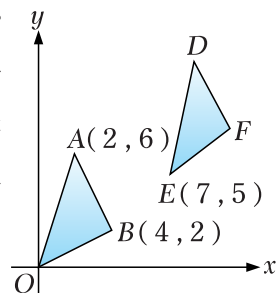
$$B \text{ 點 } \left(\frac{15}{5}, \frac{10}{5} \right) \Rightarrow (3, 2)$$



如圖，若 $\triangle DEF$ 為 $\triangle AOB$ 的 2 倍放大圖，則其各對應邊均互相平行，則 D 點坐標為何？ F 點坐標為何？

解

A 點 \Rightarrow 由 O 右移 2，上移 6 而得
 B 點 \Rightarrow 由 O 右移 4，上移 2 而得
 $\triangle DEF$ 為 $\triangle AOB$ 之 2 倍放大圖
 $\{ D \text{ 點 } (7 + 2 \times 2, 5 + 6 \times 2) = (11, 17)$
 $\{ F \text{ 點 } (7 + 4 \times 2, 5 + 2 \times 2) = (15, 9)$

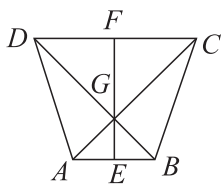


師說 5

〈相似形的應用〉

演練 5

右圖中，四邊形 $ABCD$ 是一個等腰梯形， \overline{EF} 是等腰梯形的高。且對角線 \overline{AC} 、對角線 \overline{BD} 、高 \overline{EF} 三條線段相交於 G 點。 $\overline{AB} = 3$ 公分； $\overline{CD} = 9$ 公分； $\overline{EG} = 2$ 公分。請問： $\overline{GF} = ?$



解

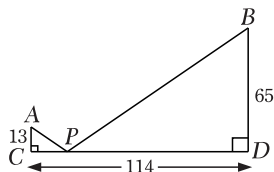
F 為 \overline{CD} 中點， E 為 \overline{AB} 中點。

如圖 $\triangle GDF \sim \triangle GBE$

$$\therefore \overline{GF} : \overline{GE} = \overline{DF} : \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{CD} : \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{9}{2} : \frac{3}{2} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{GF} = \overline{GE} \times 3 = 2 \times 3 = 6 \text{ (公分)}$$

右圖中， $\overline{AC} = 13$ ， $\overline{BD} = 65$ ， $\overline{CD} = 114$ ，若 P 點在 \overline{CD} 上，使得 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 的值最小，則 $\overline{CP} = ?$



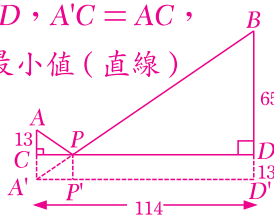
解

如圖，取 A' 點，使 $\overline{AA'} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{A'C} = \overline{AC}$ ，則連接 $\overline{A'B} = \overline{AP} + \overline{PB}$ 之最小值（直線）

又 $\overline{CP} = \overline{A'P}$

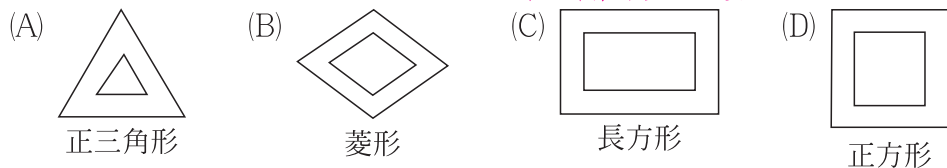
$$\text{且 } \frac{\overline{A'P}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{BD'}} = \frac{13}{13 + 65}$$

$$\text{故 } \overline{A'P} = \overline{CP} = 114 \times \frac{13}{78} = 114 \times \frac{1}{6} = 19 \text{ (單位)}$$



同步評量 1

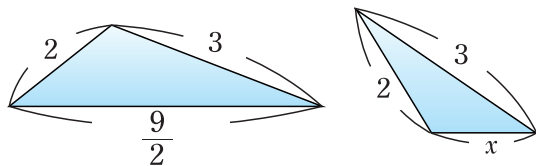
(C) 1. 下列圖形各邊分別平行往內減 1 單位後，得到另一個較小的圖形，則下列哪一組的新舊圖形不相似？



1. 長方形的長、寬各減少 1 單位後，長、寬之比不一定相等，所以新舊圖形不一定相似

(B) 2. 已知右圖中的兩個三角形是相似三角形，求 $x = ?$

- (A) 1 (B) $\frac{4}{3}$
(C) 2 (D) $\frac{5}{2}$

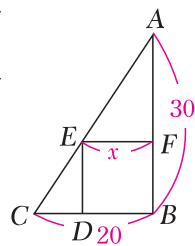


$$2. 2 : 3 : \frac{9}{2} = 4 : 6 : 9 \quad \therefore x : 2 : 3 = 4 : 6 : 9 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

(C) 3. 某人想從一塊兩股長分別為 30 公分與 20 公分的直角三角形紙板中切割出一塊正方形紙板，而且這塊正方形的兩個鄰邊恰好在直角三角形的兩股上（如右圖所示），請問：這塊正方形紙板的邊長是多少公分？

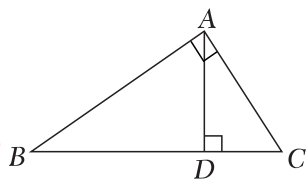
- (A) 8 (B) 10
(C) 12 (D) 15

$$3. \text{ 設 } \overline{EF} = x \Rightarrow \frac{30-x}{30} = \frac{x}{20}, \quad 30x = 600 - 20x \Rightarrow x = 12 \text{ (公分)}$$



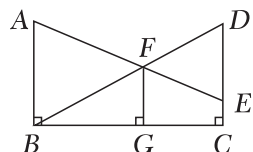
(A) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{BD} = 9$ ， $\overline{DC} = 4$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積 = ?

- (A) 39 (B) 42 4. $\because \angle BAC = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
 $\therefore \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC} = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow \overline{AD} = \pm 6$ (負不合)
(C) 45 (D) 48 $\therefore \triangle ABC$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 13 \times 6 = 39$



(D) 5. 如右圖， $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{DE} = 20$ ， $\overline{CE} = 10$ ，則 $\overline{FG} = ?$

- (A) 25 (B) 15 5. $\because \triangle FAB \sim \triangle FED$
 $\therefore \overline{BF} : \overline{FD} = \overline{AB} : \overline{DE} = 30 : 20 = 3 : 2$ 又 $\overline{FG} \parallel \overline{CD}$
(C) 20 (D) 18 $\therefore \overline{FG} : \overline{CD} = \overline{BF} : \overline{BD} \Rightarrow \overline{FG} : 30 = 3 : 5 \quad \therefore \overline{FG} = 18$





基本觀念題

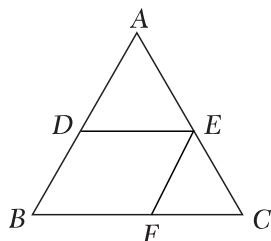
(C) 1. 判斷下列哪一個敘述是正確的？

- (A) 周長一樣的兩矩形必相似 (B) 周長一樣的兩菱形必相似
(C) 周長一樣的兩正方形必相似 (D) 周長一樣的兩等腰梯形必相似

1. ∵ 周長一樣的兩正方形其邊長相等、內角均為 90° ∴ 相似

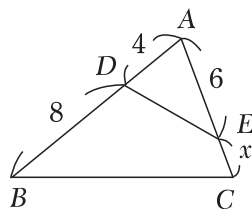
(D) 2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ，若 $\overline{AD} = 2x + 1$ ， $\overline{BD} = x + 2$ ，且 $\overline{CF} : \overline{BF} = 3 : 5$ ，則 $x = ?$

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
2. ∵ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ， $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} = \frac{5}{3}$ ，
 $6x+3 = 5x+10$ ， $x=7$



(B) 3. 如右圖， $\angle AED = \angle ABC$ ，則 $x = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
3. 在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中 ∵ $\angle A = \angle A$ ， $\angle AED = \angle ABC$
∴ $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (AA 相似) ∴ $\overline{AE} : \overline{AB} = \overline{AD} : \overline{AC}$ ，
即 $6 : 12 = 4 : (6+x)$ ， $6(6+x) = 12 \times 4$ ， $36 + 6x = 48$ ，
 $6x = 12$ ∴ $x = 2$

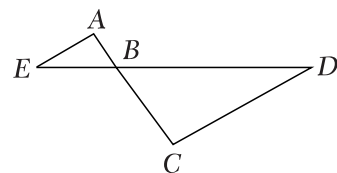


(D) 4. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle EFD$ ，且 $2\angle A : 3\angle B = 4 : 9$ ， $2\angle B : 3\angle C = 2 : 5$ ，求 $\angle D = ?$

- (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°
4. 由 $2\angle A : 3\angle B = 4 : 9 \Rightarrow \angle A : \angle B = 2 : 3$ ，由 $2\angle B : 3\angle C = 2 : 5$
 $\Rightarrow 6\angle C = 10\angle B \Rightarrow 3\angle C = 5\angle B \Rightarrow \angle B : \angle C = 3 : 5$
故 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$ ，設 $\angle A = 2r$ ， $\angle B = 3r$ ， $\angle C = 5r$
由 $2r + 3r + 5r = 180^\circ \Rightarrow r = 18^\circ$ ∴ $\angle D = \angle C = 5r = 5 \times 18^\circ = 90^\circ$

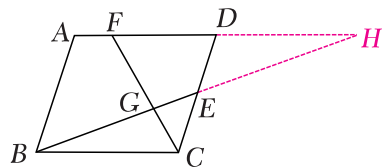
(A) 5. 如右圖，已知 $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = 1.5$ ， $\overline{BC} = 3.5$ ， $\overline{DE} = 10$ ，則 $\overline{BD} = ?$

- (A) 7 (B) 10 (C) 12 (D) 15
5. ∵ $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ ∴ $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{BE} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{BC} = 1.5 : 3.5 = 3 : 7$
∴ $\overline{BD} = 10 \times \frac{7}{3+7} = 7$



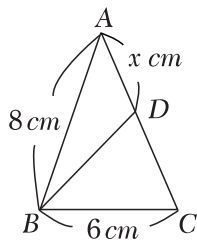
(B) 6. 如右圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{CE} = \overline{DE}$ ， $\overline{DF} = 3\overline{AF}$ ， \overline{BE} 與 \overline{CF} 相交於 G ，求 $\frac{\overline{CG}}{\overline{FG}} = ?$

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{4}{13}$
6. ∵ $\overline{CE} = \overline{DE}$ ， $\angle BCE = \angle EDH$ ， $\angle CEB = \angle DEH$ ∴ $\triangle BCE \cong \triangle HDE$
 $\Rightarrow \overline{DH} = \overline{BC}$ ∴ $\overline{DF} = 3\overline{AF}$ ，設 $\overline{AF} = x$ ，則 $\overline{DF} = 3x$ ， $\overline{DH} = \overline{BC} = 4x$
 $\Rightarrow \overline{FH} = 3x + 4x = 7x$ ∴ $\triangle BCG \sim \triangle HFG$ ∴ $\frac{\overline{CG}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FH}} = \frac{4x}{7x} = \frac{4}{7}$



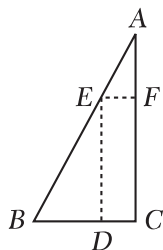
(A) 7. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = \overline{BD}$ ，則 $x = ?$

- (A) 3.5 7. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 中 $\because \overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = \overline{BD}$
 $\therefore \angle ABC = \angle C = \angle CDB \therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$ ，即 $8 : 6 = 6 : (8 - x)$ ，
 $36 = 8(8 - x)$ ， $36 = 64 - 8x$ ， $8x = 28 \therefore x = 3.5$ (公分)
- (B) 4
 (C) 4.5
 (D) 5



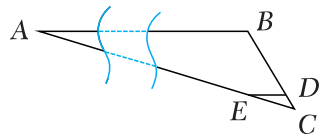
(A) 8. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{FC} = 4\overline{FE}$ ，若 $CDEF$ 為矩形，試求四邊形 $CDEF$ 的面積 = ?

- (A) $\frac{225}{16}$ (B) $\frac{255}{16}$ 8. 令 $\overline{EF} = x$ ， $\overline{FC} = 4x$ ， $\frac{12 - 4x}{12} = \frac{x}{5}$
 $\Rightarrow x = \frac{15}{8}$ ， $4x = \frac{15}{2}$ ，面積 = $\frac{15}{8} \times \frac{15}{2} = \frac{225}{16}$ (平方單位)
- (C) $\frac{225}{8}$ (D) $\frac{255}{8}$



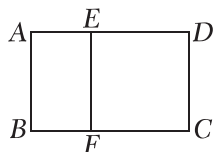
(D) 9. 小安想知道河岸兩側 A、B 兩點的距離，於是他先在與 B 點同側的河岸上選一點 C，連接 \overline{AC} 、 \overline{BC} ，在 \overline{BC} 上取一點 D，過 D 點作 \overline{AB} 的平行線交 \overline{AC} 於 E，今量得 $\overline{CD} = 0.35$ 公尺、 $\overline{DE} = 1$ 公尺、 $\overline{BC} = 14$ 公尺，則 \overline{AB} 長多少公尺？

- (A) 10 (B) 20 9. $\because \overline{DE} \parallel \overline{AB} \therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$ ， $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{0.35}{14} \Rightarrow \overline{AB} = 40$ (公尺)
- (C) 30 (D) 40



(B) 10. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $CDEF$ 為正方形，若長方形 $ABCD \sim$ 長方形 $AEFB$ ，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ 10. 令 $\overline{AD} = x$ ，所以 $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AB} = 1$ ，
 $\overline{AE} = x - 1$ ，所以 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ ， $\frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1}$
 $x^2 - x - 1 = 0$ ， $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (負不合)， $\overline{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (單位)
- (C) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

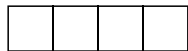


(D) 11. 下列哪一個選項 \overline{PQ} 與 \overline{BC} 平行？

- (A) (B) (C) (D)
11. (D) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{4}{6} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{6}{9}$

(D) 12. 有大小相同的正方形紙片 200 張，右圖是用 4 張正方形紙片所排成的長方形，若想用剩餘的紙片再排成一個與右圖相似的長方形，則最多可用幾張紙片？

- (A) 108 (B) 147 12. 長 : 寬 = 4 : 1，放大 7 倍
 $\Rightarrow (4 \times 7) : (1 \times 7) = 28 : 7 \Rightarrow 28 \times 7 = 196$ 張
- (C) 150 (D) 196

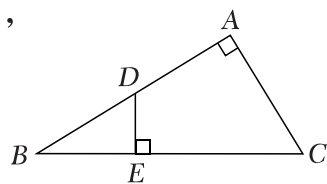


(B) 13. 四邊形 $ABCD$ 的各邊長為 21、12、18、9 公分，另一相似四邊形 $A'B'C'D'$ 的最短邊為 6，則四邊形 $A'B'C'D'$ 之周長為多少公分？

- (A) 30 (B) 40 13. 令四邊形 $A'B'C'D'$ 的周長為 x 公分，
 則 $9 : 6 = (21 + 12 + 18 + 9) : x$ ， $x = 40$
- (C) 50 (D) 60

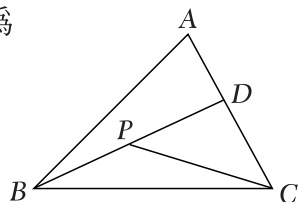
- (C) 14. 如右圖， D 是 \overline{AB} 的中點，且 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，則 $\overline{DE} = ?$

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$
14. $\therefore \overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，且 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$
 $\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ ， $\frac{\overline{DE}}{3} = \frac{2}{5}$ ， $\overline{DE} = \frac{6}{5}$



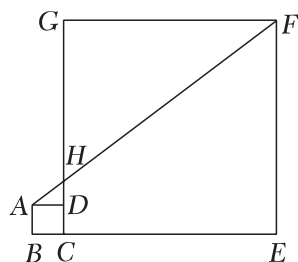
- (B) 15. 如右圖， $\overline{AD} : \overline{CD} = 2 : 3$ ， $\overline{BP} : \overline{PD} = 1 : 1$ ，若 $\triangle ABC$ 面積為 30，則 $\triangle BPC$ 面積為何？

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15
15. $\frac{\overline{BP}}{\overline{PD}} = \frac{1}{1}$ ， $\triangle BPC$ 面積 = $\frac{1}{2} \triangle BCD$ 面積，
 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3}$ ， $\triangle BCD$ 面積 = $\frac{3}{5} \triangle ABC$ 面積
 $\therefore \triangle BPC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times 30 = 9$



- (B) 1. 如右圖，兩正方形 $ABCD$ 、 $GCEF$ 的面積分別為 1、49，且 C 點在 \overline{BE} 上。若 \overline{AF} 與 \overline{CG} 相交於 H 點，則 $\overline{DH} = ?$

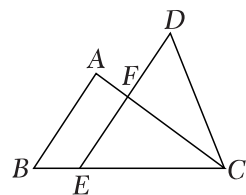
- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{8}$
1. $\overline{CD} = \overline{AD} = 1$ ， $\overline{CG} = \overline{GF} = 7$
 設 $\overline{DH} = x$
 $\therefore \triangle ADH \sim \triangle FGH$
 $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{GH}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{7}{7-1-x}$ ， $x = \frac{3}{4}$



97 基測一

- (B) 2. 右圖為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEC$ 重疊的情形，其中 E 在 \overline{BC} 上， \overline{AC} 交 \overline{DE} 於 F 點，且 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ 。若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEC$ 的面積相等，且 $\overline{EF} = 9$ ， $\overline{AB} = 12$ ，則 $\overline{DF} = ?$

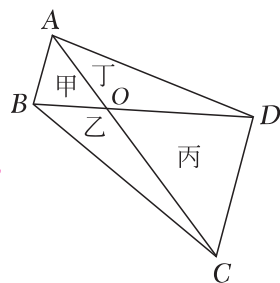
- (A) 3 (B) 7 (C) 12 (D) 15
2. $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DE} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle FEC$ ，且 $\overline{AB} : \overline{EF} = 12 : 9 = 4 : 3$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 面積 : $\triangle FEC$ 面積 = $16 : 9$
 設 $\triangle ABC$ 面積 = $16k$ ， $\triangle FEC$ 面積 = $9k$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 面積 = $\triangle DEC$ 面積， $\therefore \triangle BEF$ 面積 = $\triangle DFC$ 面積 = $7k$
 $\therefore \triangle DFC$ 面積 : $\triangle FEC$ 面積 = $7k : 9k = \overline{DF} : 9$ ， $\therefore \overline{DF} = 7$



97 基測一

- (B) 3. 如右圖，不等長的兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 相交於 O 點，且將四邊形 $ABCD$ 分成甲、乙、丙、丁四個三角形。若 $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD} = 1 : 2$ ，則此四個三角形的關係，下列敘述何者正確？

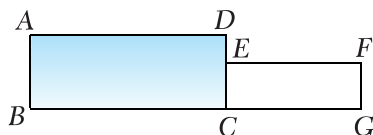
- (A) 甲丙相似，乙丁相似 (B) 甲丙相似，乙丁不相似 (C) 甲丙不相似，乙丁相似 (D) 甲丙不相似，乙丁不相似
3. 若 $\overline{AO} = a$ ， $\overline{OC} = 2a$ ， $\overline{BO} = b$ ， $\overline{OD} = 2b$
 $\therefore \frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}$ 且 $\angle AOB = \angle COD$
 $\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow$ 甲丙相似
 $\therefore \frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{a}{2b}$ ， $\frac{\overline{BO}}{\overline{OC}} = \frac{b}{2a}$ $\therefore \frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} \neq \frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}$
 $\therefore \triangle AOD \not\sim \triangle BOC \Rightarrow$ 乙丁不相似



96 基測一

- (D) 4. 右圖的兩長方形 $ABCD$ 、 $ECGF$ 為相似形，且 \overline{AD} 的對應邊為 \overline{EF} 。若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{FG} = 4$ ， $\overline{BG} = 25$ ，則兩長方形的面積和為何？

- (A) 115 (B) 120 (C) 125 (D) 130
4. 相似形對應邊成比例
 $\Rightarrow \overline{AD} : \overline{EF} = \overline{AB} : \overline{FG} \Rightarrow 6 : 4 \Rightarrow 3 : 2$
 $\Rightarrow \overline{BC} = 25 \times \frac{3}{3+2} = 15$ ， $\overline{CG} = 25 - 15 = 10$ ，
 面積和 = $6 \times 15 + 4 \times 10 = 130$



95 基測二

- (D) 5. 有甲、乙、丙、丁、戊五塊三角形紙板，已知紙板其中的兩內角分別為甲：55°、80°、乙：55°、45°、丙：45°、80°、丁：55°、65°、戊：45°、55°。在甲、乙、丙、丁四塊紙板中，哪一塊與戊不相似？

96 基測一

- (A) 甲 (B) 乙
(C) 丙 (D) 丁

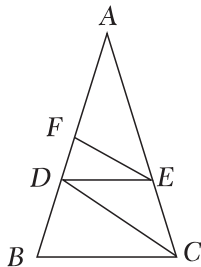
5. (甲) 45°、55°、80°；(乙) 45°、55°、80°；(丙) 45°、55°、80°；
(丁) 55°、60°、65°；(戊) 45°、55°、80°。甲、乙、丙、戊皆為相似形



- (B) 1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ，假設 $\overline{AF} = 12$ ， $\overline{AB} = 27$ ，求 $\overline{AD} = ?$

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24

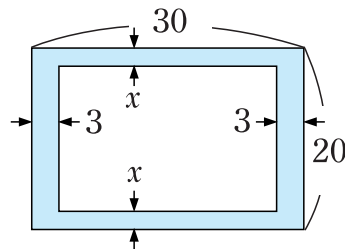
1. $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}, \overline{EF} \parallel \overline{CD} \therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}$
 $\overline{AD}^2 = \overline{AF} \times \overline{AB} = 12 \times 27 \therefore \overline{AD} = \sqrt{12 \times 27} = 18$ (單位)



- (A) 2. 有一長方形的花園，長、寬分別為 30 公尺、20 公尺，今在其內部開闢一條步道，如右圖所示，已知剩餘的花園與原來的長方形相似，求 $x = ?$

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

2. $(30 - 3 \times 2) : (20 - 2x) = 30 : 20$
 $\Rightarrow 480 = 600 - 60x, x = 2$



- (C) 3. 在直角坐標平面上， $A(0, 0)$ 、 $B(12, 0)$ 、 $C(8, 8)$ ，若 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ ， $\overline{AB} : \overline{AB'} = 1 : 2$ ，且 B' 在 x 軸上，則 B' 點坐標為何呢？

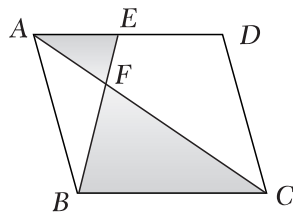
- (A) $(\pm 22, 0)$ (B) $(\pm 23, 0)$
(C) $(\pm 24, 0)$ (D) $(\pm 25, 0)$

3. 設 $B'(x, 0) \because \overline{AB} : \overline{AB'} = 1 : 2$
 即 $12 : |x| = 1 : 2, |x| = 24$
 $\therefore x = \pm 24$
 $\therefore B'$ 點坐標為 $(24, 0)$ 或 $(-24, 0)$

- (B) 4. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， $4\overline{AE} = 3\overline{DE}$ ，求 $\triangle AEF$ 面積： $\triangle BCF$ 面積 = ?

- (A) 3 : 7 (B) 9 : 49 (C) 16 : 25 (D) 16 : 49

4. $\because 4\overline{AE} = 3\overline{DE} \therefore \overline{AE} : \overline{DE} = 3 : 4$
 $\Rightarrow \overline{AE} : \overline{AD} = 3 : (3 + 4) = 3 : 7 \therefore \overline{AE} : \overline{BC} = 3 : 7$
 $\therefore \triangle AEF$ 面積： $\triangle BCF$ 面積 = $3^2 : 7^2 = 9 : 49$

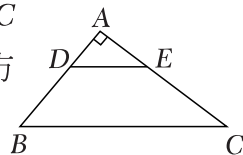


- (C) 5. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{AC} = 12$ ， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上兩點且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 3$ ，則四邊形 $BDEC$ 面積為多少平方單位？

- (A) 34 (B) 36 (C) 48 (D) 64

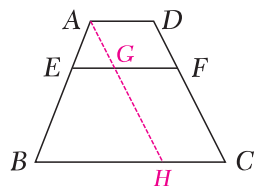
5. $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC} \therefore \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$
 即 $3 : 9 = \overline{AE} : 12 \Rightarrow \overline{AE} = 4$

\therefore 四邊形 $BDEC$ 的面積 = $\triangle ABC$ 面積 - $\triangle ADE$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 48$ (平方單位)



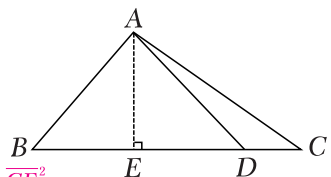
(B) 6. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AE} : \overline{BE} = 1 : 2$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 9$ ，則 $\overline{EF} = ?$

- (A) 4
 (B) 5
 (C) 6
 (D) 7
6. \therefore 作 $\overline{AH} \parallel \overline{CD}$ ，交 \overline{EF} 於 G ，交 \overline{BC} 於 H
 則 $\overline{CH} = \overline{FG} = \overline{AD} = 3$ ，
 $\therefore \overline{BH} = 9 - 3 = 6$ ，
 又 $\overline{EG} : \overline{BH} = \overline{AE} : \overline{AB} \therefore \overline{EG} : 6 = 1 : (1+2)$
 $\Rightarrow \overline{EG} = 2 \therefore \overline{EF} = 2 + 3 = 5$ (單位)



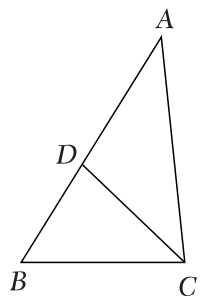
(C) 7. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 4$ ，以 A 為圓心， \overline{AB} 為半徑畫弧交 \overline{BC} 於 D ，則 $\overline{BD} = ?$

- (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{9}{5}$
 (C) $\frac{18}{5}$ (D) $\frac{21}{5}$
7. 令 $\overline{BE} = x$ ， $\overline{CE} = 5 - x$ ， $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2$
 $3^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2$ ， $x = \frac{9}{5}$ ， $\overline{BD} = 2\overline{BE} = \frac{18}{5}$



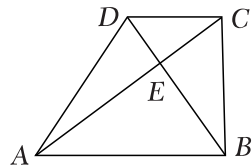
(C) 8. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BCD = \angle A$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 4$ ，則 $\overline{BC} = ?$

- (A) 4
 (B) 5
 (C) 6
 (D) 7
8. $\therefore \angle BCD = \angle A$ ， $\angle B = \angle B \therefore \triangle ABC \sim \triangle CBD$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{BD}$ ，即 $9 : \overline{BC} = \overline{BC} : 4$ ， $\overline{BC}^2 = 36$
 $\therefore \overline{BC} = \pm 6$ (負不合)



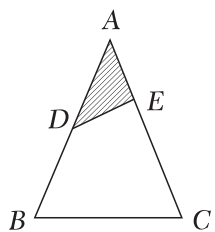
(B) 9. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\triangle DCE$ 面積： $\triangle DCB$ 面積 = 1 : 3，則 $\triangle DCE$ 面積： $\triangle ABE$ 面積 = ?

- (A) 1 : 2
 (B) 1 : 4
 (C) 1 : 6
 (D) 1 : 8
9. $\therefore \triangle DCE$ 面積： $\triangle DCB$ 面積 = 1 : 3 $\therefore \overline{DE} : \overline{DB} = 1 : 3$
 $\Rightarrow \overline{DE} : \overline{BE} = 1 : 2$ ，而 $\triangle DCE \sim \triangle BAE$
 $\therefore \triangle DCE$ 面積： $\triangle ABE$ 面積 = $\overline{DE}^2 : \overline{BE}^2 = 1 : 4$



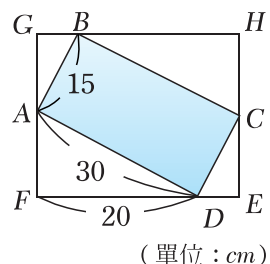
(A) 10. 設 D 、 E 分別為 $\triangle ABC$ 中 \overline{AB} 及 \overline{AC} 上的點，若 $\overline{AD} = \overline{DB}$ 且 $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{EC}$ ，則 $\triangle ADE$ 面積與四邊形 $BCED$ 面積之比值為何？

- (A) $\frac{1}{5}$
 (B) $\frac{1}{6}$
 (C) $\frac{1}{2}$
 (D) 1
10. 如圖，因 $\overline{AD} = \overline{DB}$ ，且 $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{EC}$ ，
 所以 $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} : 1 = \frac{1}{6} : 1 = 1 : 6$ ，
 又四邊形 $BCED$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積 - $\triangle ADE$ 面積，
 因此 $\frac{\triangle ADE \text{ 面積}}{\text{四邊形 } BCED \text{ 面積}} = \frac{1}{6 - 1} = \frac{1}{5}$



(C) 11. 如右圖， $ABCD$ 及 $EFGH$ 均為矩形，若 $\overline{AB} = 15$ 、 $\overline{AD} = 30$ 、 $\overline{DF} = 20$ ，請問： $\overline{EC} = ?$

- (A) 15
 (B) 12
 (C) 10
 (D) $10\sqrt{3}$
11. 由圖形可知， $\triangle ECD \sim \triangle FDA$ ，又 $\overline{AB} = \overline{CD} = 15 \text{ cm}$ ，
 $\overline{DA} = 30 \text{ cm}$ ， $\overline{FD} = 20 \text{ cm}$ ，因此 $\frac{\overline{EC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{DA}} \Rightarrow \frac{\overline{EC}}{15} = \frac{20}{30}$
 $\Rightarrow \overline{EC} = \frac{20}{30} \times 15 = 10 \text{ (cm)}$

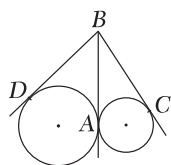


1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆

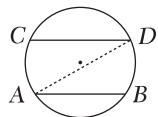
Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

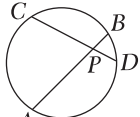
- (○) 1. 當兩圓外離時公切線總數有 4 條。
 ⚡ 內公切線與外公切線各 2 條，共 4 條 能力一
- (×) 2. 切線與圓的交點稱為切點且切線與直徑平行。
 ⚡ 切線與圓的交點稱為切點且切線與直(半)徑垂直
- (×) 3. 圓內的弦心距愈長，代表弦愈長。
 ⚡ 弦心距愈長，弦愈短
- (○) 4. 如下圖(一)，兩圓外切於 A， \overline{BA} 是內公切線， \overline{BD} 與 \overline{BC} 為切線，則 $\overline{BD} = \overline{BC}$ 。
 ⚡ 因為 $\overline{BD} = \overline{BA}$ ， $\overline{BC} = \overline{BA}$ ，所以 $\overline{BD} = \overline{BC}$
- (×) 5. 如下圖(二)， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，因為 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ ，所以 $\widehat{AC} + \widehat{CD} = \widehat{BD} + \widehat{AB}$ 。
 ⚡ $\widehat{AC} + \widehat{CD} = \widehat{BD} + \widehat{AB}$ 不一定成立，因為弦心距不等長 能力二
- (○) 6. 如下圖(三)， \overline{AB} 與 \overline{CD} 兩弦在圓 O 內交於一點 P，則 $\widehat{AC} + \widehat{BD} = 2\angle APC$ 。
 ⚡ 圓內角 $\angle APC = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$
- (×) 7. 如下圖(四)， \overline{AB} 與 \overline{CD} 是圓內兩弦，若 \overline{AB} 與 \overline{CD} 不平行，且 $\overline{AB} > \overline{CD}$ ，則 $\angle OEF < \angle OFE$ 。
 ⚡ 因為 $\overline{AB} > \overline{CD}$ 且 $\overline{OF} > \overline{OE}$ ，所以 $\triangle OEF$ 中， $\angle OEF > \angle OFE$
- (×) 8. 如下圖(五)，則 $\angle ABC = \angle CDE = \frac{1}{2}\widehat{DC}$ 。
 ⚡ $\angle ABC = \angle CDE \neq \frac{1}{2}\widehat{DC}$ ($\because \angle CDE$ 非弦切角)
- (○) 9. 如下圖(六)，圓內接四邊形 ABCD， \overline{AC} 平分 $\angle BAD$ ， $\overline{AC} = \overline{CE}$ ，且 A、D、E 三點共線，則 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 。
 ⚡ $\because \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 2 = \angle E$ ， $\angle 1 = \angle E$ ， $\angle CDE = \angle B$ ， $\overline{AC} = \overline{CE} \therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC$ (AAS) 能力三
- (×) 10. 如下圖(七)，則 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 。
 ⚡ 如圖， $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$



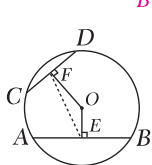
圖(一)



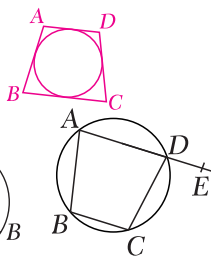
圖(二)



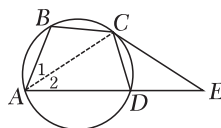
圖(三)



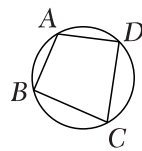
圖(四)



圖(五)



圖(六)



圖(七)

數學 健康狀況檢核表

※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

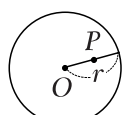
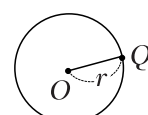
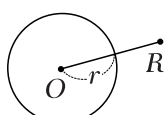
答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力一 圓、點與直線

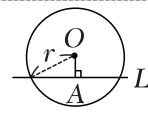
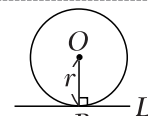
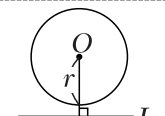
一 點與圓的關係

在平面上點 P 與圓 O 的位置關係：

P 點在圓 O 內	Q 點在圓 O 上	R 點在圓 O 外
		
$\overline{OP} < r$ (半徑)	$\overline{OQ} = r$ (半徑)	$\overline{OR} > r$ (半徑)

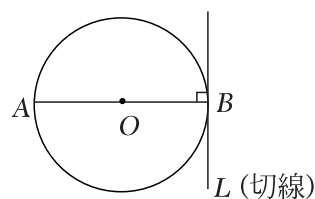
二 直線與圓

在平面上直線 L 與圓 O 的關係：

L 與圓 O 相交兩點	L 與圓 O 相交一點	L 與圓 O 不相交
		
$\overline{OA} < r$ (半徑)	$\overline{OB} = r$ (半徑)	$\overline{OC} > r$ (半徑)

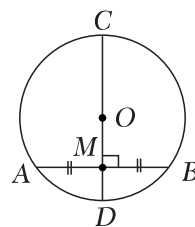
三 切線的性質

1. 過一圓直徑端點的垂線為此圓之切線。
2. 圓心到切線的距離等於圓的半徑。
3. 圓心與切點的連線必垂直過此切點的切線。



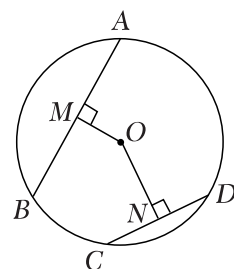
四 弦的性質： \overline{AB} 為圓 O 的弦

1. 垂直於弦的直徑必平分此弦。
2. 弦的垂直平分線必通過圓心。
3. 圓心與弦的中點連線，必垂直此弦。



五 弦心距的性質：(弦與圓心的距離稱為弦心距)

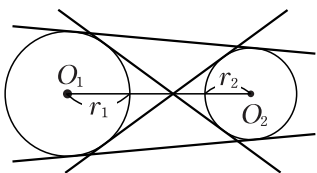
1. \overline{OM} 為弦 \overline{AB} 的弦心距 $\Leftrightarrow \overline{OM}$ 垂直平分 \overline{AB} 。
2. 同圓：(1) 等弦 $\xleftrightarrow{\text{對}}$ 等弦心距
(2) 大弦 $\xleftrightarrow{\text{對}}$ 小弦心距
(3) 小弦 $\xleftrightarrow{\text{對}}$ 大弦心距



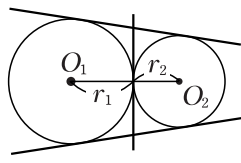
六 兩圓的位置關係，連心線長和半徑的關係與公切線數

1. 設圓 O_1 與圓 O_2 的半徑各為 r_1 、 r_2 ($r_1 > r_2$)，連心線長為 $\overline{O_1O_2}$ 。

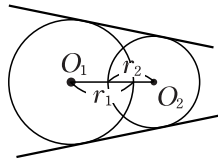
兩圓關係	連心線長	外公切線數	內公切線數	公切線總數	圖示
外離	$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$	2	2	4	圖(一)
外切	$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$	2	1	3	圖(二)
相交於兩點	$r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$	2	0	2	圖(三)
內切	$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$	1	0	1	圖(四)
內離	$0 \leq \overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$	0	0	0	圖(五)



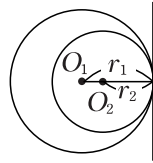
圖(一)



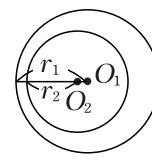
圖(二)



圖(三)



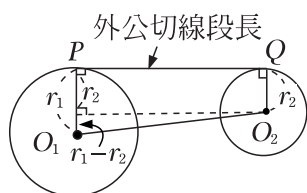
圖(四)



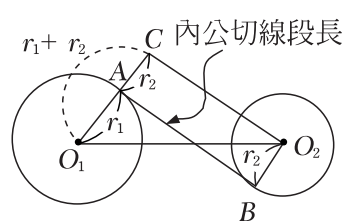
圖(五)

2. 外公切線段長 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2}$ 。 3. 內公切線段長 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2}$ 。

圖訣 外 = $\sqrt{\text{心}^2 - \text{差}^2}$



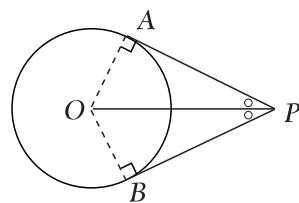
圖訣 內 = $\sqrt{\text{心}^2 - \text{和}^2}$



4. 若兩圓外切，則其外公切線段長為 $2\sqrt{r_1r_2}$ 。

七 切線長性質

- \overline{PA} 、 \overline{PB} 分別切圓 O 於 A 、 B ，則
- $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。
 - $\angle APO = \angle BPO$ 。
 - $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$ 。



八 圓與比例線段

名稱	圓內幕性質	圓外幕性質	切割性質
關係	$\overline{AE} \times \overline{BE} = \overline{CE} \times \overline{DE}$	$\overline{AD} \times \overline{AE} = \overline{AB} \times \overline{AC}$	$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AT}^2$ (\overline{AT} 為切線)
圖形			

師說 1

〈點、直線與圓的位置關係〉

演練 1

設圓 O 直徑為 10，圓心為 $(1, -2)$ ，點 P 坐標為 $(6, -1)$ ，點 Q 坐標為 $(5, 1)$ ，試判斷 P 、 Q 兩點與圓 O 的位置關係？

解

(1) 根據距離公式

$$\overline{OP} = \sqrt{(6-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}$$

直徑 = 10 \therefore 半徑 = 5，而 $\sqrt{26} > 5$
 $\therefore P$ 點在圓 O 外

(2) 同理

$$\overline{OQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 = \text{半徑}$$

\therefore 點 Q 在圓 O 上

設圓 O 之半徑為 $\sqrt{26}$ ，圓心為 $(2, 3)$ ，直線 L 之方程式為 $y = -2$ ，則直線 L 與圓 O 之位置關係如何？

解

過圓心 O 作直線 L 之垂直線，設垂足為 P ，

則 P 點之坐標 $(2, -2)$ 圓心 O 到直線 L 的距離，即為 \overline{OP} 之長 $\therefore \overline{OP} = |3 - (-2)| = 5$

$$\therefore \overline{OP} = 5 < \sqrt{26} = \text{半徑}$$

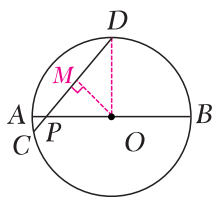
\therefore 直線 L 與圓 O 相交於兩點，為圓 O 之一條割線

師說 2

〈弦心距〉

演練 2

如右圖，已知 \overline{AB} 是圓 O 的直徑，弦 \overline{CD} 交 \overline{AB} 於 P ，若 $\overline{AP} = 2$ ， $\overline{BP} = 12$ ， $\overline{CP} = 4$ ， $\overline{PD} = 6$ ，求 \overline{CD} 的弦心距為何？



解

(1) 連接 \overline{OD} ，作 $\overline{OM} \perp \overline{CD}$

$$(2) \overline{AB} = 2 + 12 = 14 \Rightarrow \overline{OD} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

$$(3) \overline{CD} = 4 + 6 = 10 \Rightarrow \overline{DM} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

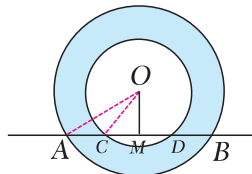
(4) 直角 $\triangle OMD$ 中， $\angle OMD = 90^\circ$

$$\therefore \overline{CD} \text{ 的弦心距} = \overline{OM} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DM}^2}$$

$$= \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24}$$

$$= 2\sqrt{6} \text{ (單位)}$$

如右圖， \overline{AB} 為兩同心圓中大圓的弦， \overline{CD} 為小圓的弦，若 $\overline{AB} = 16$ 公分， $\overline{CD} = 8$ 公分， $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ ，則色塊區域的面積為多少平方公分？



解

連接 \overline{OA} 、 \overline{OC} ，

則色塊區域的面積

$$= \pi \times \overline{OA}^2 - \pi \times \overline{OC}^2 = \pi \times (\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2)$$

$$= \pi \times [(\overline{AM}^2 + \overline{OM}^2) - (\overline{CM}^2 + \overline{OM}^2)]$$

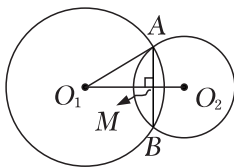
$$= \pi \times (8^2 - 4^2) = 48\pi \text{ (平方公分)}$$

師說 3

〈兩圓位置關係〉

演練 3

如右圖，設圓 O_1 與圓 O_2 之公弦為 \overline{AB} ，若兩圓的半徑分別為 20 cm、13 cm， $\overline{AB} = 24$ cm，求連心線段 $\overline{O_1O_2} = ?$



解

$$\therefore \overline{O_1O_2} \text{ 垂直平分 } \overline{AB} \text{ 於 } M \quad \therefore \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 12$$

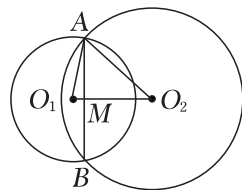
$$\text{又 } \overline{O_1A} = 20, \overline{O_2A} = 13$$

$$\therefore \overline{O_1M} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$$

$$\overline{O_2M} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$\text{故 } \overline{O_1O_2} = 16 + 5 = 21 \text{ (cm)}$$

如圖，圓 O_1 與圓 O_2 交於 A 、 B 兩點，若圓 O_1 半徑為 13，圓 O_2 半徑為 15，且 $\overline{AB} = 24$ ，求 $\overline{O_1O_2} = ?$



解

$$2\overline{AM} = \overline{AB} = 24, \overline{AM} = 12,$$

$$\overline{O_1M} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\overline{O_2M} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

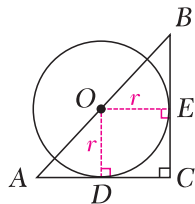
$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1M} + \overline{O_2M} = 14 \text{ (單位)}$$

師說 4

〈圓與切線關係〉

演練 4

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， O 在 \overline{AB} 上，圓 O 與 \overline{AC} 、 \overline{BC} 分別切於 D 、 E ， r 為圓 O 的半徑，試求 $r = ?$



解

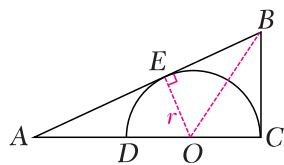
連接 \overline{OC} ，

$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle BOC$ 面積 + $\triangle AOC$ 面積

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times 3 \times r$$

$$\Rightarrow r = \frac{3 \times 4}{3 + 4} = \frac{12}{7} \text{ (單位)}$$

如圖，直角 $\triangle ABC$ 中，有一個半圓，圓心 O 在 \overline{AC} 上，切 \overline{AB} 於 E 點，切 \overline{BC} 於 C 點，若 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，則半圓的半徑 = ?



解

設圓半徑為 r ，連接 \overline{OE} ， \overline{OB}

$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle BOC$ 面積

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r\right) + \left(\frac{1}{2} \times r \times 6\right)$$

$$48 = 10r + 6r, r = 3$$

同步評量 1

(C) 1. 已知兩等圓外切且其半徑為 8 公分，若兩圓的外公切線長 17 公分，則兩圓的位置關係為何？

1. \therefore 連心線長 = $8 + 8 = 16$ ，又 $17 > 16$ \therefore 兩圓外離

(A) 內切 (B) 外切 (C) 外離 (D) 相交兩點

(A) 2. 有大小兩圓，其面積比為 9 : 16，兩圓外切時，連心線長 14 公分，則兩圓內切時，其連心線長是多少公分？

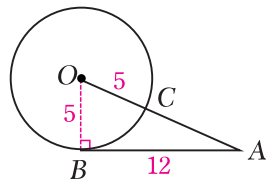
2. 面積比為 9 : 16 \Rightarrow 半徑比為 3 : 4 \therefore 設兩圓半徑為 $3x$ 、 $4x$
 $3x + 4x = 14, x = 2 \Rightarrow$ 兩圓半徑為 6、8，
 故內切時連心線長 = $8 - 6 = 2$ (公分)

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(B) 3. 如右圖， \overline{AB} 切圓 O 於 B ， \overline{AO} 交圓 O 於 C ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{OC} = 5$ ，求 $\overline{AC} = ?$

3. (1) 連接 \overline{OB} $\therefore \overline{AB}$ 為切線 $\therefore \overline{OB} \perp \overline{AB}$
 (2) $\therefore \overline{AB} = 12, \overline{OB} = \overline{OC} = 5$
 $\therefore \overline{OA} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$
 (3) $\therefore \overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC} = 13 - 5 = 8$ (單位)

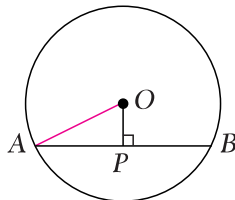
(A) 5 (B) 8
 (C) 13 (D) 15



(B) 4. 已知 P 為圓 O 內部一點，且 $\overline{OP} = 5$ ，而過 P 點的諸弦中，最長的弦其長度為 26 公分，則最短的弦其長度為多少公分？

4. 最長的弦就是直徑 $\therefore r = \frac{1}{2} \times 26 = 13$ ，連接 \overline{OA} ，
 $\overline{AP} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \therefore \overline{AB} = 2 \times 12 = 24$ (公分)

(A) 20 (B) 24
 (C) 25 (D) 26



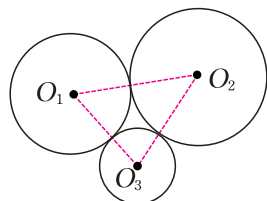
(D) 5. 如右圖， O_1 、 O_2 和 O_3 分別是兩兩相互外切的三圓的圓心，已知 $\overline{O_1O_2} = 5$ 公分， $\overline{O_2O_3} = 4$ 公分， $\overline{O_3O_1} = 3$ 公分，求此三圓的半徑和為多少？

5. (1) 設圓 O_1 半徑為 r_1 公分，圓 O_2 半徑為 r_2 公分，圓 O_3 半徑為 r_3 公分
 (2) 連接 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_1}$ 必分別過切點

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \overline{O_1O_2} = 5 \cdots \text{①} \\ r_2 + r_3 = \overline{O_2O_3} = 4 \cdots \text{②} \\ r_3 + r_1 = \overline{O_3O_1} = 3 \cdots \text{③} \end{cases}$$

 把① + ② + ③得 $2(r_1 + r_2 + r_3) = 12 \therefore r_1 + r_2 + r_3 = 6 \cdots \text{④}$

(A) 9 公分
 (B) 8 公分
 (C) 7 公分
 (D) 6 公分

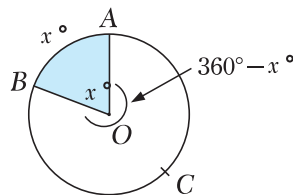


能力 二 圓形與角度

一 圓心角與弧的度數

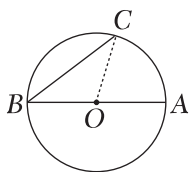
一個圓弧的弧度即是此圓弧所對圓心角的度數。

1. 圓心角 $\angle AOB = x^\circ$
2. 圓弧弧度： $\widehat{AB} = x^\circ$ (劣弧)； $\widehat{ACB} = 360^\circ - x^\circ$ (優弧)



二 圓周角

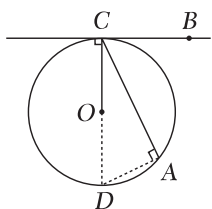
圓周角



- (1) $\because \overline{OB} = \overline{OC}, \therefore \angle ABC = \angle BCO$
- (2) $\because \angle AOC = \angle BCO + \angle ABC, \therefore \angle AOC = 2\angle ABC$
- (3) $\because \angle AOC = \widehat{AC}, \therefore \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\widehat{AC}$

三 弦切角、圓內角與圓外角

弦切角

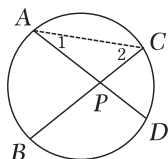


$$\angle ACB = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

證明：

$$\begin{aligned} \text{因為 } \angle ACB + \angle DCA &= 90^\circ = \angle CDA + \angle DCA \\ \Rightarrow \angle ACB &= \angle CDA = \frac{1}{2}\widehat{AC} \end{aligned}$$

圓內角

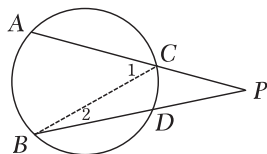


$$\angle APB = \angle CPD = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD})$$

證明：

$$\angle APB = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{CD} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD})$$

圓外角



$$\angle APB = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$$

證明：

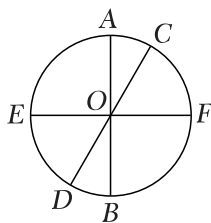
$$\angle APB = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{AB} - \frac{1}{2}\widehat{CD} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$$

師說 5

<圓心角>

演練 5

如圖， O 為圓心， \overline{AB} 為直徑，若 $\widehat{AC} : \widehat{CF} : \widehat{FB} = 1 : 2 : 3$ ，則 $\angle DOB = ?$



解

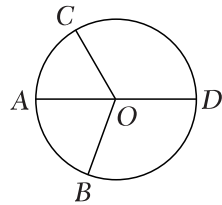
$\because \overline{AB}$ 、 \overline{CD} 與 \overline{EF} 皆為直徑

$$\therefore \angle AOC = \angle DOB$$

$$\because \widehat{AFB} = 180^\circ, \therefore \widehat{AC} = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

$$\angle DOB = \angle AOC = \widehat{AC} = \underline{30^\circ}$$

如圖， \widehat{AB} 與 \widehat{CD} 的弧長比為 $5 : 6$ ，且 $\angle COD = 120^\circ$ ，則 $\angle AOB = ?$



解

\widehat{AB} 弧長： \widehat{CD} 弧長 = $\angle AOB : \angle COD$

$$5 : 6 = \angle AOB : 120^\circ$$

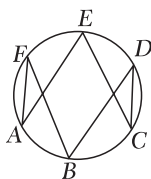
$$\angle AOB = 120^\circ \times \frac{5}{6} = \underline{100^\circ}$$

師說 6

〈圓周角與弧〉

演練 6

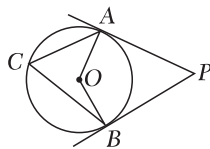
如圖，圓周上 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 六點，若 $\angle AFB = 21^\circ$ ， $\angle AEC = 49^\circ$ ，試求 $\angle BDC = ?$



解

$$\begin{aligned} \angle AFB &= \frac{1}{2} \widehat{AB} = 21^\circ, \widehat{AB} = 42^\circ, \\ \angle AEC &= \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 49^\circ, \widehat{ABC} = 98^\circ, \\ \angle BDC &= \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} (\widehat{ABC} - \widehat{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (98^\circ - 42^\circ) = \underline{28^\circ} \end{aligned}$$

如圖， \overrightarrow{PA} 、 \overrightarrow{PB} 分別切圓 O 於 A 、 B 兩點，已知 $\angle P = 48^\circ$ ，試求 $\angle AOB - \angle ACB = ?$



解

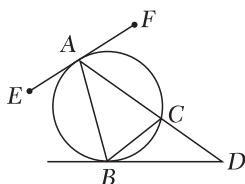
$$\begin{aligned} \because \overline{OA} \perp \overline{PA}, \overline{OB} \perp \overline{PB} &\Rightarrow \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ \\ \angle AOB &= 360^\circ - (2 \times 90^\circ) - 48^\circ = 132^\circ = \widehat{AB} \\ \therefore \angle ACB &= \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 132^\circ = 66^\circ \\ \angle AOB - \angle ACB &= 132^\circ - 66^\circ = \underline{66^\circ} \end{aligned}$$

師說 7

〈弦切角〉

演練 7

如圖， \overline{EF} 與 \overline{BD} 為圓的切線， A 、 C 分別為其切點，若 $\angle CBD = 38^\circ$ ， $\angle D = 44^\circ$ ，試求：

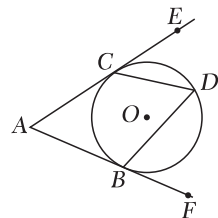


- (1) \widehat{AB} 的度數？
- (2) $\angle FAC$ 的度數？

解

$$\begin{aligned} (1) \angle ACB &= \frac{1}{2} \widehat{AB}, \\ \angle ACB &= \angle CBD + \angle D = 38^\circ + 44^\circ = 82^\circ \\ \therefore \widehat{AB} &= 2\angle ACB = \underline{164^\circ} \\ (2) \angle FAC &= 180^\circ - \angle EAB - \angle BAC \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AB} - \angle CBD \\ &= 180^\circ - 82^\circ - 38^\circ \\ &= \underline{60^\circ} \end{aligned}$$

如圖， A 為圓外一點， \overrightarrow{AE} 與 \overrightarrow{AF} 切圓於 C 、 B 兩點， D 為圓上一點。若 $\angle A = 66^\circ$ ，試求：



- (1) $\angle CDB = ?$
- (2) $\angle ECD + \angle DBF = ?$

解

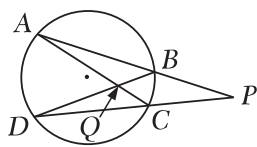
$$\begin{aligned} (1) \widehat{BC} &= \angle BOC = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ, \\ \angle CDB &= \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} \times 114^\circ = \underline{57^\circ} \\ (2) \angle ECD + \angle DBF &= \frac{1}{2} \widehat{CD} + \frac{1}{2} \widehat{BD} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{CDB} \\ &= \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{BC}) \\ &= 180^\circ - \angle BDC \\ &= 180^\circ - 57^\circ = \underline{123^\circ} \end{aligned}$$

師說 8

〈圓內角、圓外角〉

演練 8

如圖， \overline{AB} 與 \overline{CD} 的延長線交於 P 點， \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 Q 點。

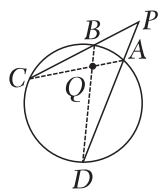


- (1) 若 $\angle A Q D = 2 \angle P$ ，求 $\widehat{AD} : \widehat{BC}$ 的比值？
 (2) 若 $\angle A P D = 45^\circ$ ，且 $\widehat{AD} : \widehat{BC} = 5 : 2$ ，求 $\angle A C D = ?$

解

- (1) $\angle A Q D = 2 \angle P$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = 2 \times \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC})$
 $\Rightarrow \widehat{AD} = 3\widehat{BC} \Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{\widehat{BC}} = \underline{3}$
- (2) $\widehat{AD} = 5r$ ， $\widehat{BC} = 2r$ ，
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(5r - 2r) = 45^\circ$ ， $3r = 90^\circ$ ， $r = 30^\circ$
 $\widehat{AD} = 5 \times 30^\circ = 150^\circ$ ，
 $\angle A C D = \frac{1}{2}\widehat{AD} = \underline{75^\circ}$

如圖，圖上有 A 、 B 、 C 、 D 四點及圓外一點 P ，且 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 3 : 7 : 9 : 11$ ，則 $\angle P = ?$ $\angle C Q B = ?$



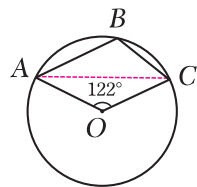
解

$$\begin{aligned} \angle P &= \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\left(360^\circ \times \frac{9}{30} - 360^\circ \times \frac{3}{30}\right) \\ &= \frac{1}{2}(108^\circ - 36^\circ) \\ &= \underline{36^\circ} \\ \angle C Q B &= \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DA}) \\ &= \frac{1}{2}\left(360^\circ \times \frac{7}{30} + 360^\circ \times \frac{11}{30}\right) \\ &= \frac{1}{2}(84^\circ + 132^\circ) \\ &= \underline{108^\circ} \end{aligned}$$

同步評量 2

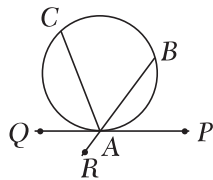
(B) 1. 如右圖，若 $\angle A O C = 122^\circ$ ，則 $\angle B A O + \angle B C O = ?$

- (A) 110° 1. 連接 \overline{AC} ， $\therefore \angle A O C = 122^\circ$ ， $\therefore \widehat{AB} + \widehat{BC} = 122^\circ$
 (B) 119° $\angle B C A + \angle B A C = \frac{1}{2} \times 122^\circ = 61^\circ$ ， $\angle O A C + \angle O C A = 58^\circ$ ，
 (C) 101° $\angle B A O + \angle B C O = 61^\circ + 58^\circ = 119^\circ$
 (D) 191°



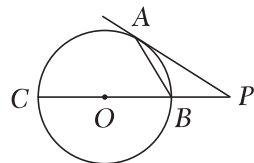
(A) 2. 如右圖， \overline{PQ} 為圓之切線， A 為切點，若 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ ， $\angle R A Q = 52^\circ$ ，求 $\angle Q A C = ?$

- (A) 64° (B) 66° 2. $\therefore \angle R A Q = 52^\circ = \angle B A P$ ， $\therefore \widehat{AB} = 52^\circ \times 2 = 104^\circ$ ，
 (C) 68° (D) 70° $\widehat{AC} = (360^\circ - 104^\circ) \times \frac{1}{2} = 128^\circ$ ，
 $\angle Q A C = 128^\circ \times \frac{1}{2} = 64^\circ$



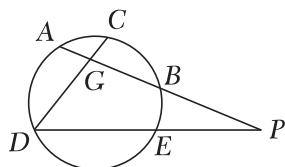
(B) 3. 如右圖， \overline{PA} 為圓之切線， A 為切點， \overline{BC} 為直徑，若 $\widehat{AC} : \widehat{AB} = 3 : 1$ ，求 $\angle P A B = ?$

- (A) 20° (B) 22.5° 3. $\angle P A B = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\left(180^\circ \times \frac{1}{3+1}\right) = 22.5$
 (C) 30° (D) 32.5°

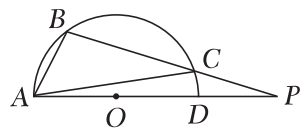


(D) 4. 如右圖，已知 $\widehat{AD} = 75^\circ$ ， $\widehat{BC} = 65^\circ$ ，求 $\angle A G C = ?$

- (A) 92° 4. $\angle A G D = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(75^\circ + 65^\circ) = 70^\circ$ ，
 (B) 95° $\angle A G C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
 (C) 105°
 (D) 110°



- (C) 5. 如右圖， \overline{AD} 是半圓的直徑，若 $\angle P = 25^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，求 $\angle ACB = ?$
- (A) 25° (B) 30° (C) 35° (D) 40°



$$5. \widehat{BC} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \\ \widehat{AB} - \widehat{CD} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ \end{cases}$$

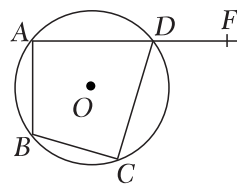
$$\Rightarrow \widehat{AB} = 70^\circ, \angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = 35^\circ$$

能力 圓與多邊形

一 圓內接四邊形性質：(對角互補)

如圖(一)，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的圓內接四邊形，
 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， $\angle B = \angle CDF$ 。

※ 正方形、長方形和等腰梯形皆有一外接圓。



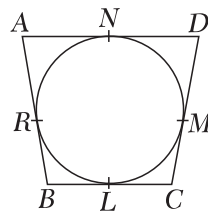
圖(一)

二 圓外切四邊形性質

如圖(二)，四邊形 $ABCD$ 的四邊分別與圓相切，則

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}。$$

※ 正方形、菱形和鸞形皆有一內切圓。

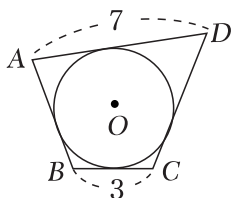


圖(二)

師說 9 <圓與四邊形的關係>

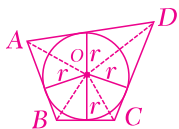
演練 9

如右圖， $ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形，若 $ABCD$ 的面積是 15，則圓 O 的半徑是多少？

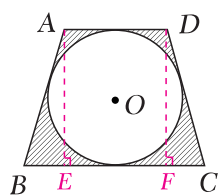


解

- $\because ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形
 $\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} = 10$
- $\triangle AOD$ 面積 + $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle BOC$ 面積 + $\triangle COD$ 面積
 = 四邊形 $ABCD$ 面積
 設圓半徑為 r
 $\Rightarrow \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \times r = 15$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 20 \times r = 15, 10r = 15$
 $\Rightarrow r = 1.5$ (單位)



如右圖，梯形 $ABCD$ 外切於圓 O ，且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ，求圓 O 面積為何？



解

- $\because \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ ，又 $\overline{AB} = \overline{CD}$
 $\therefore 3 + 5 = 2\overline{AB} = 2\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} = 4$
- 作高 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{BC}$
 $\therefore \overline{BE} = \overline{CF} = \frac{5-3}{2} = 1$
 $\therefore \overline{AE} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$
 \Rightarrow 圓 O 的半徑 = $\frac{\sqrt{15}}{2}$
- 故圓 O 的面積 = $\pi \times \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2$
 $= \frac{15}{4} \pi$ (平方單位)

同步評量 3

(D) 1. 等腰梯形 $ABCD$ 外切於圓 O ，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，已知一腰 $\overline{AB} = 8$ 公分，則其中線長為多少公分？

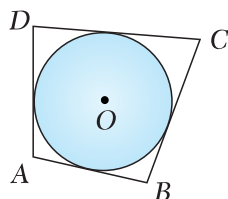
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

1. $\overline{BC} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD} = 8 + 8 = 16$ ，
中線長 $= \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ (公分)

(D) 2. 如右圖，圓外切四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{CD} = 10$ ，則 $\overline{AD} + \overline{BC} = ?$

- (A) 7 (B) 10 (C) 15 (D) 17

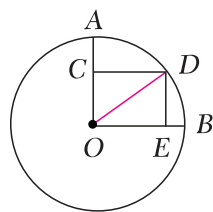
2. \therefore 圓外切四邊形中
 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{CD} + \overline{AB} = 10 + 7 = 17$ (公分)



(B) 3. 如右圖， $COED$ 為矩形， $\overline{CD} = 4$ ， $\overline{DE} = 3$ ，求圓 O 的周長 = ?

- (A) 5π
(B) 10π
(C) 15π
(D) 20π

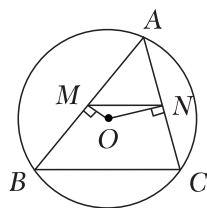
3. 連接 \overline{OD} ， $\overline{OE} = \overline{CD} = 4$ ， $\overline{OD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 \therefore 圓 O 的周長 $= 2 \times 5 \times \pi = 10\pi$ (單位)



(A) 4. 如右圖，在圓 O 中， \overline{AB} 、 \overline{AC} 是兩條弦， $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 於 M ， $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ 於 N 。若 $\overline{BC} = 10$ ，求 $\overline{MN} = ?$

- (A) 5 (B) 4 (C) 6 (D) 3.5

4. $\therefore \overline{OM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ $\therefore M$ 、 N 是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點
 $\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ (單位)



基本觀念題

(B) 1. 設圓 O 半徑為 $\sqrt{23}$ ，圓心 O 坐標為 $(-2, 3)$ ，直線 L 方程式為 $y = -1$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) L 為圓 O 的切線 (B) L 為圓 O 的割線
(C) L 與圓 O 不相交 (D) 依題意無法確定 L 與圓 O 的位置關係

1. 圓心 O 到 L 的距離 $= |3 - (-1)| = 4$ ，而半徑 $\sqrt{23} > 4$ $\therefore L$ 為圓 O 的割線

(A) 2. 兩圓共有四條公切線，如果半徑分別為 11 公分、 K 公分，連心線長 18 公分，則 K 的範圍為何？

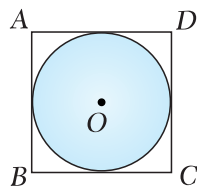
- (A) $0 < K < 7$ (B) $11 < K < 18$
(C) $6 < K < 12$ (D) $0 < K < 5$

2. 兩圓共有四條公切線 \therefore 兩圓外離 \therefore 連心線長 $18 > 11 + K$
 $\therefore K < 7$ ，又 $K > 0$ $\therefore 0 < K < 7$

(C) 3. 有一正方形 $ABCD$ ，若邊長 $\overline{AB} = 8$ ，則此正方形的內切圓面積 = ?

- (A) 36π
(B) 24π
(C) 16π
(D) 9π

3. $\pi \times (\frac{8}{2})^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$ (平方單位)



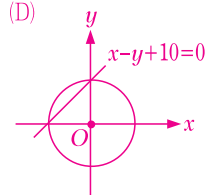
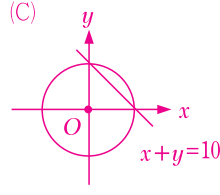
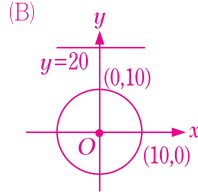
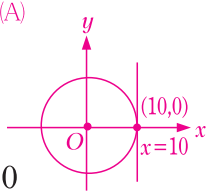
(A) 4. 已知圓 O 的半徑為 10，且圓心位於直角坐標平面上的原點上，則此圓與下列哪一條直線僅有一交點？

(A) $x = 10$

(B) $y = 20$

(C) $x + y = 10$

(D) $x - y + 10 = 0$



(A) 5. 兩圓內切，其半徑比為 3:4，連心線長為 14，則較大之圓的半徑為何？

(A) 56

(B) 42

(C) 8

(D) 6

5. 設兩圓的半徑分別為 $3r$ 、 $4r$ $\therefore 4r - 3r = 14$
 $\therefore r = 14$ \therefore 大圓的半徑 $= 4 \times 14 = 56$

(B) 6. 雖然髮禁解除了，但某國中仍規定髮線的夾角需為 90° ($\angle ABC = 90^\circ$)，下圖為男生的髮型圖示，在 (甲) 圖中 $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ，(乙) 圖中 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，(丙) 圖中 $\overline{AB} = 3\overline{BC}$ ，哪一種髮型頭髮部分 (灰色) 的面積最小？

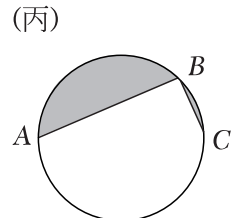
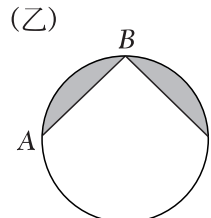
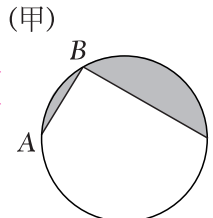
(A) 甲

(B) 乙

(C) 丙

(D) 都一樣大

6. (乙) 圖中的 $\triangle ABC$ 面積最大
 \therefore (乙) 圖 $\triangle ABC$ 的高最大
 (當底為 \overline{AC} 時)



(C) 7. 如右圖，圓 O 與 x 軸相切於 $(1, 0)$ 交 y 軸於 $A(0, 4 + \sqrt{15})$ ， $B(0, 4 - \sqrt{15})$ ，則圓 O 之面積為何？

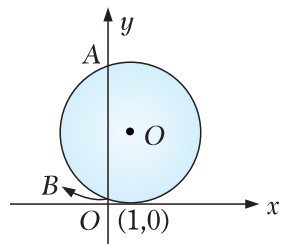
(A) 14π

(B) 15π

(C) 16π

(D) 17π

7. \overline{AB} 之中點坐標為 $(0, 4)$
 \therefore 圓心 O 之坐標為 $(1, 4)$ 又切點為 $(1, 0)$
 \Rightarrow 半徑 $r = 4$ \therefore 圓面積為 16π (平方單位)



(D) 8. 有兩個同心圓，已知大圓的半徑為 10 公分，且小圓面積為大圓面積的一半，若大圓的弦 \overline{AB} 與小圓相切，則 \overline{AB} 的長為多少公分？

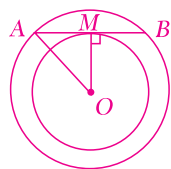
(A) 13

(B) 12

(C) $10\sqrt{3}$

(D) $10\sqrt{2}$

8. 設小圓的半徑為 r 公分 \therefore 小圓面積為大圓面積的一半
 \therefore 小圓面積 $= \frac{1}{2} \times (\pi \times 10^2) = 50\pi = \pi r^2$ $\therefore r^2 = 50$
 $\therefore \overline{AM} = \sqrt{10^2 - r^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
 $\therefore \overline{AB} = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ (公分)



(C) 9. 如右圖， \overline{AB} 切圓 O 於 B ， \overline{AO} 交圓 O 於 C ，若 $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AC} = 18$ ，則圓 O 之面積為何？

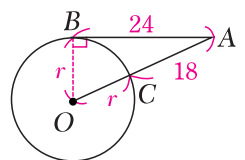
(A) 81π

(B) 64π

(C) 49π

(D) 25π

9. 設圓 O 的半徑為 r
 $\therefore (18 + r)^2 = r^2 + 24^2$,
 $324 + 36r + r^2 = r^2 + 576$
 $36r = 252, r = 7$
 \therefore 圓 O 面積 $= \pi \times 7^2 = 49\pi$ (平方單位)



(D) 10. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 且 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為圓 O 之切線， D 、 E 為切點。若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，則圓 O 之半徑為多少？

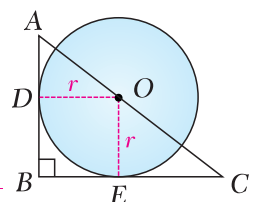
(A) 4

(B) 5

(C) $\frac{48}{5}$

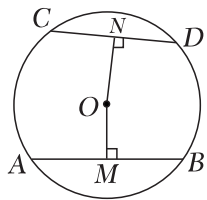
(D) $\frac{24}{7}$

10. 連 \overline{OD} 、 $\overline{OE} \Rightarrow \overline{OD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ ，設 $\overline{OD} = \overline{OE} = r$
 $\triangle AOB$ 面積 $+ \triangle BOC$ 面積 $= \triangle ABC$ 面積
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r = \frac{1}{2} \times 6 \times 8, 6r + 8r = 48, r = \frac{24}{7}$



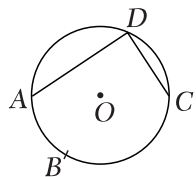
(B) 11. 如右圖， $\overline{AB} = 8$ 公分， $\overline{CD} = 6$ 公分，且 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ ，若 $\overline{OM} = 3$ 公分，則 $\overline{ON} = ?$

- (A) 3 11. $\because \overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 4$
 (B) 4 $\because \overline{ON} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{CN} = \overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{CD} = 3$ ，又 $\overline{OM} = 3$
 (C) 5 得 $\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2 = 9 + 16 = 25 = \overline{OC}^2 \Rightarrow \overline{OA} = 5 = \overline{OC}$
 (D) 6 $\overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2$ ，即 $25 = \overline{ON}^2 + 9 \Rightarrow \overline{ON}^2 = 16 \therefore \overline{ON} = 4$ (公分)



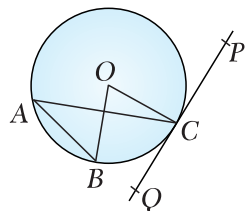
(C) 12. 如右圖，若 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} = 2 : 4 : 6$ ，則 $\angle ADC = ?$

- (A) 120° (B) 110° 12. $\widehat{ABC} = 360^\circ \times \frac{2+4}{2+4+6} = 180^\circ$
 (C) 90° (D) 80° $\angle ADC = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90^\circ$



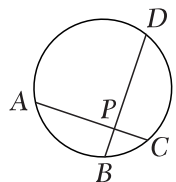
(B) 13. 如右圖， \overline{PQ} 切圓 O 於 C 點，若 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ，且 $\angle A = 40^\circ$ ，則 $\angle BOC + \angle ACO = ?$

- (A) 80° 13. $\angle BOC = \widehat{BC} = 2\angle A = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$
 (B) 90° $\widehat{ABC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = 2\widehat{BC} = 2 \times 80^\circ = 160^\circ$
 (C) 100° $\angle ACQ = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \times 160^\circ = 80^\circ$ ，
 (D) 110° $\angle ACO = 90^\circ - \angle ACQ = 10^\circ$
 $\angle BOC + \angle ACO = 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$



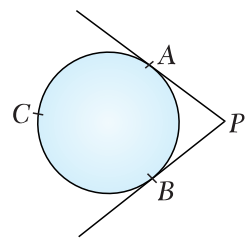
(A) 14. 如右圖，若 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{AD} = 4 : 2 : 5 : 7$ ，則 $\angle APD = ?$

- (A) 90° (B) 85° 14. $\angle APD = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{AD}) = \frac{1}{2}(360^\circ \times \frac{2}{18} + 360^\circ \times \frac{7}{18})$
 (C) 80° (D) 75° $= \frac{1}{2}(40^\circ + 140^\circ) = 90^\circ$



(B) 15. 如右圖，已知 \overline{PA} 、 \overline{PB} 切圓於 A、B 兩點，若 $\angle APB = 75^\circ$ ，則 $\widehat{ACB} = ?$

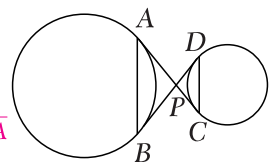
- (A) 250° (B) 255° 15. $\begin{cases} \widehat{ACB} + \widehat{AB} = 360^\circ \\ \frac{1}{2}(\widehat{ACB} - \widehat{AB}) = 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = 255^\circ$
 (C) 260° (D) 265°



歷屆基測 試題

(D) 1. 如右圖， \overline{AB} 、 \overline{CD} 分別為兩圓的弦， \overline{AC} 、 \overline{BD} 為兩圓的公切線且相交於 P 點。若 $\overline{PC} = 2$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\overline{DB} = 6$ ，則 $\triangle PAB$ 的周長為何？

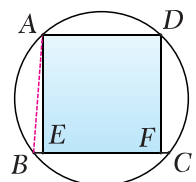
- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 14 1. $\overline{PC} = \overline{PD} = 2$ ， $\overline{PB} = 6 - 2 = 4 = \overline{PA}$
 $\therefore \triangle ABP \sim \triangle CDP$ (SAS)，
 $\therefore \triangle PAB$ 周長 $= \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AB} = 4 + 4 + 6 = 14$



97 基測一

(C) 2. 如右圖，圖上有 A、B、C、D 四點，圓內有 E、F 兩點，且 E、F 在 \overline{BC} 上。若四邊形 AEF D 為正方形，則下列弧長關係，何者正確？

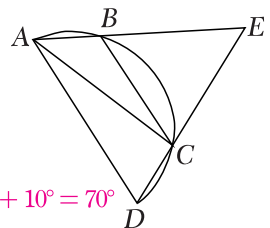
- (A) $\widehat{AB} < \widehat{AD}$ (B) $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ 2. 連接 \overline{AB} ， $\because \widehat{AB} > \widehat{AE} = \widehat{AD}$ ， $\therefore \widehat{AB} > \widehat{AD}$ ，
 (C) $\widehat{AB} < \widehat{BC}$ (D) $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ $\because \widehat{BC} > \widehat{BF} = \widehat{BE} + \widehat{EF} = \widehat{BE} + \widehat{AE} > \widehat{AB}$
 $\therefore \widehat{BC} > \widehat{AB}$



97 基測一

(B) 3. 如右圖，A、B、C、D 四點均在一圓弧上， $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ，且直線 AB 與直線 CD 相交於 E 點。若 $\angle BCA = 10^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，則 $\angle BEC = ?$

- (A) 35° (B) 40° 3. $\because \overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ， $\therefore \angle CAD = 10^\circ$ ， $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
 (C) 60° (D) 70° $\angle EAD = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{AB}) = \angle EDA = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$
 $\angle E = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$

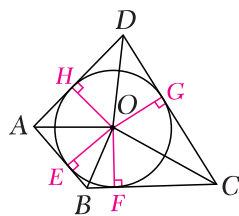


97 基測一

(A) 4. 如右圖，圖O為四邊形ABCD的內切圓。若 $\angle AOB = 70^\circ$ ，則 $\angle COD = ?$

- (A) 110°
- (B) 125°
- (C) 140°
- (D) 145°

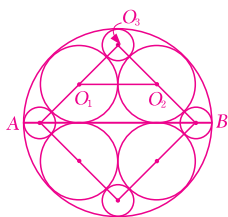
4. $\angle AOH = \angle AOE = x^\circ, \angle BOE = \angle BOF = y^\circ,$
 $\angle COF = \angle COG = a^\circ, \angle DOG = \angle DOH = b^\circ$
 $\angle AOB = 70^\circ, x + y = 70^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 140^\circ$
 $\Rightarrow 2a + 2b = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ \Rightarrow a + b = 110^\circ$
 $\Rightarrow \angle COD = 110^\circ$



97 基測一

(C) 5. 如右圖，圓 O_1 、圓 O_2 、圓 O_3 三圓兩兩相切，且 \overline{AB} 為圓 O_1 、圓 O_2 的公切線， \widehat{AB} 為半圓，且分別與三圓各切於一點。若圓 O_1 、圓 O_2 的半徑均為1，則圓 O_3 的半徑為何？

- (A) 1
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $\sqrt{2} - 1$
- (D) $\sqrt{2} + 1$



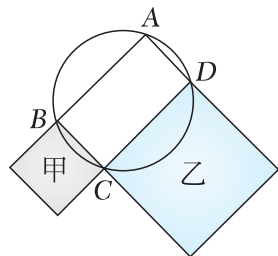
5. 繪出對稱圖形，得 $\angle O_1O_3O_2 = 90^\circ,$
 $\therefore \triangle O_1O_2O_3$ 為等腰直角三角形， $\overline{O_1O_2} = 2$
 $\Rightarrow \overline{O_1O_3} = \sqrt{2}$
 設圓 O_3 半徑為 $r, \therefore r + 1 = \sqrt{2}, r = \sqrt{2} - 1,$
 \therefore 圓 O_3 的半徑為 $\sqrt{2} - 1$

97 基測一

(D) 6. 如右圖，有一圓及長方形ABCD，其中A、B、C、D四點皆在圓上且 $\overline{BC} < \overline{CD}$ 。今分別以 \overline{BC} 、 \overline{CD} 為邊長作甲、乙兩正方形。若圓半徑為1.5公分，則甲、乙面積和為多少平方公分？

- (A) 4.5
- (B) 6
- (C) 7.5
- (D) 9

6. $\because \angle BCD = 90^\circ, \overline{BD}$ 為直徑，
 甲、乙面積和 = $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2$
 $= (1.5 \times 2)^2 = 9$ (平方公分)



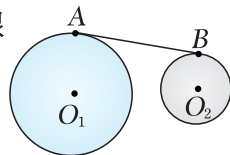
95 基測一

模塊學力基測 試題

(D) 1. 如右圖，圓 O_1 的半徑為6，圓 O_2 半徑為3， $\overline{O_1O_2} = 16$ ，則公切線長 $\overline{AB} = ?$

- (A) $\sqrt{241}$
- (B) $\sqrt{243}$
- (C) $7\sqrt{5}$
- (D) $\sqrt{247}$

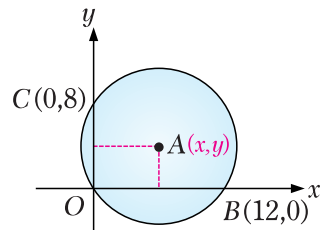
1. $\overline{AB} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{16^2 - (6 - 3)^2} = \sqrt{247}$ (單位)



(B) 2. 如右圖，圓A與兩軸交於(0, 0)、(12, 0)、(0, 8)三點，則圓心A點的坐標為何？

- (A) (4, 4)
- (B) (6, 4)
- (C) (4, 6)
- (D) (6, 6)

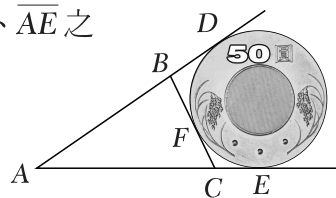
2. 設A點為 $(x, y), x = \frac{0+12}{2} = 6, y = \frac{0+8}{2} = 4$
 $\therefore A(6, 4)$



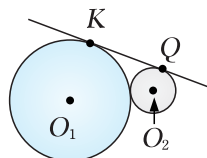
(D) 3. 如右圖， \overline{AD} 、 \overline{AE} 、 \overline{BC} 分別切圓於D、E、F，若切線 \overline{AD} 、 \overline{AE} 之長均為8公分，則 $\triangle ABC$ 之周長為多少公分？

- (A) 13
- (B) 14
- (C) 15
- (D) 16

3. $\because \overline{BF} = \overline{BD}, \overline{CF} = \overline{CE}$
 $\therefore \triangle ABC$ 周長 = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AC}$
 $= \overline{AD} + \overline{AE} = 8 + 8 = 16$ (公分)



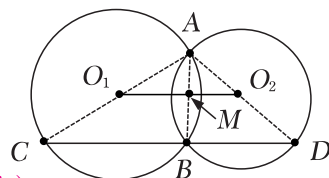
- (A) 4. 如右圖，若 $\overline{KQ} = 12$ ，圓 O_1 的半徑為 8，圓 O_2 半徑為 3，則連心線 $\overline{O_1O_2} = ?$



- (A) 13 (B) 12
(C) 10 (D) 9

$$4. \overline{O_1O_2} = \sqrt{KQ^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{12^2 + (8 - 3)^2} = 13 \text{ (單位)}$$

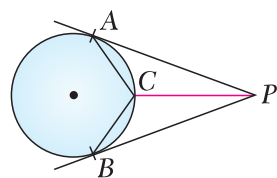
- (A) 5. 如右圖，圓 O_1 、 O_2 相交於 A 、 B 兩點，過 B 點作一平行於連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的直線，分別交於 C 、 D ，若 $\overline{O_1O_2} = 16$ ，則 $\overline{CD} = ?$



- (A) 32 (B) 36
(C) 48 (D) 64

$$5. \because \overline{AM} = \overline{BM} \\ \therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{16}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = 32 \text{ (單位)}$$

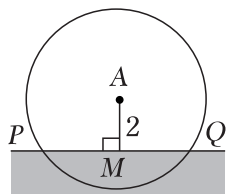
- (D) 6. 如右圖， \overline{AP} 與 \overline{BP} 均為圓 O 的切線，若 $\angle P = 52^\circ$ ，則 $\angle ACB = ?$



- (A) 110° (B) 112°
(C) 114° (D) 116°

$$6. \because \angle P = 52^\circ, \angle OAP = 90^\circ = \angle OBP, \\ \therefore \angle AOB = 360^\circ - 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ, \\ \widehat{ACB} = 128^\circ, \widehat{AB} = 360^\circ - 128^\circ = 232^\circ, \\ \angle ACB = 232^\circ \times \frac{1}{2} = 116^\circ$$

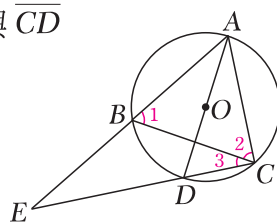
- (D) 7. 有厚度相同的 A 、 B 、 C 、 D 四種硬幣，直徑分別為 5 公分、4.5 公分、3.5 公分、2.5 公分，欲投入一個撲滿中，結果 A 種硬幣無法投入，如右圖，已知 A 硬幣圓心距離撲滿入口 2 公分，試問哪幾種硬幣可以投入該撲滿？



- (A) B 、 C (B) B 、 D
(C) C 、 D (D) D

$$7. \because \overline{PA} = 5 \div 2 = 2.5, \\ \overline{PM} = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5, \overline{PQ} = 1.5 \times 2 = 3 \\ \therefore \text{撲滿入口長度 } \overline{PQ} = 3 \text{ (公分)} \\ \text{故只有 } D \text{ 硬幣可以投入撲滿}$$

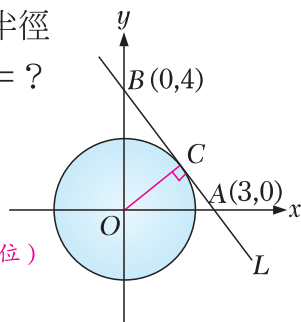
- (B) 8. 如右圖，已知圓 O 為正 $\triangle ABC$ 的外接圓， \overline{AD} 是直徑， \overline{AB} 與 \overline{CD} 的延長線交於 E 點，求 $\angle AED = ?$



- (A) 25°
(B) 30°
(C) 45°
(D) 60°

$$8. \because \angle 1 = \angle 2 = 60^\circ, \widehat{AC} = 120^\circ, \therefore \overline{AD} \text{ 為直徑}, \\ \therefore \angle ACD = 90^\circ, \angle 3 = 30^\circ, \widehat{BD} = 60^\circ, \\ \angle AED = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD}) = \frac{1}{2}(120^\circ - 60^\circ) = 30^\circ$$

- (A) 9. 坐標平面上，設直線 L 通過 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 兩點，有一半徑為 r 的圓 O ，其圓心是原點。已知直線 L 和圓 O 相切，求 $r = ?$



- (A) 2.4
(B) 2.5
(C) 3
(D) 3.2

$$9. \text{作 } \overline{OC} \perp \overline{AB} \quad \because \overline{OA} = 3, \overline{OB} = 4, \angle AOB = 90^\circ \\ \therefore \overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \\ \triangle ABO \text{ 面積} = \frac{\overline{OC} \times 5}{2} = \frac{3 \times 4}{2} \quad \therefore \overline{OC} = 2.4 \quad \therefore r = 2.4 \text{ (單位)}$$

- (C) 10. 相交兩圓的半徑分別是 $\sqrt{7} - 1$ 和 $\sqrt{7} + 1$ ，連心線的長是 d ，則 d 可取的整數的個數有幾個？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$$10. \because (\sqrt{7} + 1) - (\sqrt{7} - 1) < d < (\sqrt{7} + 1) + (\sqrt{7} - 1) \\ \Rightarrow 2 < d < 2\sqrt{7} \quad \therefore d \text{ 為整數} \quad \therefore d = 3, 4, 5, \text{ 共 3 個}$$

- (C) 11. 若兩圓的半徑分別為 R 、 r ($R > r$)， d 為連心線的長，且 $R^2 + d^2 - r^2 = 2Rd$ ，則兩圓位置關係為何？

- (A) 外切 (B) 內切 (C) 內切或外切 (D) 外離或內離

$$11. R^2 - 2Rd + d^2 - r^2 = 0, (R - d)^2 - r^2 = 0, (R - d + r)(R - d - r) = 0 \\ \therefore d = R + r \text{ (外切)} \text{ 或 } d = R - r \text{ (內切)}$$

第20單元 幾何證明與三角形的三心

1 基測出題機率★★★★☆ 2 難易度★★★★☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少？測驗就知道！

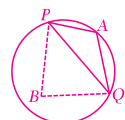
(X) 1. 若 $A = 1^6 + 3^4 + 5^2$ ，則 A^3 為偶數（數學的推理）。

💡 $1^6、3^4、5^2$ 均為奇數，則 A 為奇數，則 A^3 亦為奇數（演繹法）

能力一

(X) 2. 若 n 為大於 1 的正整數，則 $n^2 - n + 1$ 為質數（數學的推理）。

💡 若 $n = 5$ ，則 $n^2 - n + 1 = 21$ ，21 非質數（舉反例）



(X) 3. 若 \overline{PQ} 為圓上一弦， A 在圓上， B 在圓內，則 $\angle PBQ > \angle PAQ$ 成立（數學的推理）。

💡 不一定！舉反例： A 在劣弧 \widehat{PQ} 上，則 $\angle PAQ > 90^\circ$ ， B 在圓內，則 $\angle PBQ < 90^\circ \Rightarrow \angle PAQ > \angle PBQ$

(X) 4. 若四邊形為長方形，則此四邊形之對角線相等；若四邊形的對角線相等，則此四邊形為長方形。

💡 由逆敘述可知，不成立！尚有等腰梯形亦符合

(X) 5. 三角形中的內切圓圓心到三頂點等距離。

💡 三角形的外接圓圓心到三頂點等距離

能力二

(O) 6. 直角三角形之重心到外心的距離為斜邊長的 $\frac{1}{6}$ 。

💡 直角三角形外心到三頂點距離是斜邊長的 $\frac{1}{2}$ ，外心到重心的距離 = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 斜邊

(O) 7. 正三角形的外接圓半徑是正三角形的高的 $\frac{2}{3}$ 。

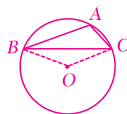
💡 因為正三角形的外接圓圓心為外心，所以外接圓半徑 = $\frac{2}{3} \times$ 正三角形的高

(X) 8. 四邊形的外心必在四邊形的內部，故三角形的外心也必在三角形的內部。

💡 四邊形的外心恆在四邊形的內部；三角形的外心不一定在三角形的內部

(O) 9. $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，若 O 為外心， $\angle A > 90^\circ$ ，則 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$ 。

💡 如圖， $\angle BOC = 360^\circ - \widehat{BC} = 360^\circ - 2\angle A$



(X) 10. 直角三角形的斜邊即為外接圓的半徑。

💡 應為外接圓的直徑

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們！別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔！

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



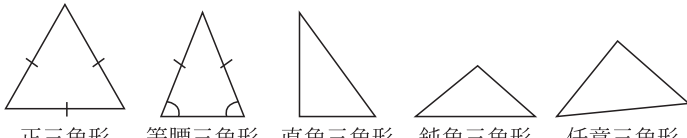
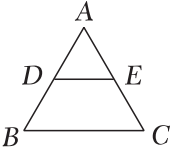
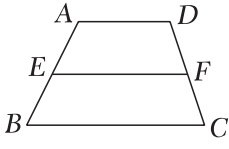
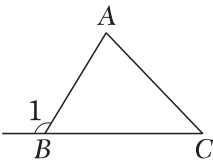
能力

數學證明與推理

一 證明與推理

數學（推理）方法大致有歸納法、相似法與演繹法三種，但所有數學的證明都必須是演繹法，因為歸納法與相似法僅用來推測事實，唯有透過假設及一連串的演繹後所得的結論方能稱為定理。

二 推理方法的說明

	已知條件	結論
1. 歸納法	 <p>正三角形 等腰三角形 直角三角形 鈍角三角形 任意三角形</p>	歸納很多三角形發現內角和皆為 180° ，故可假設三角形內角和為 180°
2. 相似法	 <p>三角形二邊中點連線段 \overline{DE} $\Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$</p>	 <p>梯形二邊中點連線段 \overline{EF} $\Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{BC}$</p>
3. 演繹法	 <p>由於$\angle 1 + \angle ABC = 180^\circ$ 且$\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$， 故$\angle 1 + \angle ABC = \angle A + \angle ABC + \angle C$ 得$\angle 1 = \angle A + \angle C$</p>	定理：三角形任一兩內角之和為第三角之外角

※所有數學的證明都必須是演繹法

三 閱讀論證及證明

1. 舉出反例的論證

正例	反例
某人說，他從邊長3、4、5或5、12、13或4、5、6的三角形例子，發現一個定理：「三角形的兩邊乘積大於第三邊」	若取邊長皆為 $\frac{1}{2}$ 的正三角形，則兩邊乘積 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ （第三邊）

說明 很顯然正例使用歸納法破功了！因為當三角形的邊長小於1時，就無法成立。但歸納法也提供了演繹法一個新的方向不是嗎？

2. 正逆敘述的論證

正敘述	逆敘述
若 $x = y$ ，則 $xz = yz$	若 $xz = yz$ ，則 $x = y$

說明 若存在某敘述：「若A則B(A→B)」，其逆敘述就是：「若B則A(B→A)」。
 逆敘述成立的情況是：「A→B」先成立，否則通常都是倒果為因，不合常理。

師說 1

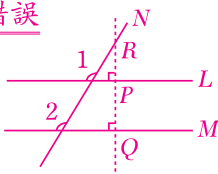
〈敘述的判別〉

演練 1

1. 已知「若 $a = 0$ ，則 $a^2 = 0$ 。」試問其逆敘述「 $a^2 = 0$ ，則 $a = 0$ 。」是否正確？
2. 「若兩多邊形各對應邊皆等長，則此兩多邊形全等。」以上敘述是否正確？
3. 對角線等長的四邊形是正方形。此敘述是否正確？
4. 兩平行線被一直線所截，則其同位角相等。此敘述是否正確？

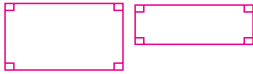
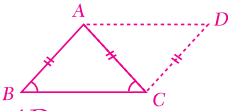
解

1. 若 $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$ ，因為 $a^2 \geq 0$ ，所以 $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ ，所以敘述正確
2. 菱形與正方形，四邊皆等長，但卻不全等，所以敘述錯誤
3. 對角線等長的四邊形不僅有正方形，尚有矩形及等腰梯形，所以敘述錯誤
4. 由圖可知，
 $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ ，
 $\angle R + \angle P = \angle R + \angle Q$
 $\Rightarrow \angle R + \angle P = \angle 1 = \angle R + \angle Q = \angle 2$ ，
 故 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以敘述正確



1. 若 $a : b = 3 : 4$ ，則 $(a + 1) : (b + 1) = 4 : 5$ 。以上敘述是否正確？
2. 若兩四邊形相似，則兩四邊形對應角相等。反之，兩四邊形對應角相等，則此兩四邊形相似。此逆敘述是否正確？
3. 若四邊形中，有一雙對邊平行，另一雙對邊相等，則此四邊形為平行四邊形。此敘述是否正確？
4. 若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 $\angle B = \angle C$ ，反之，若 $\angle B = \angle C$ ，則 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。此敘述是否正確？

解

1. 若 $a = 9, b = 12$ ，則 $(9 + 1) : (12 + 1) = 10 : 13 \neq 4 : 5$ ，所以敘述錯誤
 2. 如圖，四邊對應角相等，但兩矩形卻不相似，所以敘述錯誤
- 
3. 符合一雙對邊平行，另一雙對邊相等的圖形尚有等腰梯形，但等腰梯形非平行四邊形，所以敘述錯誤
 4. $\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \angle A = \angle ACD$ ，
 $\angle ACD = \angle CAD \Rightarrow \angle B = \angle D$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD}$ ，所以敘述正確
- 

師說 2

〈三角形的推理與證明〉

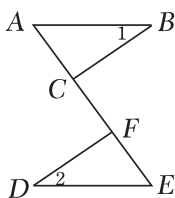
演練 2

已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ，

$$\angle 1 = \angle 2$$

求證： $\overline{AB} = \overline{DE}$

證



- (1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ， $\angle B = \angle D$
- (2) 且 $\angle A = \angle E$ (內錯角)
- (3) $\therefore \triangle ACB \cong \triangle EFD$ (AAS)
- (4) $\overline{AB} = \overline{DE}$ 得證

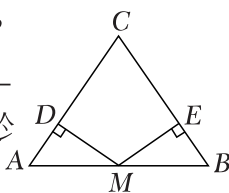
已知： $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，

M 為 \overline{AB} 之中點， $\overline{ME} \perp \overline{BC}$ 於 E ， $\overline{MD} \perp \overline{AC}$ 於 D 。

求證： $\overline{MD} = \overline{ME}$

證

- (1) 因為 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， $\overline{AM} = \overline{BM}$
- (2) 且 $\angle A = \angle B$ ， $\angle ADM = \angle BEM = 90^\circ$
- (3) 所以 $\triangle MAD \cong \triangle MBE$ (AAS)
- (4) $\overline{MD} = \overline{ME}$ 得證

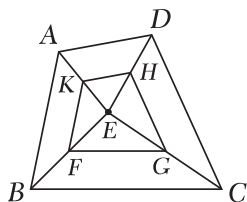


師說 3

〈多邊形的推理與證明〉

演練 3

已知：E 點為四邊形 ABCD 內部一點，若 $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{GH} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{HK} \parallel \overline{AD}$ 。

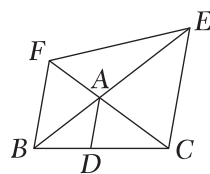


求證： $\overline{FK} \parallel \overline{AB}$

證

- (1) $\because \overline{FG} \parallel \overline{BC} \quad \therefore \overline{EF} : \overline{FB} = \overline{EG} : \overline{GC}$
- (2) $\because \overline{GH} \parallel \overline{CD} \quad \therefore \overline{EG} : \overline{GC} = \overline{EH} : \overline{HD}$
- (3) $\because \overline{HK} \parallel \overline{AD} \quad \therefore \overline{EH} : \overline{HD} = \overline{EK} : \overline{KA}$
- (4) 由(1)、(2)、(3)可知 $\overline{EF} : \overline{FB} = \overline{EK} : \overline{KA}$
- (5) 故 $\overline{FK} \parallel \overline{AB}$ 得證

已知：四邊形 FBCE，
 $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$



求證： $\frac{1}{CE} + \frac{1}{BF} = \frac{1}{AD}$

證

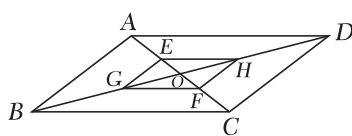
- (1) $\triangle FBC$ 中， $\because \overline{AD} \parallel \overline{BF} \quad \therefore \frac{AD}{BF} = \frac{DC}{BC}$
- (2) $\triangle BCE$ 中， $\because \overline{AD} \parallel \overline{CE} \quad \therefore \frac{AD}{CE} = \frac{BD}{BC}$
- (3) 由(1)、(2)可知 $\frac{AD}{BF} + \frac{AD}{CE} = \frac{DC + BD}{BC} = 1$
- (4) 同除 $\overline{AD} \Rightarrow \frac{1}{CE} + \frac{1}{BF} = \frac{1}{AD}$ 得證

師說 4

〈綜合證明〉

演練 4

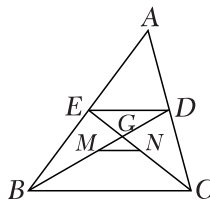
平行四邊形 ABCD，
E、F 兩點三等分 \overline{AC} ，
G、H 兩點三等分 \overline{BD} ，
設平行四邊形 ABCD 的面積為 117，
則平行四邊形 EGFH 的面積為何？



解

- (1) $\because \overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ， $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$
 $\therefore \overline{EO} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{6}\overline{AC}$ ， $\overline{AO} = 3\overline{EO}$
- (2) $\because \triangle ABO \sim \triangle EGO$ ，且 $\overline{AO} = 3\overline{EO}$
 $\therefore \triangle ABO$ 面積 = 9 $\triangle EGO$ 面積，
同理 $\triangle BCO$ 面積 = 9 $\triangle GFO$ 面積，
 $\triangle CDO$ 面積 = 9 $\triangle FHO$ 面積，
 $\triangle DAO$ 面積 = 9 $\triangle HEO$ 面積
- (3) $ABCD$ 面積 = 9 \times $EGFH$ 面積，
 $\therefore EGFH$ 面積 = $117 \div 9 = 13$ (平方單位)

$\triangle ABC$ 中，E、D 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點，
M、N 分別為中線 \overline{BD} 、 \overline{CE} 的中點，
 \overline{BD} 與 \overline{CE} 交於 G 點，
試求 $\triangle GMN$ 面積： $\triangle ABC$ 面積的比值為何？



解

- (1) 令 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{ED} = \frac{1}{2}a$
- (2) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{ED}) = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a$
- (3) $\because \triangle GMN \sim \triangle GBC$
 $\therefore \frac{\triangle GMN \text{ 面積}}{\triangle GBC \text{ 面積}} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{(\frac{1}{4}a)^2}{a^2} = \frac{1}{16}$
- (4) G 為 $\triangle ABC$ 的重心， $\therefore \frac{\triangle GBC \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{1}{3}$
- (5) 由(3)、(4)得 $\frac{\triangle GMN \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{1}{48}$

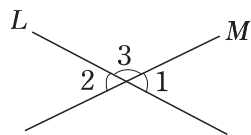
同步 評量 1

- (D) 1. 數學課本上說：「連接矩形四邊中點後可得一菱形。」但奇奇將四邊形 ABCD 的四邊中點連接後，所得的四邊形不是菱形，所以奇奇認為四邊形 ABCD 不是矩形。請問：奇奇運用哪一種推理方法？

- (A) 歸納法 (B) 演繹法 (C) 直覺法 (D) 反證法

1. 此方法是舉反例，故為反證法

(B) 2. 如右圖， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 由兩相交直線 L 、 M 形成一組對頂角，試證明 $\angle 1 = \angle 2$ ，則下列步驟何者有誤？



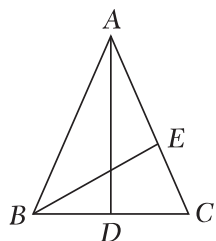
- (A) 因為 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$
 (B) 因為 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
 (C) 由上可知， $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3$ 2. $\angle 1 + \angle 2$ 不等於 180° ， $\angle 1 + \angle 3$ 才等於 180°
 (D) 同時消去 $\angle 3$ ，則 $\angle 1 = \angle 2$

(C) 3. 有一敘述：「若四邊形是正方形，則其四個內角都是直角。」則下列何者是該敘述的逆敘述？並判斷題目的逆敘述是否正確？

- (A) 四個內角不是直角，則該四邊形是正方形。題目的逆敘述不正確
 (B) 四個內角是直角，則該四邊形不是正方形。題目的逆敘述正確
 (C) 四個內角都是直角的四邊形是正方形。題目的逆敘述不正確
 (D) 四個內角都是直角的四邊形是正方形。題目的逆敘述正確

3. 該題目的逆敘述：「四個內角都是直角的四邊形是正方形。」該題目的逆敘述不正確，因為尚有長方形也符合

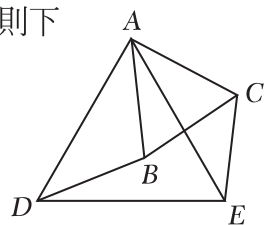
(D) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的平分線， \overline{BE} 為 $\angle B$ 的平分線，則下列何者不一定能夠成立？



- (A) $\overline{BD} = \overline{CD}$
 (B) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
 (C) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
 (D) \overline{AD} 與 \overline{BE} 的交點為重心

4. (D) \overline{AD} 與 \overline{BE} 的交點可以肯定是內心，但不一定是重心

(D) 5. 如右圖， $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 均為正三角形，請證明： $\overline{BD} = \overline{CE}$ ，則下列證明的步驟次序何者較為恰當？



- ① $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)
 ② $\overline{AD} = \overline{AE}$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$
 ③ $\angle DAE = \angle BAC = 60^\circ$
 ④ $\angle DAE - \angle BAE = \angle BAC - \angle BAE$
 ⑤ $\overline{BD} = \overline{CE}$
 (A) ④②③①⑤ (B) ④③②①⑤ (C) ②③①④⑤ (D) ②③④①⑤

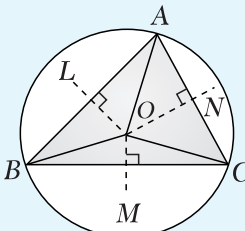
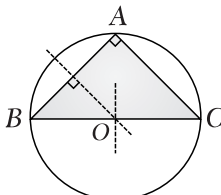
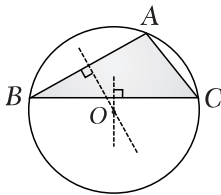
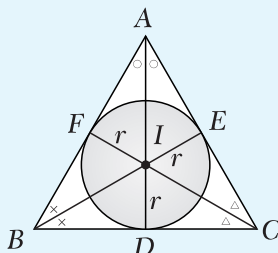
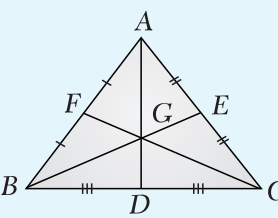
5. 以②③④①⑤較為恰當

能力

三角形的外心、內心、重心

三角形的外心、內心、重心的重要性質一覽表

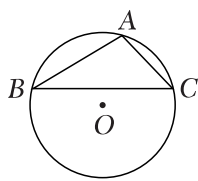
	定義	位置	性質
外心	三邊垂直平分線的交點 (外接圓的圓心)	銳角：三角形內部(圖一) 直角：斜邊中點(圖二) 鈍角：三角形外部(圖三)	到三頂點等距離
內心	三內角平分線的交點 (內切圓的圓心)	恆在三角形內部	到三邊等距離
重心	三中線的交點	恆在三角形內部	比較靠近邊

<p>外心公式</p>  <p>(銳角三角形) (圖一)</p>	<ol style="list-style-type: none"> $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$ (外接圓半徑) 當 $\angle A \leq 90^\circ$, $\angle BOC = 2\angle A$ 當 $\angle A > 90^\circ$, $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$ 正三角形的邊長為 a, 則: <ol style="list-style-type: none"> 外心到頂點的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 外心到邊的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ <p>※正三角形的三心共點</p>	 <p>(直角三角形)(圖二)</p>  <p>(鈍角三角形)(圖三)</p>
<p>內心公式</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = r$ (內切圓半徑) $\triangle ABI$ 面積 : $\triangle BCI$ 面積 : $\triangle ACI$ 面積 = $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$ $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$ $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{2}r \times s$, 其中 $s = \triangle ABC$ 周長 直角三角形的內切圓半徑 = $\frac{1}{2}$(兩股和 - 斜邊) 	
<p>重心公式</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AD}$, $\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ (另兩條中線其重心位置的比例亦同) $\triangle ABG$ 面積 = $\triangle BCG$ 面積 = $\triangle ACG$ 面積 = $\frac{1}{3}\triangle ABC$ 面積 $\triangle AFG$ 面積 = $\triangle BFG$ 面積 = $\triangle AEG$ 面積 = $\triangle CEG$ 面積 = $\triangle BDG$ 面積 = $\triangle CDG$ 面積 = $\frac{1}{6}\triangle ABC$ 面積 直角三角形重心到外心的距離為斜邊的 $\frac{1}{6}$ 	

師說 5 < 三角形的外心 > 演練 5

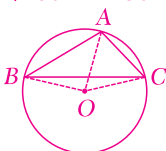
如圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 之外接圓，其半徑為 6 公分， $\angle ABC = 30^\circ$ ，試求

- (1) $\overline{AC} = ?$ (2) 若 $\angle ACB = 45^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 面積 = ?

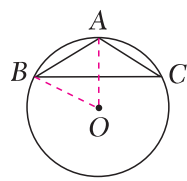


解

- (1) 做 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} $\because \angle ABC = 30^\circ$,
 $\angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ$, 又 $\overline{OA} = \overline{OC}$
 $\therefore \triangle AOC$ 為正三角形, $\overline{AC} = \overline{OA} = \underline{6}$ (公分)
- (2) $\angle BOA = 2\angle ACB = 90^\circ$
 $\triangle AOB$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times 6^2 = 18$
 $\angle BOC = \angle BOA + \angle AOC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
 $\triangle BOC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$
 $\triangle AOC$ 面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$
 $\triangle ABC$ 的面積
 = $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle AOC$ 面積 - $\triangle BOC$ 面積
 = $18 + 9\sqrt{3} - 9 = \underline{9 + 9\sqrt{3}}$ (平方公分)



有一鈍角 $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, O 為其外心, 若 $\angle BOC = 120^\circ$, $\overline{AB} = 8$, 試求



- (1) $\angle A = ?$ (2) $\triangle ABC$ 之外接圓面積為何呢?

解

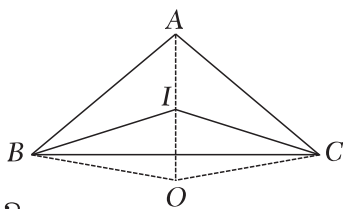
- (1) $\because \triangle ABC$ 為鈍角三角形且 O 為其外心
 $\therefore \angle A = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC) \Rightarrow \angle A = \underline{120^\circ}$
- (2) $\because \overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle A = 120^\circ$
 $\therefore \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$
 $\angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AOB$ 為正三角形, $\overline{AO} = \overline{AB} = 8$
 \Rightarrow 外接圓面積 = $\pi \times 8^2 = \underline{64\pi}$ (平方單位)

師說 6

〈三角形的內心〉

演練 6

如圖， $\triangle ABC$ 的外心為 O ，內心為 I ，若 $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle AOB = 80^\circ$ ，則 $\angle BIC = ?$



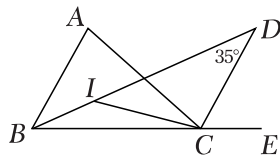
解

$$\because \angle AOB = 80^\circ, \therefore \angle ACB = 80^\circ \times \frac{1}{2} = 40^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{110^\circ}{2} = 145^\circ$$

如右圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， \overline{CD} 為 $\angle ACE$ 之角平分線，若 $\angle D = 35^\circ$ ，請問： $\angle A = ?$



解

$$\angle DCE = 35^\circ + \angle IBC$$

$$\angle ACE = 2\angle DCE = \angle A + \angle ABC$$

$$35^\circ + \angle IBC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC)$$

$$\Rightarrow 35^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\Rightarrow \angle A = 70^\circ$$

師說 7

〈三角形的重心〉

演練 7

已知 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(1, 9)$ 、 $B(\frac{5}{2}, 0)$ 、 $C(-\frac{1}{2}, 0)$ ，則 $\triangle ABC$ 的重心坐標為何呢？

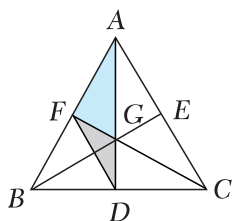
解

$$\overline{BC} \text{ 中點 } M \text{ 坐標 } \Rightarrow [\frac{5}{2} + (-\frac{1}{2})] \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow M = (1, 0), \text{ 重心 } G \text{ 位於 } \overline{AM} \text{ 上,}$$

$$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{1}{3} \times 9 = 3, \text{ 重心坐標為 } (1, 3)$$

如右圖，正 $\triangle ABC$ 的三條中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 交於 G 點，且其邊長為 12 cm ，請問： $\triangle AFG$ 及 $\triangle DFG$ 的面積為何呢？



解

$$(1) \triangle AFG \text{ 面積} = \frac{1}{6} \triangle ABC \text{ 面積}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(2) \frac{\triangle DFG \text{ 面積}}{\triangle AFG \text{ 面積}} = \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2},$$

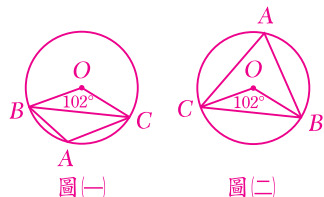
$$\triangle DFG \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

同步評量 2

- (D) 1. 若 $\triangle ABC$ 的三個頂點坐標為 $A(2, 1)$ 、 $B(4, 1)$ 、 $C(4, 9)$ ，則此三角形之外心坐標為何呢？
 1. $\triangle ABC$ 為直角三角形，故外心為斜邊中點，由中點公式得 $(\frac{2+4}{2}, \frac{1+9}{2}) = (3, 5)$
 (A) (3, 1) (B) (4, 5) (C) (3, 4) (D) (3, 5)

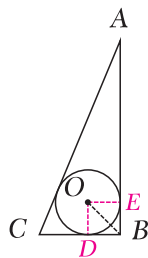
- (C) 2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$ ，則此三角形的外心位於何處？
 (A) 在 $\triangle ABC$ 的內部 (B) 在 $\triangle ABC$ 的外部
 (C) 在 \overline{AB} 的中點 (D) 在 \overline{AC} 的 $\frac{1}{3}$ 處
 2. 令 $\angle A + \angle B + \angle C = 2r + 3r + 5r = 180^\circ$ ，
 $r = 18^\circ$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， $\angle B = 54^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，
 故 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其外心在斜邊 \overline{AB} 之中點

- (D) 3. 若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC = 102^\circ$ ，求 $\angle A = ?$
 (A) 51° (B) 129° (C) 49° 或 131° (D) 51° 或 129°
 3. 圖(一)， $\angle A = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC) = \frac{1}{2}(360^\circ - 102^\circ) = 129^\circ$
 圖(二)， $\angle A = \frac{1}{2} \times 102^\circ = 51^\circ$



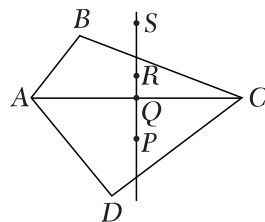
- (A) 4. 設 G 點為正 $\triangle ABC$ 的重心, $\overline{AB} = 20$, 請問: $\overline{AG} = ?$ 4. $\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 \times \frac{2}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$
 (A) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{18\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

- (B) 5. 如右圖, $\triangle ABC$ 為直角三角形, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 5$, O 為 $\triangle ABC$ 之內切圓圓心, 試求 $\overline{OB}^2 = ?$
 (A) $\sqrt{8}$ (B) 8 5. $\overline{BE} = \overline{OE} = r = \frac{1}{2}(5 + 12 - 13) = 2$,
 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 12 $\overline{OB}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$



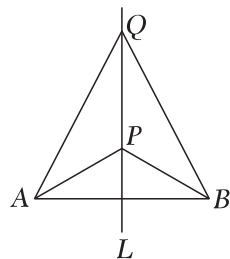
基本觀念題

- (A) 1. 如右圖, 四邊形 $ABCD$ 中, $\angle B > 90^\circ$, \overline{PS} 是 \overline{AC} 的中垂線, 則 P 、 Q 、 R 、 S 四點中, 哪一個點最有可能為 $\triangle ABC$ 的外心?
 (A) P (B) Q 1. $\because \angle B > 90^\circ$
 (C) R (D) S $\therefore \triangle ABC$ 外心在 $\triangle ABC$ 的外部。
 即 P 為 $\triangle ABC$ 的外心

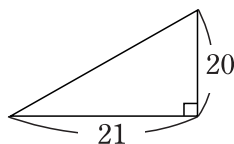


- (C) 2. 史努比在美術課用一條線將一片厚度相同, 材料均勻的三角形紙板懸掛在空中, 他想要讓紙板和水平面平行, 他應該將懸掛點放在三角形的哪一部分呢?
 (A) 三高的交點 (B) 三角平分線的交點 2. (A)垂心; (B)內心; (C)重心; (D)外心,
 (C) 三中線的交點 (D) 三邊的中垂線交點 應取重心方能平衡

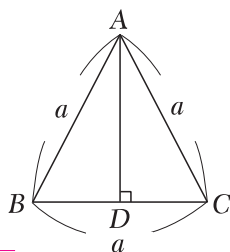
- (B) 3. 有一證明題, 已知 L 為 \overline{AB} 之中垂線, P 、 Q 在 L 上, 求證 $\angle QAP = \angle QBP$, 則下面證明過程何者有誤?
 (A) 在 $\triangle QAP$ 與 $\triangle QBP$ 中, $\because \overline{QA} = \overline{QB}$
 (B) 且 $\overline{PA} = \overline{PQ}$, $\overline{PQ} = \overline{PB}$
 (C) $\therefore \triangle QAP \cong \triangle QBP$ (SSS) 3. (B) 有誤, 應為 $\overline{PA} = \overline{PB}$, $\overline{PQ} = \overline{PQ}$ (共用邊)
 (D) 故 $\angle QAP = \angle QBP$



- (D) 4. 如右圖, 此直角三角形的內切圓半徑為何?
 (A) 3 (B) 4 4. 斜邊 $= \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$,
 (C) 5 (D) 6 內切圓半徑 $= \frac{21 + 20 - 29}{2} = 6$



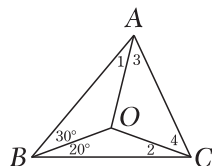
- (C) 5. 有一證明題, 已知 $\triangle ABC$ 為正三角形, 其邊長為 a , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. 求證 \overline{BC} 邊上的高 $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 則下面證明過程何者有誤?
 (A) 在 $\triangle ABD$ 中, $\because \angle ADB = 90^\circ$ 、 $\angle B = 60^\circ$
 (B) 且 $\angle BAD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
 (C) $\overline{BD} : \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2 : \sqrt{3}$ 5. (C) 有誤, 應為 $\overline{BD} : \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$
 (D) 故 $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



(A) 6. 如右圖，已知 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，試求 $\angle 3 + \angle 4 = ?$

- (A) 80°
- (B) 100°
- (C) 120°
- (D) 140°

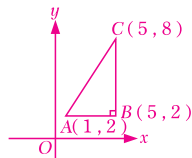
6. $\because O$ 為外心，
 $\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow \angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 20^\circ,$
 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - 2(30^\circ + 20^\circ) = 80^\circ$



(D) 7. 直角坐標平面上有三點 $A(1, 2)$ 、 $B(5, 2)$ 、 $C(5, 8)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的外心坐標為何？

- (A) $(-3, -5)$
- (B) $(-3, 5)$
- (C) $(3, -5)$
- (D) $(3, 5)$

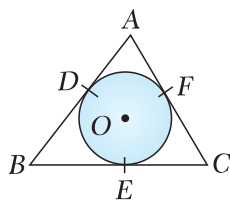
7. 由圖中可知， $\triangle ABC$ 為直角 \triangle ，故其外心必在斜邊中點上，外心 $(\frac{5+1}{2}, \frac{8+2}{2}) = (3, 5)$



(B) 8. 如右圖，已知圓 O 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，若 $\overline{AD} = 5$ 、 $\overline{BE} = 7$ 、 $\overline{CF} = 6$ ，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) 11
- (B) 12
- (C) 13
- (D) 14

8. $\overline{AD} = \overline{AF} = 5$ ， $\overline{BE} = \overline{BD} = 7$ ， $\overline{CF} = \overline{CE} = 6$ ，
 $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 5 + 7 = 12$



(C) 9. 若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC = 116^\circ$ ，則 $\angle BAC = ?$

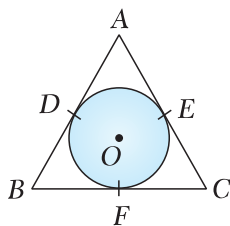
- (A) 58°
- (B) 132°
- (C) 58° 或 122°
- (D) 56° 或 122°

9. (1) 當 $\triangle ABC$ 為銳角 \triangle 時，
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 116^\circ = 58^\circ$
 (2) 當 $\triangle ABC$ 為鈍角 \triangle 時，
 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle BAC$ ， $\angle BAC = 122^\circ$

(D) 10. 如右圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 之內切圓，切點為 D 、 E 、 F ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$
- (B) $\overline{AD} = \overline{AE}$ ， $\overline{BD} = \overline{BF}$ ， $\overline{CE} = \overline{CF}$
- (C) $90^\circ < \angle BOC < 180^\circ$
- (D) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

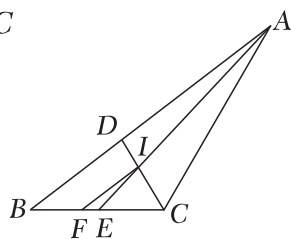
10. (D) 錯誤，只有在 $\triangle ABC$ 為正三角形時才會成立



(A) 11. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 20^\circ$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{IF} \parallel \overline{AB}$ ，則 $\angle EIF = ?$

- (A) 10°
- (B) 15°
- (C) 20°
- (D) 25°

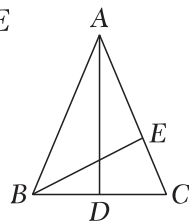
11. $\because \overline{IF} \parallel \overline{AB}$
 $\therefore \angle EIF = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 20^\circ = 10^\circ$



(D) 12. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ， \overline{BE} 平分 $\angle ABC$ ， D 、 E 分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 上，則下列敘述何者正確？

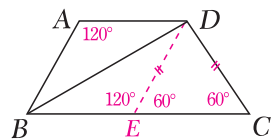
- (A) $\overline{AD} = \overline{BE}$
- (B) $\overline{AE} = \overline{CE}$
- (C) $\overline{BE} \perp \overline{AC}$
- (D) 外心在 \overline{AD} 上

12. $\because \triangle ABC$ 為等腰 \triangle ，且 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ，
 故 \overline{AD} 為 \overline{BC} 之中垂線， \therefore 外心在 \overline{AD} 上之一點



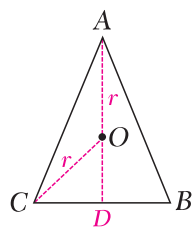
(B) 13. 如右圖， \overline{BD} 平分 $\angle ABC$ ， $\overline{BC} > \overline{AB}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$ ， $\angle A = 120^\circ$ ， $\angle BDC = 90^\circ$ ， $\angle C$ 的度數為下列何者？

- (A) 70° (B) 60° (C) 50° (D) 40°
 13. 作輔助線 \overline{DE} ，且 $\overline{DE} = \overline{DC}$ ，
 由圖可知 $\angle C = 60^\circ$



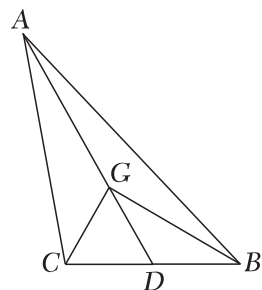
(B) 14. 如右圖， O 為 $\triangle ABC$ 之外心，已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 10$ ，則 $\overline{OA} = ?$

- (A) $\frac{25}{9}$ (B) $\frac{169}{24}$ (C) $\frac{13}{12}$ (D) $\frac{144}{25}$
 14. 過 O 點作 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，
 $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ， $\overline{OA} = r$ ，
 $r^2 = (12 - r)^2 + 5^2$ ，
 $r^2 = 144 - 24r + r^2 + 25$ ， $r = \frac{169}{24}$



(D) 15. 如右圖， G 為 $\triangle ABC$ 的重心， D 為 \overline{BC} 的中點， $\overline{AG} = 16$ ， $\angle BGA = 150^\circ$ ， $\angle AGC = 120^\circ$ ，則 $\triangle ABC$ 面積 = ?

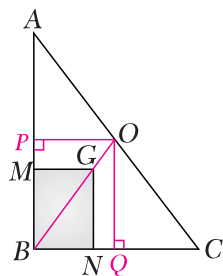
- (A) $54\sqrt{3}$ (B) $63\sqrt{3}$ (C) $84\sqrt{3}$ (D) $96\sqrt{3}$
 15. $\angle BGC = 360^\circ - (150^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$ ，
 $2\overline{GD} = \overline{AG}$ ， $\overline{GD} = 8 = \overline{CD} = \overline{BD}$
 $\therefore \triangle CGD$ 為正 \triangle ， $\therefore \triangle CGD$ 面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ 面積 = $6 \times 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$



歷屆基測 試題

(D) 1. 如右圖， G 為 $\triangle ABC$ 的重心， M 、 N 兩點分別在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上，且 $\overline{GM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{GN} \perp \overline{BC}$ 。若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，則長方形 $MBNG$ 的面積為何？

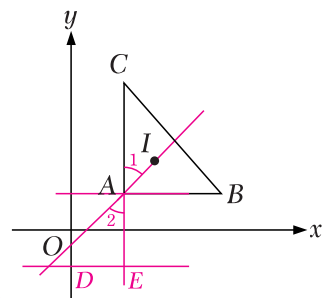
- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$
 1. 延長 \overline{BG} 交 \overline{AC} 於 O 點 (外心)，作 $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ 於 P ，
 $\overline{OQ} \perp \overline{BC}$ 於 Q ， $\therefore O$ 為外心， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$
 $\therefore \overline{BP} = 2$ ， $\overline{BQ} = \frac{3}{2}$ $\therefore G$ 為重心
 $\therefore \overline{BG} : \overline{BO} = 2 : 3 = \overline{BM} : \overline{BP} = \overline{BN} : \overline{BQ} \Rightarrow \overline{BM} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ，
 $\overline{BN} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ ，長方形 $MBNG$ 面積 = $\frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$



97 基測二

(B) 2. 如右圖，坐標平面上， I 為 $\triangle ABC$ 的內心，其中 \overline{AB} 平行 x 軸， $\angle CAB = 90^\circ$ ，且 A 的坐標 $(2, 1)$ 。求直線 AI 與 y 軸的交點坐標為何？

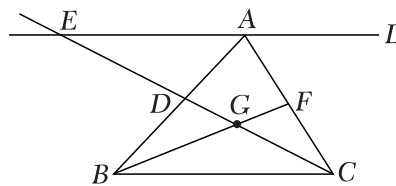
- (A) $(0, -\frac{1}{2})$ (B) $(0, -1)$ (C) $(0, -\frac{3}{2})$ (D) $(0, -2)$
 2. 延長 \overline{AI} 交 y 軸於 D 點，過 D 點作直線平行 x 軸，
 交直線 AC 於 E 點。
 $\therefore I$ 為 $\triangle ABC$ 之內心
 $\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle CAB = 45^\circ = \angle 2 \Rightarrow \triangle ADE$ 為等腰直角 \triangle
 $\therefore \overline{DE} = 2$ ， $\overline{AE} = 2$ ， D 點坐標 $(0, 1 - 2) = (0, -1)$



97 基測二

(D) 3. 如右圖， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，直線 L 過 A 點與 \overline{BC} 平行。若直線 CG 分別與 \overline{AB} 、 L 交於 D 、 E 兩點，直線 BG 與 \overline{AC} 交於 F 點，則 $\triangle AED$ 的面積：四邊形 $ADGF$ 的面積 = ?

- (A) 1 : 2 (B) 2 : 1 (C) 2 : 3 (D) 3 : 2
 3. $\therefore L \parallel \overline{BC} \Rightarrow \angle EAD = \angle CBD$ ， $\angle ADE = \angle BDC$ ， $\overline{AD} = \overline{BD}$ (G 為重心)
 $\therefore \triangle AED \cong \triangle BCD$ (ASA) $\therefore G$ 為 $\triangle ABC$ 之重心
 $\therefore \triangle BDC$ 面積 : $ADGF$ 面積 = 3 : 2

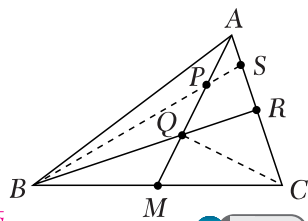


97 基測一

- (B) 4. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\overline{BC} > \overline{AC}$ ， P 、 Q 兩點在 \overline{AM} 上，其中 $\overline{AP} = \overline{PQ}$ ，且 Q 為 $\triangle ABC$ 的重心。若兩直線 BP 、 BQ 與 \overline{AC} 分別交於 S 、 R 兩點，則下列關係何者正確？

- (A) $\overline{AS} = \overline{SR}$ (B) $\overline{AR} = \overline{RC}$
 (C) $\overline{QB} = \overline{QC}$ (D) $\overline{QR} = 2\overline{PS}$

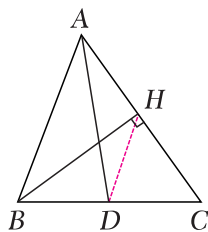
4. 因為 Q 點為 $\triangle ABC$ 的重心，
 所以 R 點為 \overline{AC} 的中點 $\Rightarrow \overline{AR} = \overline{RC}$



95 基測一

- (B) 5. 如右圖， \overline{AD} 是 $\triangle ABC$ 的中線， H 點在 \overline{AC} 上且 $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ 。若 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AC} = 14$ ，連接 \overline{DH} ，則 $\overline{DH} = ?$

- (A) 4 5. 連接 \overline{DH} $\because \triangle BCH$ 為直角 \triangle ，又 \overline{AD} 為 $\triangle ABC$ 的中線
 (B) 5 $\therefore D$ 為 \overline{BC} 中點 $\therefore \overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 5$ (單位)
 (C) 6
 (D) 7



94 基測二

模 擬 學 力 基 測 試 題

- (D) 1. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ， O 為外心，則 $\angle BOA = ?$

- (A) 120° (B) 130°
 (C) 140° (D) 150°

1. $\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，又 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ，
 $\therefore \angle C = 180^\circ \times \frac{7}{2+3+7} = 105^\circ$ ，
 $\angle BOA = 360^\circ - 2\angle C = 360^\circ - 2 \times 105^\circ = 150^\circ$

- (C) 2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 D 點在 \overline{AC} 上，且 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ ，則下列何者不一定成立？

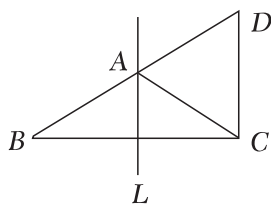
- (A) $\angle ABC = 90^\circ$ (B) D 點必為 $\triangle ABC$ 的外心
 (C) $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形 (D) $\triangle ABC$ 的重心必在 \overline{BD} 上

2. $\because \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$
 $\therefore \triangle ABC$ 必為直角三角形，
 但不一定為等腰直角三角形

- (D) 3. 如右圖，已知直線 L 垂直平分 \overline{BC} ，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\angle ADC = \angle ACD$ (B) $\triangle DBC$ 為直角三角形
 (C) A 為 $\triangle DBC$ 的外心 (D) $\triangle ACD$ 為正三角形

3. $\triangle ACD$ 為等腰三角形



- (A) 4. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{CB} = 6$ ， $\overline{CA} = 8$ ， G 為重心，則 G 到斜邊 \overline{AB} 的距離為何？

- (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) 2

4. 設 G 到 \overline{AB} 相距為 x ，則 $\triangle AGB$ 面積 = $\frac{1}{3}\triangle ABC$ 面積，
 $\frac{1}{2}x \times 10 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \therefore x = \frac{8}{5}$

- (A) 5. 有一 $\triangle ABC$ 其邊長分別為 3、4、5，其外接圓與內切圓面積的比值為何呢？

- (A) $\frac{25}{4}$ (B) $\frac{9}{4}$
 (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{25}{9}$

5. 外接圓面積 = $(\frac{5}{2})^2\pi = \frac{25}{4}\pi$ ，內切圓面積 = $(\frac{3+4-5}{2})^2\pi = \pi$
 $\frac{\text{外}}{\text{內}} = \frac{\frac{25}{4}\pi}{\pi} = \frac{25}{4}$

- (A) 6. 設 $\triangle ABC$ 的三中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 相交於 G ， $\overline{AD} = 12$ 公分， $\overline{BE} = 15$ 公分， $\overline{CF} = 21$ 公分，則 $\overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = ?$

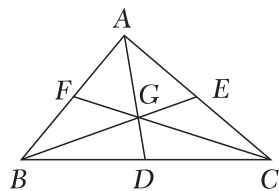
- (A) 16
 (B) 17
 (C) 18
 (D) 19

6. $\because G$ 為 $\triangle ABC$ 的三中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 的交點，
 $\therefore G$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，

$\overline{GD} = \frac{1}{3} \times \overline{AD} = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ (公分)，

同理 $\overline{GE} = \frac{1}{3} \times \overline{BE} = \frac{1}{3} \times 15 = 5$ (公分)，

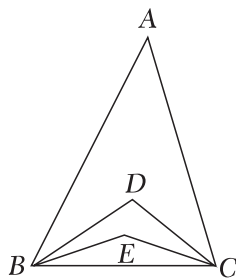
$\overline{GF} = \frac{1}{3} \times \overline{CF} = \frac{1}{3} \times 21 = 7$ (公分)，故 $\overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = 4 + 5 + 7 = 16$ (公分)



(B) 7. 如右圖， D 、 E 各為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBC$ 的內心，若 $\angle A = 40^\circ$ ，則 $\angle BDC + \angle BEC = ?$

- (A) 225°
- (B) 255°
- (C) 275°
- (D) 285°

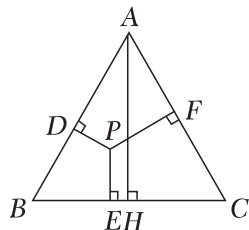
7. $\because D$ 為 $\triangle ABC$ 的內心，
 $\therefore \angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 40^\circ = 110^\circ$ ，
 又 E 為 $\triangle DBC$ 的內心，
 $\therefore \angle BEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 110^\circ = 145^\circ$ ，
 故 $\angle BDC + \angle BEC = 110^\circ + 145^\circ = 255^\circ$



(D) 8. 如右圖， P 點為正 $\triangle ABC$ 內部的一點， P 點到 $\triangle ABC$ 三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的距離分別為 \overline{PD} 、 \overline{PE} 、 \overline{PF} ，且 \overline{AH} 為正 $\triangle ABC$ 的高，則其四者的關係為下列何者呢？

- (A) $\overline{PD} - \overline{PE} - \overline{PF} = \overline{AH}$
- (B) $\overline{PD} + \overline{PE} - \overline{PF} = \overline{AH}$
- (C) $\overline{PD} - \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AH}$
- (D) $\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AH}$

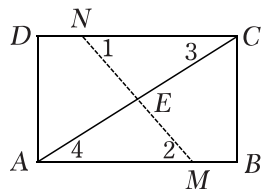
8. 作 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} ，設 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$ ，
 $\because \triangle ABP$ 的面積 + $\triangle BCP$ 的面積 + $\triangle ACP$ 的面積 = $\triangle ABC$ 的面積，
 $\frac{1}{2} \times a \times \overline{PD} + \frac{1}{2} \times a \times \overline{PE} + \frac{1}{2} \times a \times \overline{PF} = \frac{1}{2} \times a \times \overline{AH}$ ，
 $\frac{1}{2} \times a \times (\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}) = \frac{1}{2} \times a \times \overline{AH}$ ，
 $\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AH}$



(D) 9. 右圖 $ABCD$ 是一矩形紙片，將此紙片摺疊使 A 、 C 兩頂點重合，摺痕為 \overline{MN} ，求證： $\triangle NEC \cong \triangle MEA$ 全等，下列證明步驟何者有誤？

- (A) $\because \overline{CE} = \overline{AE}$
- (B) 且 $\angle 1 = \angle 2$
- (C) 且 $\angle 3 = \angle 4$
- (D) $\therefore \triangle NEC \cong \triangle MEA$ (ASA)

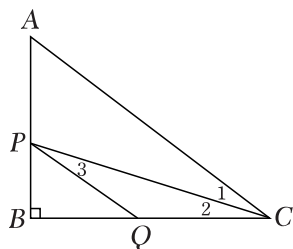
9. 以 AAS 較為是適當



(D) 10. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，已知 \overline{CP} 平分 $\angle C$ ， \overline{PQ} 平行 \overline{AC} ，求證： $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ ，則下列證明步驟何者有誤？

- (A) $\because \angle 1 = \angle 2$ (\overline{CP} 平分 $\angle C$)，且 $\angle 1 = \angle 3$ ($\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$)
- (B) $\therefore \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{QC}$
- (C) $\because \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ 及 $\angle PAC = \angle QCA$
- (D) \therefore 四邊形 $APQC$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{AP} = \overline{QC}$ ，故 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$

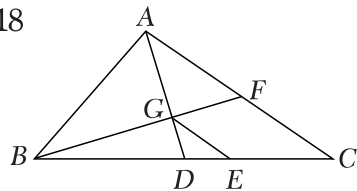
10. 四邊形 $APQC$ 為等腰梯形



(B) 11. 如右圖， $\overline{BD} = \overline{DC}$ ， $\overline{CF} = \overline{AF}$ ， $\overline{GE} \parallel \overline{FC}$ ， $\triangle ABC$ 面積 = 18 平方單位，則四邊形 $GECF$ 面積為何？

- (A) 3
- (B) 5
- (C) 7
- (D) 9

11. $\because \overline{AD}$ 與 \overline{BF} 為兩中線， $\therefore G$ 為 $\triangle ABC$ 之重心，
 $\triangle BGC$ 面積 = $\triangle AGC$ 面積 = $\frac{1}{3}\triangle ABC$ 面積
 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \triangle GEC$ 面積 = $\frac{1}{3}\triangle BGC$ 面積
 四邊形 $GECF$ 面積 = $\triangle GFC$ 面積 + $\triangle GEC$ 面積 = $\frac{1}{2}\triangle AGC$ 面積 + $\frac{1}{3}\triangle BGC$ 面積
 $= \frac{1}{6}\triangle ABC$ 面積 + $\frac{1}{9}\triangle ABC$ 面積 = $\frac{5}{18}\triangle ABC$ 面積
 $= \frac{5}{18} \times 18 = 5$ (平方單位)



1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

(X) 1. 二次函數 $y = 2(x+1)^2$ 的圖形是 $y = 2x^2$ 的圖形向右平移 1 個單位。

能力一

💡 向左平移 1 個單位

(O) 2. 二次函數 $y = -2x^2$ 與 $y = 3x^2$ 比較, $y = 3x^2$ 的開口較小。

💡 x^2 項係數為正, 圖形開口向上, 其絕對值越大, 開口越小

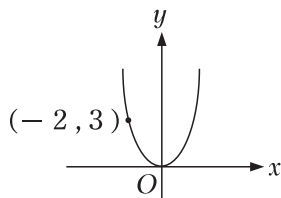
(O) 3. 有兩個二次函數 $f(x) = -x^2 + 3x$, $g(x) = x^2 - 3x$, 則 $f(x)$ 有最高點, $g(x)$ 有最低點。

💡 $f(x) = -x^2 + 3x$, 二次項係數為負, 開口向下; $g(x) = x^2 - 3x$, 二次項係數為正, 開口向上

(X) 4. 因為 $y = \frac{1+x^2}{x^2}$ 中有二次式, 所以 $y = \frac{1}{x^2} + 1$ 是二次函數。

💡 $y = \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1 = x^{-2} + 1$ (非二次函數)

(X) 5. 如右圖, 該拋物線的方程式為 $y = \frac{2}{3}x^2$ 。



💡 令 $y = ax^2$, 將 $(-2, 3)$ 代入, 得 $a = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3}{4}x^2$

(X) 6. 二次函數 $y = 3x^2 + 1$ 的圖形與 x 軸有交點。

💡 $D = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 3 \times 1 = -12 < 0$ 與 x 軸無交點

(X) 7. 二次函數 $y = 3(x+6)^2 + 2$ 的最低點在第一象限。

💡 $y = 3(x+6)^2 + 2$ 的頂點為 $(-6, 2)$ 在第二象限

(X) 8. 數學式 $\frac{6}{-x^2 + 2x - 3}$ 的最小值應為 -2 。

能力二

💡 $-x^2 + 2x - 3 = -(x-1)^2 - 2$, 當 $x=1$ 時, 分母有最大值 -2 , 該數學式最小值為 $\frac{6}{-2} = -3$

(O) 9. 若把 20 平分成 10 和 10 時, 此兩數的平方和最小。

💡 設一數為 x , 另一數為 $(20-x)$, y 為此兩數的平方和 $\Rightarrow y = x^2 + (20-x)^2 = 2(x-10)^2 + 200 \Rightarrow$ 當 $x=10$ 時, 亦即把 20 平分成 10 和 10 時, 可得兩數之平方和為最小

(X) 10. 若二次函數 $y = x^2 - 4x + k$ 的最小值為 4, 則 $k = 0$ 。

💡 $y = x^2 - 4x + k = (x^2 - 4x) + k = (x-2)^2 - 4 + k \Rightarrow -4 + k = 4, k = 8$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



能力

二次函數的圖形

一 二次函數的圖形

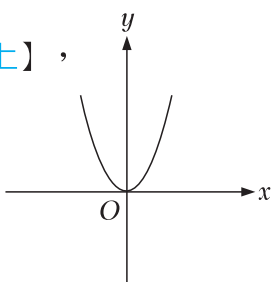
二次函數：型如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函數，稱為二次函數，其函數圖形為拋物線。

二 二次函數各種圖形變化之歸納

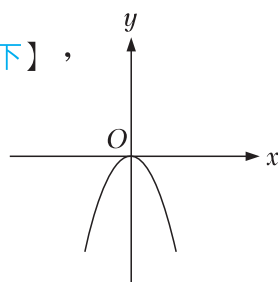
二次函數的一般式： $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)；標準式： $y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$)

類型一： $y = ax^2$ ($b = c = 0$)，此時二次函數頂點在【原點】，對稱軸為【 y 軸】

1. 當 $a > 0$ 時，
二次函數【開口向上】，
當 $|a|$ 值愈大，
開口愈小。

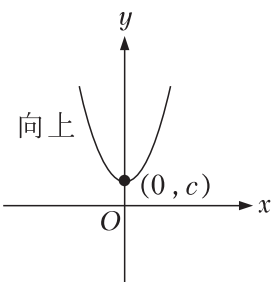


2. 當 $a < 0$ 時，
二次函數【開口向下】，
當 $|a|$ 值愈大，
開口愈小。

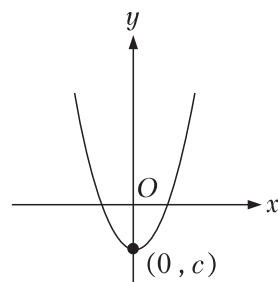


類型二： $y = ax^2 + c$ ($b = 0$)，此時二次函數的頂點為 $(0, c)$ ，對稱軸為【 y 軸】

1. 當 $c > 0$ 時，
二次函數頂點向上
移動 $|c|$ 個單位



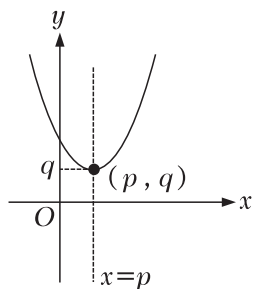
2. 當 $c < 0$ 時，
二次函數頂點向下
移動 $|c|$ 個單位



類型三：將 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，利用配方法化為 $y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$)

- 二次函數頂點坐標為 (p, q)
- 對稱軸為 $x - p = 0$
- 圖形係將 $y = ax^2$
 - ⇒ 圖形在 y 軸，向上或下移動 q 個單位
 - 圖形在 x 軸，向左或右移動 p 個單位

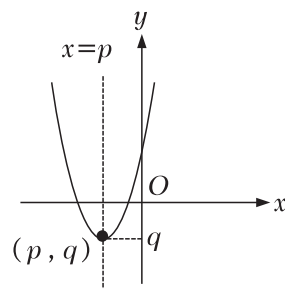
1. 當 $p > 0$ ，
二次函數頂點由
原點向右移動
 $|p|$ 個單位；



3. 當 $p < 0$ ，
二次函數頂點由
原點向左移動
 $|p|$ 個單位；

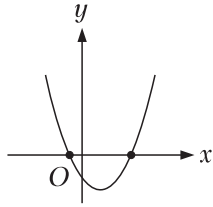
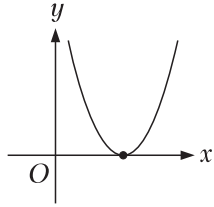
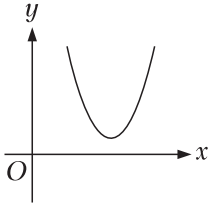
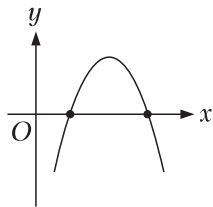
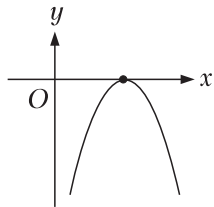
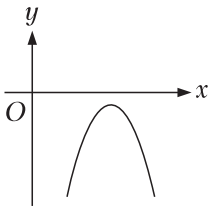
2. 當 $q > 0$ ，
二次函數頂點由
原點向上移動
 $|q|$ 個單位

4. 當 $q < 0$ ，
二次函數頂點由
原點向下移動
 $|q|$ 個單位



二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸的交點

令 $y = 0$ ，則解方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其型式如下表所示：

判別式 D $D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
方程式解的性質	兩相異實根	重根	無(實數)解
拋物線與 x 軸交點	兩相異交點	一個交點(切點)	無交點
$a > 0$ 開口向上			
$a < 0$ 開口向下			

師說 1

〈二次函數的圖形〉

演練 1

- 若二次函數圖形的頂點坐標為原點，且通過點 $(1, 5)$ ，試求此二次函數為何呢？
- 已知有三點坐標 $A(0, -5)$ 、 $B(1, -8)$ 、 $C(4, -5)$ 在某二次函數圖形上，試求此圖形之頂點坐標、及其與 x 、 y 軸的交點為何呢？

解

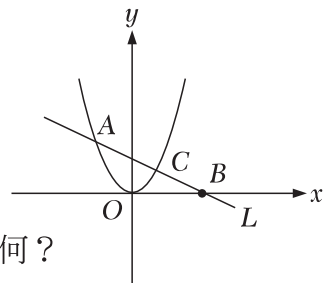
- 設此二次函數 $y = ax^2$ ， \because 通過點 $(1, 5)$
 $\Rightarrow 5 = a \times 1^2 \Rightarrow a = 5 \quad \therefore$ 二次函數為 $y = 5x^2$
- 設此二次函數為 $y = ax^2 + bx + c$
 將 $(0, -5)$ 、 $(1, -8)$ 、 $(4, -5)$ 代入

$$\begin{cases} -5 = c & \dots\dots\dots ① \\ -8 = a + b + c & \dots\dots ② \\ -5 = 16a + 4b + c & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 & \dots\dots ④ \\ 16a + 4b = 0 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$
 $\Rightarrow a = 1, b = -4, c = -5 \Rightarrow y = x^2 - 4x - 5$
 $\Rightarrow y = (x^2 - 4x + 4) - 9 = (x - 2)^2 - 9$
 \Rightarrow 頂點 $(2, -9)$
 與 x 軸交點坐標 \Rightarrow 令 $y = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) = 0$ ，
 $\Rightarrow x = 5$ 或 $-1 \Rightarrow (5, 0)$ 或 $(-1, 0)$
 與 y 軸交點坐標 \Rightarrow 令 $x = 0$
 $\Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5)$

- 若二次函數圖形通過 $(0, 3)$ 、 $(1, 4)$ ，且對稱於 y 軸，試求此二次函數為何呢？

- 如圖，二次函數與直線交於 $A(-2, 3)$ 、 C 兩點，且直線 L 交 x 軸於 $B(4, 0)$ ，請問： C 點坐標為何？



解

- 設二次函數 $y = ax^2 + b$ 將 $(0, 3)$ 、 $(1, 4)$ 代入

$$\begin{cases} 3 = a \times 0^2 + b \\ 4 = a \times 1^2 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3$$
 $\Rightarrow y = x^2 + 3$
- 令 $y = ax^2$ ， $A(-2, 3)$ 代入得 $y = \frac{3}{4}x^2 \dots\dots ①$
 令 $y = mx + n$ ， $A(-2, 3)$ 、 $B(4, 0)$ 代入得

$$\begin{cases} 3 = -2m + n \\ 0 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases}$$
 $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \dots\dots ②$
 \Rightarrow ①、②解聯立 $\Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$
 $\Rightarrow (3x - 4)(x + 2) = 0, x = \frac{4}{3}$ 或 -2 (不合)
 $x = \frac{4}{3}$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ，得 $y = \frac{4}{3}$
 $\Rightarrow C$ 點 $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

師說 2

〈二次函數圖形的移動〉

演練 2

- 將二次函數 $y = x^2 + 3x$ 之圖形向右平移 2 個單位，請問：新圖形的二次函數為何呢？
- 將二次函數 $y = -2x^2 + 4x + 3$ 之圖形向左平移 3 個單位，再向下平移 2 個單位後，請問：新圖形的二次函數為何呢？

解

- $$y = x^2 + 3x = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \text{頂點坐標} (\frac{-3}{2}, -\frac{9}{4}),$$
 圖形向右平移 2 單位

$$\Rightarrow \text{頂點坐標} (\frac{-3}{2} + 2, -\frac{9}{4}) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$$
 新圖形二次函數 $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$
- $$y = -2x^2 + 4x + 3 = -2(x - 1)^2 + 5$$

$$\Rightarrow \text{頂點坐標} (1, 5)$$
 圖形向左平方移 3 個單位，再向下平移 2 個單位 $\Rightarrow (-2, 3)$
 新圖形的二次函數為 $y = -2(x + 2)^2 + 3$

- 有一二次函數通過 $(2, -1)$ 、 $(1, 1)$ ，經過平移後與 $y = -2x^2$ 的圖形重合，請問：此二次函數為何呢？
- 將 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形，向左移 2 單位，再向上移 1 單位，得 $y = 2x^2 - 9x + 14$ ，請問： a 、 b 、 c 之值為何呢？

解

- 設二次函數 $y = -2x^2 + bx + c$

$$\Rightarrow \text{通過} (1, 1), (2, -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -2 + b + c \\ -1 = -8 + 2b + c \\ b + c = 3 \\ 2b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow b = 4, c = -1$$

$$\Rightarrow y = -2x^2 + 4x - 1$$
- 平移後 a 值不變 $\Rightarrow a = 2$

$$y - 1 = 2(x + 2)^2 + b(x + 2) + c$$

$$y - 1 = 2(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 + (8 + b)x + 9 + 2b + c$$

$$\begin{cases} 8 + b = -9 \\ 9 + 2b + c = 14 \end{cases} \Rightarrow b = -17, c = 39$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -17, c = 39$$

同步評量 1

- (A) 1. 坐標平面上， $(2, 3)$ 這點會在下列哪一個二次函數的圖形上？
- (A) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ (B) $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$ 1. $(2, 3)$ 在 $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 的圖形上
 (C) $y = (x + 2)^2 + 3$ (D) $y = 2x^2 + 3$
- (C) 2. 下列哪一個二次函數圖形會經過原點？
- (A) $y = -5x^2 + 12$ (B) $y = x^2 - 3$ 2. 若一函數之函數圖形通過原點，則其常數項為 0，而在選項中，只有(C) $y = 2x^2 + 3x$ 的常數項為 0
 (C) $y = 2x^2 + 3x$ (D) $y = -2x^2 - 4x - 2$
- (C) 3. 二次函數 $y = -2x^2 + 3$ 圖形的頂點坐標為下列何者選項？
- (A) $(-2, 3)$ (B) $(3, -2)$ (C) $(0, 3)$ (D) $(3, 0)$ 3. $y = -2x^2 + 3$ 的頂點坐標為 $(0, 3)$
- (A) 4. 二次函數 $y = x^2 - 1$ 的對稱軸方程式為下列何者選項？
- (A) $x = 0$ (B) $y = -1$ (C) $y = 0$ (D) $x = -1$ 4. $y = x^2 - 1$ 的圖形頂點為 $(0, -1)$ ，對稱軸為 y 軸，故對稱軸方程式為 $x = 0$
- (A) 5. 下列哪一個函數圖形的開口最大？
- (A) $y = -\frac{1}{3}x^2$ (B) $y = -\frac{3}{4}x^2$ 5. \therefore 在二次函數 $y = ax^2$ 中， $|a|$ 值愈小，開口愈大，

$$\text{又} \because \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}, \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}, \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2},$$
 其中最小者為 $\frac{1}{3}$ $\therefore y = -\frac{1}{3}x^2$ 的開口最大
- (C) 6. 若將 $y = 2(x - 2)^2 - 3$ 的圖形，向左平移 m 單位，向下平移 n 單位，可得 $y = (2 + 1)^2 - 5$ ，則 $m - n = ?$
- (A) -1 (B) 0 6. $y = 2(x - 2 + m)^2 - 3 - n$ 與 $y = 2(x + 1)^2 - 5$ 為同一函數圖形
 故
$$\begin{cases} -2 + m = 1 \\ -3 - n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow m - n = 1$$

 (C) 1 (D) 2

能力

二次函數的極值

一 配方法及公式法

$$\begin{aligned} & (\text{一般式}) y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow (\text{標準式}) y = a(x-p)^2 + q \\ \Rightarrow y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\ \Rightarrow \text{令 } p &= -\frac{b}{2a}, q = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow y = a(x-p)^2 + q \\ \Rightarrow \text{二次函數的頂點坐標 } (p, q) &= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

二 二次函數極值的歸納表

一般式 $y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$ 標準式 $y = a(x-p)^2 + q$	
① 當 $a > 0$ ，在 $x = p$ 時， y 有 最小值 q $y = a(x-p)^2 + q \geq q$	② 當 $a < 0$ ，在 $x = p$ 時， y 有 最大值 q $y = a(x-p)^2 + q \leq q$
$y = a(x-p)^2 + q \Rightarrow p = -\frac{b}{2a}, q = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow$ 頂點坐標 $(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$	
① 當 $a > 0$ ，在 $x = \frac{-b}{2a}$ 時 $\Rightarrow y$ 有 最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	② 當 $a < 0$ ，在 $x = \frac{-b}{2a}$ 時 $\Rightarrow y$ 有 最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$

師說 3

〈二次函數的極值〉

演練 3

- 二次函數 $y = -3x^2 + ax + b$ ，當 $x = 3$ 時有最大值 4，請問： a 、 b 為何呢？
- 二次函數 $y = 2x^2 - 12x + 15$ ，當 $2 \leq x \leq 5$ 時，試求 y 之最大值與最小值？

解

- $\because x = 3$ 時有最大值 4，
 $y = -3(x-3)^2 + 4 = -3x^2 + 18x - 23$
比較係數得 $a = 18, b = -23$
- $y = 2x^2 - 12x + 15$
 $= 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 15$
 $= 2(x-3)^2 - 3$
 \Rightarrow 當 $x = 3$ ， y 有最小值 -3
又 $\because 2 \leq x \leq 5$
當 $x = 2 \Rightarrow y = 2(2-3)^2 - 3 = -1$
當 $x = 5 \Rightarrow y = 2(5-3)^2 - 3 = 5$
 $\Rightarrow y$ 的**最大值為 5，最小值為 -3**

- 設 $2x + y = 100$ ，試求 $x^2 + y^2$ 的最小值為何呢？
- 設 $1 \leq x \leq 4$ ，且 $y = x^2 - 4x + 5$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，請問： $M + m = ?$

解

- $\because 2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$
 $x^2 + y^2 = x^2 + (100 - 2x)^2$
 $= 5x^2 - 400x + 10000$
 $= 5(x-40)^2 + 2000 \geq 2000$
 $\therefore x^2 + y^2$ 有**最小值 2000**
- $\because y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow$ 最小值 $m = 1$
當 $x = 4$ 時，最大值 $M = 4^2 - 4 \times 4 + 5 = 5$
 $\Rightarrow M + m = 5 + 1 = 6$

師說 4

〈二次函數極值的應用〉

演練 4

花嶺旅行社的花東旅行團，預定人數為 30 人，每人收費 6000 元，但若增加 1 人，則每人減收 100 元，請問：應增加多少人，旅行社才能收到最多錢？最多可收多少錢？

●解

設增加 x 人，全部的收入為 y 元

$$\begin{aligned} y &= (30+x)(6000-100x) \\ &= -100x^2 + 3000x + 180000 \\ &= -100(x^2 - 30x + 15^2) + 180000 + 22500 \\ &= -100(x-15)^2 + 202500 \leq 202500 \end{aligned}$$

當 $x=15$ 時，有最大值 202500

∴ 應增加 15 人，最多可收 202500 元

如果牛肉攤商將 1 公斤牛肉定價為 400 元，則每日可賣 600 公斤，若每公斤價錢下跌 x 元，則多賣 $2x$ 公斤，請問：每公斤牛肉的定價為多少時，才可收入最大的金額呢？

●解

設牛肉每公斤下跌 x 元時，其為收入為 y 元

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= (400-x)(600+2x) \\ &= -2x^2 + 200x + 240000 \\ &= -2(x^2 - 100x + 2500) + 245000 \\ &= -2(x-50)^2 + 245000 \leq 245000 \end{aligned}$$

∴ 當 $x=50$ ， y 有最大值 245000 元

⇒ 每公斤的牛肉定價 = $400 - 50 = 350$ (元)

同步評量 2

(C) 1. 二次函數 $y = -2(x-1)^2 + 3$ ，下列選項何者正確？

- (A) 有最小值 3 (B) 有最小值 -3
(C) 有最大值 3 (D) 有最大值 -3

1. $y = -2(x-1)^2 + 3$ ∵ $-2(x-1)^2 \leq 0$
∴ $y = -2(x-1)^2 + 3 \leq 3$, y 有最大值 3

(D) 2. 二次函數 $y = (x+2)^2 - 3$ ，當 $x = a$ 時， y 有最小值，則 $a = ?$

- (A) 3 (B) -3 (C) 2 (D) -2

2. ∵ $y = (x+2)^2 - 3 \geq -3$ ∴ 當 $x = -2$ 時，
 y 有最小值 -3，∴ $a = -2$

(C) 3. 設二次函數 $y = x^2 - 4x + k$ 的最小值為 5，則 $k = ?$

- (A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 25

3. $y = x^2 - 4x + k = (x^2 - 4x + 4) - 4 + k$
 $= (x-2)^2 + (k-4) \geq k-4 \Rightarrow k-4 = 5$ ∴ $k = 9$

(B) 4. 二次函數 $y = -x^2 + x + 3$ 的最大值等於多少？

- (A) 3 (B) $\frac{13}{4}$
(C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{9}{4}$

4. $y = -x^2 + x + 3 = -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} + 3 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{4} \leq \frac{13}{4}$,
 y 的最大值為 $\frac{13}{4}$

(A) 5. 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 有最小值，則下列選項何者正確？

- (A) $a > 0$ (B) $a < 0$
(C) $a = 0$ (D) 無法確定 a 值的正負

5. ∵ $y = ax^2 + bx + c$ 有最小值 ∴ $a > 0$

(D) 6. 若 $-3 \leq x \leq 5$ ，且 $y = -x^2 + 6x + 1$ 的最大值 M ，最小值 m ，則 $M + m = ?$

- (A) 20 (B) -61
(C) 16 (D) -16

6. $y = -(x^2 - 6x) + 1 = -(x-3)^2 + 10$
當 $x = 3$ 時，則 $M = 10$ ；
當 $x = -3$ 時，則 $m = -26$, $M + m = -16$

(D) 7. 數線上兩點 $A(3)$ 、 $B(7)$ ，在 \overline{AB} 上有一點 P ，使 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 的值最大，則 P 點坐標為何？

- (A) -4 (B) 4
(C) -5 (D) 5

7. 設 P 點坐標為 x
 $\overline{PA} \times \overline{PB} = (x-3)(7-x) = -x^2 + 10x - 21$
 $= -(x^2 - 10x + 5^2) - 21 + 25$
 $= -(x-5)^2 + 4$
∴ P 點坐標為 5



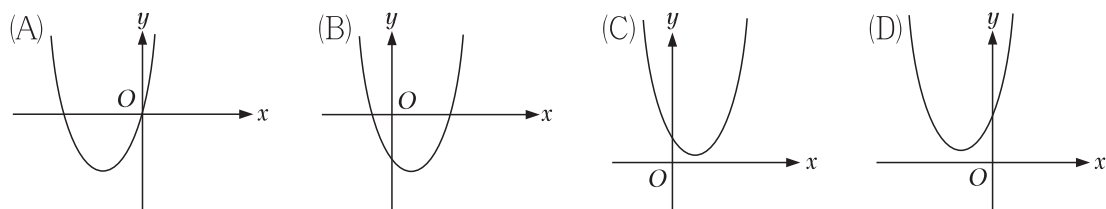
基本觀念題

(C) 1. 假設 $y = -x^2 + 4x + 1$ ，請問：其最大值為何呢？
 (A) 無最大值 (B) 7 (C) 5 (D) 3 1. $y = -(x-2)^2 + 5$ ，當 $x=2$ 時， y 有最大值 5

(B) 2. 二次函數 $y = -x^2 - x + 2$ 的頂點在第幾象限？
 (A) 一 (B) 二 2. $y = -x^2 - x + 2 = -(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 2 + \frac{1}{4} = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$
 (C) 三 (D) 四 \therefore 頂點 $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ 在第二象限

(C) 3. $y = x^2 - 5x + 6$ 的圖形不經過第幾象限？
 (A) 一 (B) 二 3. $y = x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 5x + \frac{25}{4}) + 6 - \frac{25}{4} = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$
 (C) 三 (D) 四 \therefore 頂點 $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$ ，開口向上，圖形不經過第三象限

(D) 4. 二次函數 $y = (x + 1)^2 + 2$ 的圖形為下列何者？

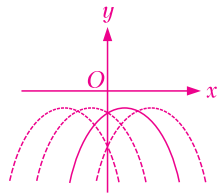


4. $y = (x + 1)^2 + 2$ 圖形的頂點坐標為 $(-1, 2)$ ，且開口向上

(D) 5. 設二次函數在 $x = 1$ 時有最小值 2，當 $x = 0$ 時， $y = 3$ ，請問：此二次函數為何呢？
 (A) $y = -x^2 + 2x + 3$ (B) $y = -x^2 - 2x + 3$ 5. $y = a(x-1)^2 + 2$ ($a > 0$)，將 $x=0, y=3$
 (C) $y = x^2 + 2x + 3$ (D) $y = x^2 - 2x + 3$ 代入 $\Rightarrow a(-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$
 $\Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

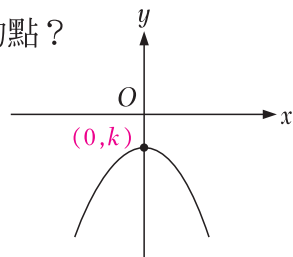
(B) 6. 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形完全在 x 軸的下方，則下列何者一定正確？

(A) $a < 0, b^2 - 4ac < 0, c > 0$ 6. $\because y = ax^2 + bx + c$ 的圖形在 x 軸下方，
 (B) $a < 0, b^2 - 4ac < 0, c < 0$ \therefore 圖形如圖所示，
 (C) $a > 0, b^2 - 4ac > 0, c < 0$ 可知 $a < 0, c < 0, b^2 - 4ac < 0$ ，
 (D) $a < 0, b^2 - 4ac < 0$ ，無法判斷 c 的正負 但無法確定 b 的正負



(C) 7. 如右圖，函數 $y = ax^2 + k$ 之圖形，則 (a, k) 屬於第幾象限的點？

(A) 一 7. $y = ax^2 + k$ 頂點坐標為 $(0, k)$ 在 y 軸下方，故 $k < 0$ ，
 (B) 二 而圖形開口向下，故 $a < 0$ ， $\therefore (a, k)$ 在第三象限
 (C) 三
 (D) 四



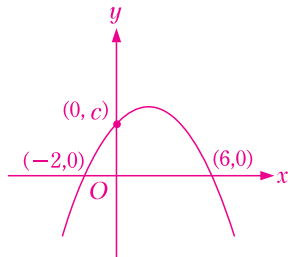
(D) 8. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形交 x 軸於 $A(5, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，交 y 軸於 $C(0, 5)$ ，則其頂點在坐標平面上第幾象限？

(A) 一 (B) 二 8. 設 $y = a(x-5)(x-1)$ ，以 $(0, 5)$ 代入得： $5 = a(-5)(-1)$ ， $\therefore a = 1$ ，
 (C) 三 (D) 四 故 $y = (x-5)(x-1) = x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$
圖形的頂點坐標為 $(3, -4)$ ，在第四象限內

(B) 9. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形與 x 軸之交點為 $(6, 0)$ 與 $(-2, 0)$ 且與 y 軸交於正向上，則下列選項何者正確？

- (A) $a > 0$
- (B) $a < 0$
- (C) $c < 0$
- (D) 無法判定 a 、 c 的正負

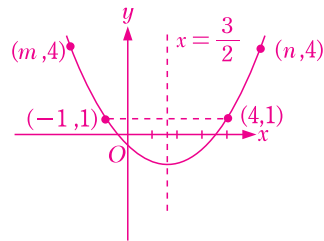
9. 依題意二次函數的概略圖形如圖所示， \therefore 圖形開口向下
 $\therefore a < 0$ ，又圖形與 y 軸交於正向 $\therefore c > 0$



(C) 10. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(-1, 1)$ 、 $(4, 1)$ 、 $(m, 4)$ 、 $(n, 4)$ ，則 $m + n = ?$

- (A) -1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 5

10. $y = ax^2 + bx + c$ 的大略圖形如圖所示，
 對稱軸為 $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{m+n}{2} = \frac{3}{2}$
 $\therefore m+n=3$



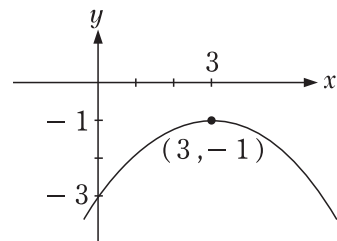
(B) 11. 若二次函數圖形 $y = -2x^2 + ax + 3$ 的對稱軸是直線 $x = -3$ ，則此圖形的頂點坐標為何？

- (A) $(3, 21)$
- (B) $(-3, 21)$
- (C) $(-12, -21)$
- (D) $(12, -21)$

11. $y = -2x^2 + ax + 3 = -2(x^2 - \frac{a}{2}x) + 3$
 $= -2(x - \frac{a}{4})^2 + \frac{24 + a^2}{8}$
 $\frac{a}{4} = -3, a = -12$ ，則 $y = -2(x + 3) + 21$
 \Rightarrow 頂點坐標 $(-3, 21)$

(A) 12. 如右圖，二次函數的頂點坐標為 $(3, -1)$ ，則此二次函數為下列何者？

- (A) $y = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 1$
- (B) $y = \frac{2}{9}(x-3)^2 - 1$
- (C) $y = -\frac{2}{9}(x+3)^2 - 1$
- (D) $y = \frac{2}{9}(x+3)^2 - 1$



12. $y = a(x-3)^2 - 1$ ，將 $(0, -3)$ 代入左式
 $-3 = a \times 9 - 1, a = -\frac{2}{9}, y = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 1$

(C) 13. 二次函數 $y = -4x^2 + 4x - 3$ 的圖形與 x 軸的交點狀況，下列何者正確？

- (A) 有兩個交點
- (B) 有一個交點
- (C) 沒有交點
- (D) 無法判斷

13. $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -32 < 0$ (沒有交點)

(D) 14. 若二次函數 $y = 3x^2 - 5x + 1$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{13}}{6}$
- (B) $\frac{\sqrt{13}}{5}$
- (C) $\frac{\sqrt{13}}{4}$
- (D) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

14. 令 $y = 0, 3x^2 - 5x + 1 = 0$ ，
 $\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}, \overline{AB} = \left| \frac{5 + \sqrt{13}}{6} - \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

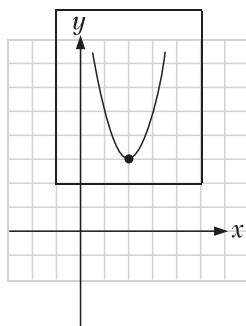
(D) 15. 若下列四個點均在 $y = 3(x - \frac{3}{4})^2 + 12$ 的圖形上，則哪一點的位置最低？

- (A) $(-2, a)$
- (B) $(-1, b)$
- (C) $(0, c)$
- (D) $(1, d)$

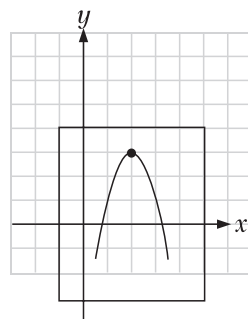
15. $y = 3(x - \frac{3}{4})^2 + 12$ 的最低點為 $(\frac{3}{4}, 12)$
 愈靠近該點者 (即 x 坐標愈接近 $\frac{3}{4}$ 者)，其位置愈低



(A) 1. 小梅將一張畫有拋物線的透明片擺到坐標平面上，將拋物線頂點與點(2, 3)重合，開口向上時，此拋物線為二次函數 $y = 2(x - 2)^2 + 3$ 的圖形，如圖(一)。若她將透明片反轉，使得開口向下且頂點的位置不變，如圖(二)，則圖(二)的拋物線為下列哪一個二次函數的圖形？



圖(一)



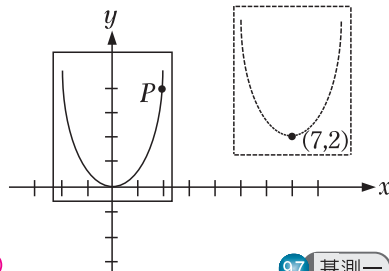
圖(二)

- (A) $y = -2(x - 2)^2 + 3$
- (B) $y = -2(x - 2)^2 - 3$
- (C) $y = -2(x + 2)^2 + 3$
- (D) $y = -2(x + 2)^2 - 3$

1. 開口向上 x^2 項係數為正，開口向下 x^2 項係數為負。
此題的頂點不變，故圖(二)的二次函數為 $y = -2(x - 2)^2 + 3$

97 基測二

(B) 2. 如右圖，坐標平面上有一透明片，透明片上有一拋物線及一點 P ，且拋物線為二次函數 $y = x^2$ 的圖形， P 的坐標(2, 4)。若將此透明片向右、向上移動後，得拋物線的頂點坐標為(7, 2)，則此時 P 的坐標為何？



- (A) (9, 4) (B) (9, 6)
- (C) (10, 4) (D) (10, 6)

2. \because 原頂點(0, 0)右移7，
向上移2後到新頂點(7, 2)
 \therefore 平移後 $P(2+7, 4+2) \Rightarrow P(9, 6)$

97 基測一

(D) 3. 關於方程式 $49x^2 - 98x - 1 = 0$ 的解，下列敘述何者正確？

- (A) 無解
- (B) 有兩正根
- (C) 有兩負根
- (D) 有一正根及一負根

3. $49x^2 - 98x - 1 = 0, x^2 - 2x - \frac{1}{49} = 0, (x - 1)^2 = \frac{50}{49}$
 $\Rightarrow x - 1 = \pm \frac{5\sqrt{2}}{7}, x = 1 \pm \frac{5\sqrt{2}}{7} \Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{49} = 7$
 $\therefore \frac{5\sqrt{2}}{7} > 1 \Rightarrow$ 有一正根，一負根

97 基測一

(D) 4. 下列哪一個二次函數，其圖形和 $y = 4x^2 - 8x$ 的圖形有相同的頂點？

- (A) $y = 2x^2 - 4x$ (B) $y = -2(x + 1)^2$
- (C) $y = 2(x + 1)^2 + 4$ (D) $y = -2(x - 1)^2 - 4$

4. $y = 4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x) = 4(x - 1)^2 - 4$
圖形的頂點坐標(1, -4)與之相同頂點的為
 $y = -2(x - 1)^2 - 4$

98 基測二

(C) 5. 有一算式“(50 - □) × (□ + 10)”，其中兩個□內規定皆填入相同的正整數。例如：當□填入“1”時，“(50 - 1)(1 + 10) = 539”，即此算式的值為539。求此算式的最大值為何？

- (A) 700 (B) 800
- (C) 900 (D) 1000

5. 令 $\square = x,$
 $(50 - x)(x + 10) = -x^2 + 40x + 500$
 $= -(x^2 - 40x + 20^2) + 500 + 400$
 $= -(x - 20)^2 + 900 \Rightarrow$ 當 $x = 20$ 時，可得最大值 900

98 基測一



(C) 1. 下列有關二次函數 $y = -9(x - \frac{2}{3})^2 + 45$ 的敘述何者正確？

- (A) 此函數圖形的開口向上
- (B) 當 $x = -\frac{2}{3}$ 時，有最小值 45
- (C) 當 $x = \frac{2}{3}$ 時，有最大值 45
- (D) 當 $x = 6$ 時，有最大值 45

1. $y = -9(x - \frac{2}{3})^2 + 45 \because x^2$ 項係數為 -9，
故圖形開口向下，且當 $x = \frac{2}{3}$ 時有最大值 45

- (D) 2. 設二次函數 $y = -x^2 + 2bx + a$ 圖形的最高點坐標為 $(2, 5)$ ，請問： $a + b = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
 2. $y = -(x-b)^2 + a + b^2$ ，最高點 $(b, a + b^2) = (2, 5)$
 $b = 2, a = 1 \Rightarrow a + b = 3$
- (C) 3. 有關於二次函數 $y = f(x) = x^2 - 10x + 24$ 的圖形，下列敘述何者正確呢？
 (A) 圖形全部落在第一象限中
 (B) 圖形有極小值出現在第二象限中
 (C) 圖形不經過第三象限
 (D) 圖形不經過第四象限
 3. $y = f(x) = x^2 - 10x + 24 = (x-5)^2 - 1$
 當 $x = 5$ 時，有極小值 -1 \therefore 極小值出現在第四象限，
 令 $y = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow x = 4$ 或 6
 \Rightarrow 與 x 軸交於 $(4, 0), (6, 0)$
 令 $x = 0 \Rightarrow y = 24$
 \Rightarrow 與 y 軸交於 $(0, 24) \Rightarrow$ 圖形不經過第三象限
- (B) 4. 有關於函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c, ac \neq 0$ 之圖形的敘述，下列何者錯誤呢？
 (A) 為一拋物線
 (B) 與 x 軸至少有一個交點
 (C) 當 $b^2 = 4ac$ 時，與 x 軸僅有一個交點
 (D) 當 $b = 0$ 時，與 x 軸的交點不可能只有一個
 4. 當 $b^2 - 4ac < 0$ 時，圖形與 x 軸無交點
- (C) 5. 二次函數 $y = x(36 - x)$ 的最大值為何？
 (A) 36 (B) 320 (C) 324 (D) 234
 5. $y = -x^2 + 36x = -(x^2 - 36x + 18^2) + 324$
 $= -(x - 18)^2 + 324 \leq 324 \therefore$ 最大值為 324
- (D) 6. $y = (x - h)^2$ 之圖形與下列哪一個函數之圖形對稱於 x 軸？
 (A) $y = (x + h)^2$ (B) $y = x^2 + h$
 (C) $y = x^2 - h$ (D) $y = -(x - h)^2$
 6. $y = (x - h)^2$ ，頂點 $(h, 0)$ ，開口向上，
 則與其對稱於 x 軸之圖形頂點亦為 $(h, 0)$ 而開口向下，
 即為 $y = -(x - h)^2$
- (B) 7. 在坐標平面上，若二次函數 $y = -3x^2 + 6x$ 的頂點 A 到原點 O 的距離為 d ，則下列選項何者正確？
 (A) $2 < d < 3$ (B) $3 < d < 4$ (C) $4 < d < 5$ (D) $5 < d < 6$
 7. $y = -3x^2 + 6x = -3(x^2 - 2x + 1) + 3 = -3(x - 1)^2 + 3$ ，頂點 $A(1, 3)$
 $\therefore d = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，故 $3 < d < 4$
- (C) 8. 在坐標平面上兩點 $A(1, 0), B(3, 2)$ ，在 x 軸上取一點 C ，使得 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 的值最小，求 C 點坐標為何？
 (A) $(0, -2)$ (B) $(-2, 0)$
 (C) $(2, 0)$ (D) $(0, 2)$
 8. 設 $C(x, 0)$ ，
 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (x - 1)^2 + (x - 3)^2 + 2^2 = 2x^2 - 8x + 14$
 $= 2(x - 2)^2 + 6$ ，
 $x = 2$ 時有最小值
- (A) 9. 俊影老師要利用 100 公尺長的繩子圍出一個矩形的花園，其邊長各為多少公尺才能使得圍成的面積最大呢？
 (A) 25、25 公尺
 (B) 20、30 公尺
 (C) 22、28 公尺
 (D) 18、32 公尺
 9. 設長為 x ，寬為 $(50 - x)$ 時，面積 $= x(50 - x)$ 為最大
 面積 $= -x^2 + 50x = -(x^2 - 50x + 25^2) + 625 = -(x - 25)^2 + 625$
 當 $x = 25$ 時，有面積最大值 625
- (C) 10. 蘋果園裡種了 30 棵蘋果樹，平均每棵年產 400 個蘋果，若在此果園中每加種一棵蘋果樹，平均每棵年產量減少 10 個，則應種多少棵蘋果樹才能使年產量最多？
 (A) 5 (B) 15
 (C) 35 (D) 45
 10. 設加種 x 棵，產量為 y 個，
 $y = (30 + x)(400 - 10x) = 12000 + 100x - 10x^2$
 $= -10(x^2 - 10x + 25) + 12000 + 250 = -10(x - 5)^2 + 12250 \leq 12250$
 $x = 5$ 時產量最大，故應種 $30 + 5 = 35$ (棵)
- (D) 11. 若二次函數 $y = ax^2 - 12x + b$ ，在 $x = \frac{-3}{2}$ ，有最大值 10，則數對 (a, b) 為何呢？
 (A) $(2, -3)$ (B) $(-3, 2)$
 (C) $(1, -4)$ (D) $(-4, 1)$
 11. $y = ax^2 - 12x + b = a(x + \frac{3}{2})^2 + 10 = ax^2 + 3ax + (\frac{9}{4}a + 10)$
 $\Rightarrow \begin{cases} 3a = -12 \\ \frac{9}{4}a + 10 = b \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 1$

1 基測出題機率★★☆☆☆ 2 難易度★★☆☆☆ 3 優先選讀率★★★★☆

Try! Try! 說謎解思

● 數學健康知多少? 測驗就知道!

- (X) 1. 圓形(餅)圖通常用來表示連續型的資料。
💡 圓形(餅)圖用來表示"間斷型"或"類別型"的資料 能力一
- (X) 2. 相對累積次數是"相對次數"除以"總次數"。
💡 相對累積次數 = $\frac{\text{累積次數}}{\text{總次數}}$
- (X) 3. 調查全班的身高之後計算其平均數、中位數、眾數皆會相同。
💡 不一定, 應判斷身高資料是否呈現常態分配 能力二
- (X) 4. 平均數可以用來瞭解數據資料的分散情形。
💡 平均數無法判斷資料分散情形, 可用全距或四分位距
- (X) 5. 中位數與平均數會受到極端值影響, 而眾數不會。
💡 中位數與眾數不受極端值影響, 而平均數會受影響
- (○) 6. 四分位距用來描述資料的分散情況, 其中第 2 個四分位數即是中位數。
💡 第 2 個四分位數是中位數 能力三
- (X) 7. 中位數一定會在盒狀圖的中間。
💡 中位數不一定會在盒狀圖的中間
- (○) 8. 香腸攤備有兩顆骰子, 投擲一次的點數組合有 36 種情形。
💡 $6^2 = 36$ 能力四
- (X) 9. 丟擲一枚公正硬幣 4 次, 如果第 1、2、3 次都出現正面, 則第 4 次出現正面的機率略小於出現反面的機率。
💡 第 4 次出現正反面的機率仍相同
- (○) 10. 連續擲一粒骰子兩次, 出現的點數和為 7 點的機率最大。
💡 連擲兩次, 共有 $6^2 = 36$ 種結果, 點數和為 7 的有 6 種情形, 機率 $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

數學 健康狀況檢核表 —— ※同學們! 別忘了檢核一下自己數學的健康狀況喔!

答對題數	1~2 題	3~4 題	5~6 題	7~8 題	9 題	10 題
健康指標	植物人	加護病房	住院	急診	健康	非常健康
醫療措施	細讀 KO 必然甦醒	讀通 KO 才能康復	專心聽講 反覆練習	專心聽老師 講解 KO	直接做 KO 題目	直接做 模擬試題
請打☑						



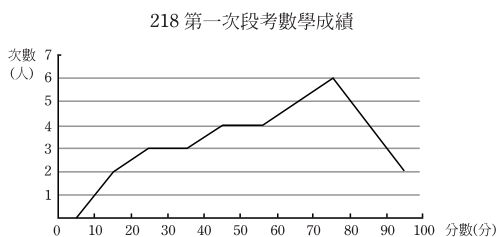
能力

統計圖表的判讀

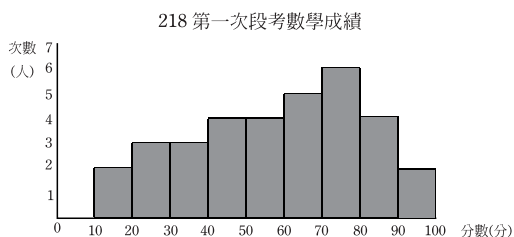
統計圖表的種類大致上有下列幾種：折線圖、直方圖、長條圖、圓形圖等。

1. 折線圖與直方圖：常用於分組的連續資料上，方便瞭解各組資料的分散情形及趨勢。

連續資料



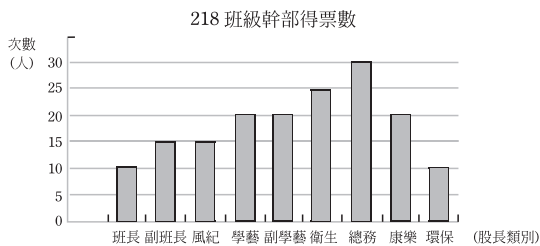
折線圖



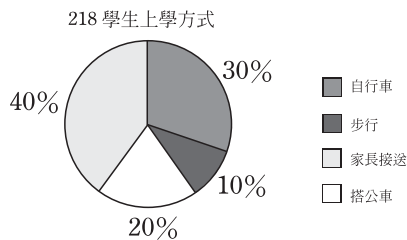
直方圖

2. 長條圖與圓形圖：常用於類別的間斷資料上，方便瞭解或比較各類別間的大小或各類量總量的百分率；因此，資料性質不同，所用圖表亦不相同。

間斷資料



長條圖



圓形圖

連續資料的分組製表

1. 設組距時，避免資料重複，必須特別註明組距的邊界點。

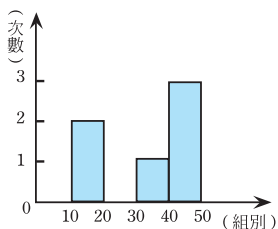
例1：20~30 ($20 \leq a < 30$)，表示在 20 與 30 之間（包含 20，不含 30）

2. 相對次數：即該筆資料次數相對於總資料次數所占的比例。

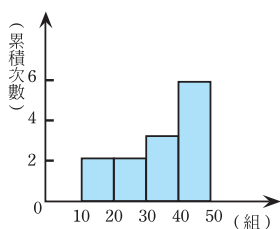
3. 累積次數：即該筆資料的次數為上一筆資料次數的累加。

4. 相對累積次數：即該筆資料累積次數相對於總資料次數所占的比例。

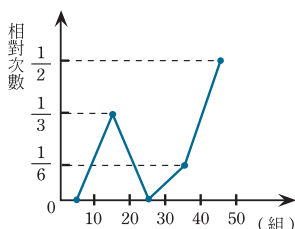
資料值 (a)	$0 \leq a < 10$	$10 \leq a < 20$	$20 \leq a < 30$	$30 \leq a < 40$	$40 \leq a < 50$
次數	0	2	0	1	3
相對次數	0	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
累積次數	0	2	2	3	6
相對累積次數	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{6}$



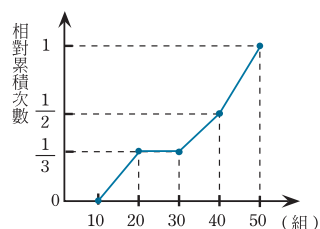
▲次數直方圖



▲累積次數直方圖



▲相對次數折線圖



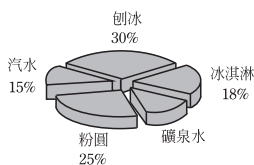
▲相對累積次數折線圖

師說 1

〈統計圖表的判讀〉

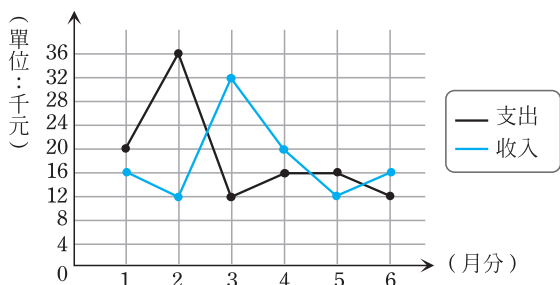
演練 1

1. 奇鼎國中園遊會時，3 年 5 班賣冰品及冷飲，結束後他們把各項收入繪製成圓形百分圖，如圖(一)，如果刨冰收入 1050 元，請問：總收入多少元？礦泉水收入多少元呢？



圖(一)

2. 圖(二)是陳先生 97 年上半年每月收入及支出折線圖，請問：(1)陳先生平均每月收入多少元？(2)陳先生 97 年上半年結餘或透支多少元？



圖(二)

解

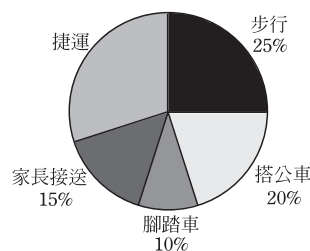
1. (1) 總收入 = $1050 \div 30\% = 3500$ (元)
 (2) $3500 \times (1 - 30\% - 15\% - 25\% - 18\%) = 3500 \times 12\% = 420$ (元)
2. (1) $(16 + 12 + 32 + 20 + 12 + 16) \div 6 = 18$,
 $18 \times 1000 = 18000$ (元)
 (2) $20 + 36 + 12 + 16 + 16 + 12 = 112$,
 $112 - 108 = 4$, $4 \times 1000 = 4000$ (元) ,
透支 4000 元

同步評量 1

- (B) 1. 右圖是奇鼎國中學生上學的交通情況統計圖，已知全校共有學生 2600 人，請問：搭捷運到學校有多少人呢？

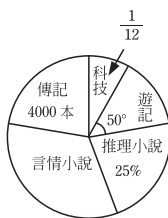
- (A) 760
 (B) 780
 (C) 800
 (D) 820

1. $2600 \times (100 - 25 - 20 - 10 - 15)\% = 780$ (人)

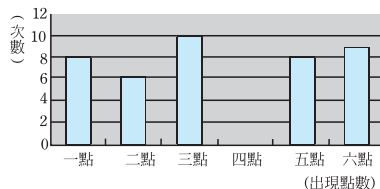


1. 圖(一)是奇鼎國中圖書館 2008 年書籍借出情形的圓形百分圖，如果 2008 年共借出 18000 本，請問：(1)傳記這一項所占的圓心角為多少度？(2)借出最多的項目與最少的項目相差多少本？

2. 哲南在賭場將一顆公正骰子連續投擲 50 次，並將結果記錄如圖(二)，但是兒子小麥把四點的那一條線擦掉了，請問：(1)四點出現幾次呢？(2)二點出現的次數占總次數的百分比為何呢？(3)如果小麥投擲 200 次，按照圖(二)的結果，3 點應該出現大約多少次呢？



圖(一)



圖(二)

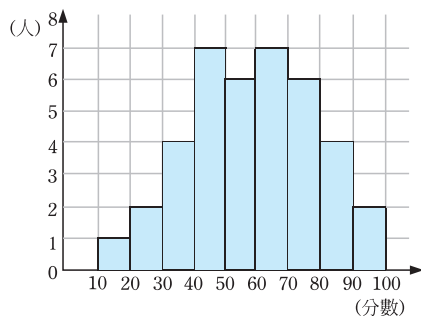
解

1. (1) $360^\circ \times \frac{4000}{18000} = 80^\circ$
 (2) $360^\circ - 80^\circ - 360^\circ \times \frac{1}{12} - 50^\circ - 360^\circ \times 25\% = 360^\circ - 80^\circ - 30^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 110^\circ$
 最多： $18000 \times \frac{110^\circ}{360^\circ} = 5500$ (本)
 最少： $18000 \times \frac{1}{12} = 1500$ (本)
 $5500 - 1500 = 4000$ (本)
2. (1) $50 - (8 + 6 + 10 + 8 + 9) = 9$ (次)
 (2) $\frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$
 (3) $10 \times (\frac{200}{50}) = 40$ (次)

(C) 2. 右圖是2年18班第二次段考的數學成績直方圖，請問：80分(含)以上占總人數的百分之幾呢？

- (A) 13.4
- (B) 14.4
- (C) 15.4
- (D) 16.4

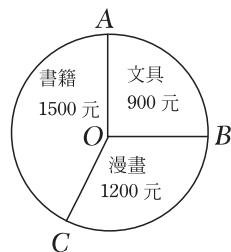
$$2. \frac{6}{39} \times 100\% \approx 15.4\%$$



(C) 3. 右圖是育安書局耶誕節營收的圓形圖，請問： $\angle BOC$ 應是多少度呢？

- (A) 110°
- (B) 115°
- (C) 120°
- (D) 125°

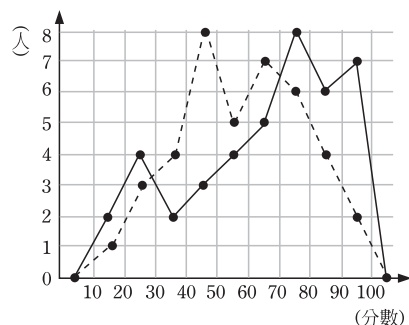
$$3. \angle BOC = \frac{1200}{1500 + 900 + 1200} \times 360^\circ = 120^\circ$$



(D) 4. 右圖是第一次(實線)與第二次(虛線)段考的數學成績折線圖，請問：50到100分之間的人數變化為何？

- (A) 增加5人
- (B) 減少5人
- (C) 增加6人
- (D) 減少6人

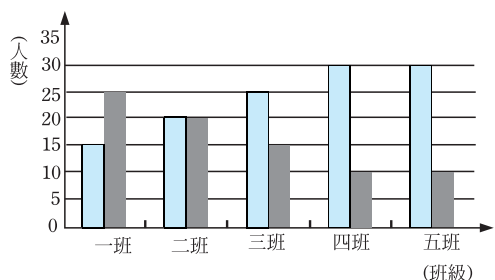
$$4. \begin{aligned} & \text{第一次} = 4 + 5 + 8 + 6 + 7 = 30, \\ & \text{第二次} = 5 + 7 + 6 + 4 + 2 = 24 \\ & \therefore \text{第二次較第一次減少6人} \end{aligned}$$



(A) 5. 模範生選舉要選出一名模範生代表，長婷與珍昌兩人出馬競選，試由右圖的統計表格(藍色是長婷，灰色是珍昌)，請問：哪一位候選人當選呢？

- (A) 長婷
- (B) 珍昌
- (C) 平手
- (D) 不能比較

$$5. \begin{aligned} & \text{長婷得票} = 120 \text{ 票}, \\ & \text{珍昌得票} = 80 \text{ 票} \end{aligned}$$



能力

平均數、中位數與眾數

一 算術平均數 (arithmetic mean, M)

算術平均數簡稱為平均數 (mean)，係指將一群數值資料的數值加總除以數值的個數。

其公式如下所示：

$$M = \frac{\text{各數的總和}}{\text{各數的個數}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

二 中位數 (median, M_d)

中位數是指將一群數值資料依照大小排序之後，位居該排列次序最中間的那一位所代表的數值。其算法如下所示：

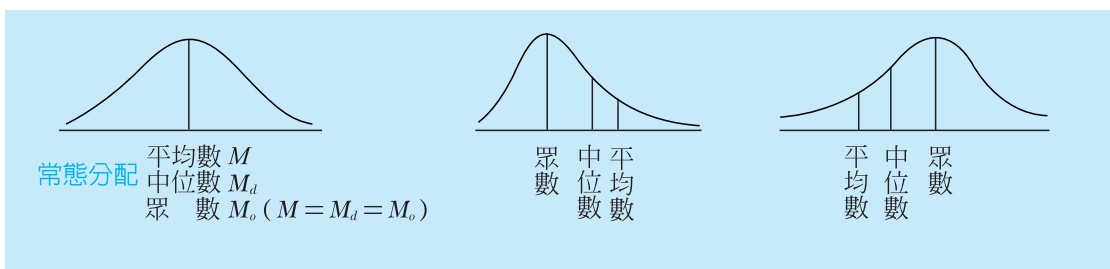
1. 先將一群數值由小到大順序排列
2. 若該群數值的個數 (N) 共有 [奇數個] \Rightarrow 第 $\frac{N+1}{2}$ 的數值為中位數
3. 若該群數值的個數 (N) 共有 [偶數個] \Rightarrow 第 $\frac{N}{2}$ 及 $\frac{N}{2} + 1$ 的數值之平均數為中位數

三 眾數 (mode, M_o)

眾數 (M_o) 是指一群數值資料中出現最多次的數值，也是被用於描述數值資料的集中趨勢。

四 平均數、中位數及眾數的關係

1. 平均數、中位數及眾數，並不一定會相同，因為原理不同，使用時機不同，因此也會有所不同。如果以一個常態分配圖來說，此三者會相同，但若資料不是成常態分配，則會有下列不同的情形出現。



名稱	特質	用途
平均數	受極端值的影響	能用於表達百分比
中位數	受排序的影響	用於有次序的資料
眾數	受次數多寡影響	可用於非數值的資料

3. 兩份資料合併

兩份資料合併	眾數不一定是先前任一個資料的眾數
	中位數不一定是先前任一個資料的中位數
數份資料合併	平均數可由數份資料比例及原平均求得

4. 調整資料值的影響

如果將原來次數分配表的每一個資料加、減、乘一個定數 A ，則新資料值：

- (1) 新的眾數 = 舊的眾數 (+、-、 \times) A
- (2) 新的中位數 = 舊的中位數 (+、-、 \times) A
- (3) 新的平均數 = 舊的平均數 (+、-、 \times) A

師說 2

〈平均數與中位數〉

演練 2

1. 假設有一數列為 2、4、6、8、10、12 六個數的算術平均數為 V ，中位數為 M ，請問：其大小關係為何呢？
2. 育安 10 次測驗的平均分數是 83 分，史老師將他 10 次考試的最低分 (52 分) 與最高分 (98 分) 去掉，作為育安學期末的平均分數，請問：育安學期末的平均分數為何呢？

解

$$1. \text{算數平均數 } V = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6} = 7$$

$$\text{中位數 } M = \frac{6 + 8}{2} = 7, \Rightarrow V = M$$

$$2. \frac{83 \times 10 - 52 - 98}{8} = 85 \text{ (分)}$$

1. 麒仲前四次考試的平均分數為 88 分，請問：第五次要考多少分，才能使五次的平均為 90 分呢？
2. 育平的期末考考四科，已知國文、數學、生物三科平均分數是 82 分；國文、英文、數學三科平均分數是 90 分；國文、英文、生物三科平均分數是 88 分，英文、數學、生物三科平均分數是 84 分，請問：此四科的平均分數為何呢？

解

$$1. \text{設 5 次需考 } x \text{ 分}$$

$$(4 \times 88 + x) \div 5 = 90, x = 98 \text{ (分)}$$

$$2. \begin{cases} \text{國} + \text{數} + \text{生} = 82 \times 3 \\ \text{國} + \text{英} + \text{數} = 90 \times 3 \\ \text{國} + \text{英} + \text{生} = 88 \times 3 \\ \text{英} + \text{數} + \text{生} = 84 \times 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{平均} = \frac{(82 + 90 + 88 + 84) \times 3}{3 \times 4} = 86 \text{ (分)}$$

師說 3

〈平均數、中位數、眾數〉

演練 3

投擲兩顆骰子 40 次，每次兩顆骰子出現的點數和的次數分配表如下表，試求出現點數和的 (1) 平均數 (四捨五入求至小數第一位)；(2) 中位數；(3) 眾數。

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	2	3	1	5	4	6	9	7	2	1	0

解

$$(1) (2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 6 + 8 \times 9 + 9 \times 7 + 10 \times 2 + 11 \times 1) \div 40$$

$$= \frac{274}{40} \approx 6.9$$

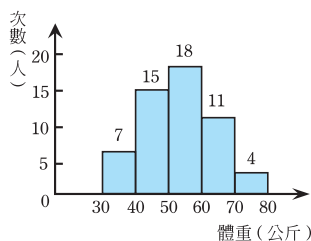
$$(2) 40 \div 2 = 20, 20 + 1 = 21,$$

由小至大排序找第 20 位數為 7，第 21 位數為 7

$$\Rightarrow \text{中位數} = \frac{7 + 7}{2} = 7$$

$$(3) \text{眾數} = 8$$

如圖，為 3 年 18 班學生體重直方圖。試求：



- (1) 全班學生體重的平均數？(四捨五入求至小數第一位)
- (2) 全班學生體重的中位數？
- (3) 全班學生體重的眾數？

解

$$(1) \text{取組中點，並以 55 為標準值，}$$

平均數

$$= (35 \times 7 + 45 \times 15 + 55 \times 18 + 65 \times 11 + 75 \times 4) \div 55$$

$$= 55 + (-20 \times 7 - 10 \times 15 + 10 \times 11 + 20 \times 4) \div 55$$

$$= 55 - 100 \div 55 = 55 - 1.82 = 53.18 \approx 53.2 \text{ (公斤)}$$

$$(2) \text{全體同學 55 (人)}$$

$$\Rightarrow \text{中位數的位置} = \frac{55 + 1}{2} = 28$$

\therefore 中位數在 50~60 (公斤) 這一組

$$(3) \text{眾數在 50~60 (公斤) 這一組}$$

同步評量 2

(D) 1. SOGO 百貨公司年終摸彩送給 60 位員工禮券如右表，
請問：禮券平均價值為多少元呢？

禮券面額(元)	人數(人)
1000	x
1500	10
2000	20
2500	15
總計	60

- (A) 1719.6
(B) 1917.6
(C) 1617.9
(D) 1791.6

$$1. \frac{1000 \times 15 + 1500 \times 10 + 2000 \times 20 + 2500 \times 15}{60} = 1791.6$$

(B) 2. 算術平均數可以知道資料的何種性質？

- (A) 資料分散性 (B) 資料集中性
(C) 週期性 (D) 相關性

2. 算術平均數、中位數、眾數皆為了解資料的集中性

(C) 3. 文羽在平時考試十次中最高分為 98 分，最低分是 52 分，若老師將此兩分數去掉之後，文羽的平均分數為 80 分，請問：文羽原來的平均分數為何呢？

- (A) 77 (B) 78
(C) 79 (D) 80

$$3. \frac{80 \times 8 + 98 + 52}{10} = 79$$

(D) 4. 老師分派五位同學將寒假作業裝訂，每一位同學裝訂一份所花的時間分別是：12、14、16、11、12 (單位：秒)，請問如果平均時間為 a ，中位數為 b ，則 $a + b = ?$

- (A) 1 (B) 12
(C) 13 (D) 25

$$4. \text{平均數 } a = \frac{12 + 14 + 16 + 11 + 12}{5} = 13, \\ \text{中位數 } b = 12, a + b = 25$$

(C) 5. 今天老師要育安計算班上同學的成績，並且每一位同學都各加 5 分，請問：「算術平均數」與「中位數」分別有何變化呢？

- (A) 增加 5 分、減少 5 分 (B) 減少 5 分、增加 5 分
(C) 增加 5 分、增加 5 分 (D) 減少 5 分、減少 5 分

5. 每一位同學各加 5 分，算術平均數也會增加 5 分，中位數亦同

能力

全距、四分位距、百分位數與盒狀圖

一 全距 (range, R)

全距是用來表示一群數值資料在團體中分散的情形，其意義是指一群數值資料中最大值與最小值的差。全距較易受到數值資料極端值影響，在解釋分散情形時比較不可靠。

$$R = \text{Max} - \text{min} \quad (\text{Max: 資料中的最大值; min: 資料中的最小值})$$

二 四分位數與四分位距

1. 「四分位數」係指將一群數值資料由小到大排序，全群個數 (N) 的第四分之一位 ($N/4$) 之數值，即為該群的第一個四分位數 (Q_1)；依序全群個數的第四分之二位 ($2N/4$) 之數值，即為該群的第二個四分位數 (Q_2)，也是中位數 (M_d)；而全群個數的第四分之三位 ($3N/4$) 之數值，即為該群的第三個四分位數 (Q_3)。

2. 「四分位距 (IQR)」係指 Q_1 到 Q_3 的距離；若四分位距 (Q) 數值愈大，代表該群數值資料分散較大；反之，則分散情形較小。四分位距的特點是較不受到數值資料極端值 (太大或太小) 的影響，較能準確描述資料的分散情形。

$$IQR = (Q_3 - Q_1)$$

全距、四分位距的速解法		
名稱	位置	判斷
min	排序中最小的數。	
Q_1	$n \times \frac{1}{4} = m$	1. 當 $m =$ 整數時，取第 m 個與第 $m + 1$ 的數，所對應數值之平均 2. 當 $m =$ 非整數時，取大於 m 的最小整數，所對應數值
Q_2	$n \times \frac{2}{4} = m$	
Q_3	$n \times \frac{3}{4} = m$	
Max	排序中最大的數。	
全距 = $Max - min$ ；四分位距 = $Q_3 - Q_1$		
n ：排序後的資料個數。 Q_1 ：第一四分位數； Q_2 ：第二四分位數； Q_3 ：第三四分位數		

三 百分位數 (percentile points, P_p)

若數值資料的個數相當大，可將資料由小到大排序，且將其分成一百個等分，則各分隔點稱為百分位數。

- 第 25 個百分位數 = 第一個四分位數 Q_1
第 50 個百分位數 = 第二個四分位數 Q_2 = 中位數
第 75 個百分位數 = 第三個四分位數 Q_3

2. 資料未分組 \Rightarrow 求第 k 個百分位數

(1) 先將資料由小到大排列： $a_1、a_2、a_3、\dots、a_n$

(2) 求 $m = n \times \frac{k}{100}$ ，判斷 $\begin{cases} m = \text{整數} \Rightarrow \text{第 } k \text{ 個百分位數} = \frac{a_m + a_{m+1}}{2} \\ m = \text{非整數} \Rightarrow \text{大於 } k \text{ 的最小整數 } p, \text{ 第 } k \text{ 百分位數} = a_p \end{cases}$

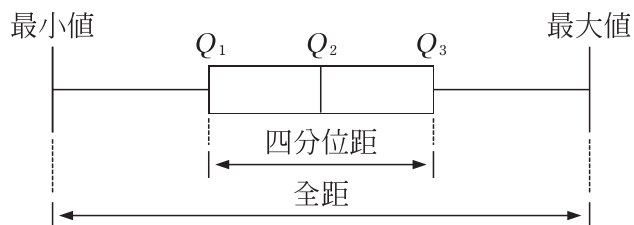
3. 資料分組 \Rightarrow 求第 k 個百分位數

(1) 將分組資料作成「累積次數百分比」折線圖。

(2) 在縱軸 $k\%$ 處畫一水平線交折線圖於一點，再過此點向下畫一鉛直線，交橫軸於 m 點，則 m 為第 k 百分位數。

四 盒狀圖 (Box Plot)

利用一群資料中最小值、 Q_1 、 Q_2 (中位數)、 Q_3 、最大值，這 5 個數據所繪製的圖形，用以瞭解資料分散的程度。



※中位數 (Q_2) 不一定在盒狀圖中間

師說 4

〈全距、四分位距與盒狀圖〉

演練 4

體育老師測量班上 11 位同學的脈搏每分鐘的跳動次數，分別為 81、77、78、85、90、73、65、82、63、72、92，請問：這些同學脈搏每分鐘跳動次數的四分位距為何呢？全距為何呢？請畫出盒狀圖。

解

(1) 將資料由小到大重新排序如下：

63、65、72、73、77、78、81、82、85、90、92

(2) 找 $Q_1 \Rightarrow 11 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

\Rightarrow 找第 3 位數值， $Q_1 = 72$

找 $Q_2 \Rightarrow 11 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$

\Rightarrow 找第 6 位數值， $Q_2 = 78$ (中位數)

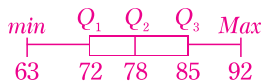
找 $Q_3 \Rightarrow 11 \times \frac{3}{4} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$

\Rightarrow 找第 9 位數值， $Q_3 = 85$

四分位距 = $Q_3 - Q_1 = 85 - 72 = 13$

(3) 全距 = 最大值 - 最小值 = $92 - 63 = 29$

(4) 盒狀圖



生物課時，老師指定八組各帶一隻小白老鼠來走迷宮，經過測試八隻老鼠走迷宮花費的時間如下：2、6.5、2.5、8.6、9.3、7.2、16.5、18 (單位：秒)，請問：小白老鼠走迷宮秒數的四分位距為何呢？全距為何呢？請畫出盒狀圖。

解

(1) 將資料由小到大重新排序如下：

2、2.5、6.5、7.2、8.6、9.3、16.5、18

(2) 找 $Q_1 \Rightarrow 8 \times \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow$ 找第 2 位與第 3 位數值

之平均值， $Q_1 = \frac{2.5 + 6.5}{2} = 4.5$

找 $Q_2 \Rightarrow 8 \times \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow$ 找第 4 位與第 5 位數值

之平均值， $Q_2 = \frac{7.2 + 8.6}{2} = 7.9$

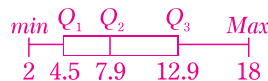
找 $Q_3 \Rightarrow 8 \times \frac{3}{4} = 6 \Rightarrow$ 找第 6 位與第 7 位數值

之平均值， $Q_3 = \frac{9.3 + 16.5}{2} = 12.9$

四分位距 = $Q_3 - Q_1 = 12.9 - 4.5 = 8.4$

(3) 全距 = 最大值 - 最小值 = $18 - 2 = 16$

(4) 盒狀圖



師說 5

〈百分位數與盒狀圖〉

演練 5

3 年 28 班，28 位同學體重由輕到重如下所示：32、33、36、42、43、45、45、47、49、50、50、50、51、52、52、53、55、57、57、58、58、60、63、63、65、66、72、74。

試求：

(1) 第 45 百分位數？

(2) $(Q_1, Q_2, Q_3) = ?$

解

(1) $28 \times \frac{45}{100} = 12.6$ ，第 45 百分位數 = $a_{13} = 51$

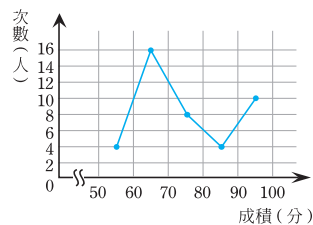
(2) $28 \times \frac{1}{4} = 7$ ， $Q_1 = \frac{a_7 + a_8}{2} = \frac{45 + 47}{2} = 46$

$28 \times \frac{1}{2} = 14$ ， $Q_2 = \frac{a_{14} + a_{15}}{2} = \frac{52 + 52}{2} = 52$

$28 \times \frac{3}{4} = 21$ ， $Q_3 = \frac{a_{21} + a_{22}}{2} = \frac{58 + 60}{2} = 59$

$(Q_1, Q_2, Q_3) = (46, 52, 59)$

右圖是 3 年 28 班週考數學成績折線圖，若以組中點代表該組的資料值，求數學成績：



(1) 第 75 百分位數在哪一組？

(2) Q_1, Q_2, Q_3 在哪一組？

解

(1) $42 \times \frac{75}{100} = 31.5$ ，第 75 百分位數 = a_{32}
 \Rightarrow 在 80~90 (分) 這一組

(2) $42 \times \frac{1}{4} = 10.5$ ， $Q_1 \Rightarrow$ 在 60~70 (分) 這一組

$42 \times \frac{1}{2} = 21$ ， $Q_2 \Rightarrow$ 在 70~80 (分) 這一組

$42 \times \frac{3}{4} = 31.5$ ， $Q_3 \Rightarrow$ 在 80~90 (分) 這一組

(3) 盒狀圖中哪段最集中？哪段最分散？

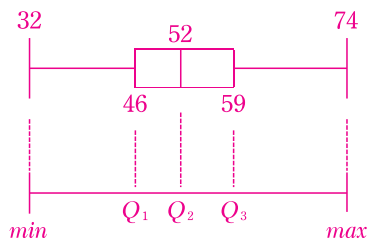
解

(3) 全距 = 最大值 - 最小值 = $74 - 32 = 42$ ，

四分位距 = $Q_3 - Q_1 = 59 - 46 = 13$

最集中： $Q_1 \sim Q_2$

最分散： $Q_3 \sim \text{最大值} (Max)$



(3) 全距與四分位距大約為何？

(4) 盒狀圖中哪段最集中？哪段最分散？

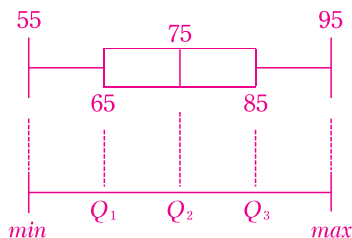
解

取資料組中點計算全距和四分位距

(3) 全距 $\doteq 95 - 55 = 40$ ，

四分位距 $\doteq Q_3 - Q_1 = 85 - 65 = 20$

(4) 四段皆相同



同步評量 3

(B) 1. 恆春鎮去年一年每月的均溫 18° 、 20° 、 24° 、 28° 、 29° 、 29° 、 30° 、 31° 、 33° 、 30° 、 25° 、 20° ，則其四分位距為何？

- (A) 6 (B) 8
(C) 10 (D) 12

1. 排序： 18 、 20 、 20 、 24 、 25 、 28 、 29 、 29 、 30 、 30 、 31 、 33

$Q_1 \Rightarrow 12 \times \frac{1}{4} = 3$ ，取第 3 與第 4 位之平均， $Q_1 = \frac{20 + 24}{2} = 22$

$Q_3 \Rightarrow 12 \times \frac{3}{4} = 9$ ，取第 9 位與第 10 位之平均， $Q_3 = \frac{30 + 30}{2} = 30$

\Rightarrow 四分位距 = $30 - 22 = 8$

(B) 2. 有一組資料的四分位距為 50，若將此資料每個數同乘上 6 倍，再加上 2 時，則新的四分位距為何？

- (A) 50 (B) 300 (C) 302 (D) 無法判斷

2. $50 \times 6 = 300$

(C) 3. 有一組資料 10 個數，其中 Q_3 (第三四分位數) 為 18，若將 10 個數同乘上 7 倍，在同時加上 7，則 Q_3 應為下列何者？

- (A) 18 (B) 126 (C) 133 (D) 無法判斷

3. $18 \times 7 + 7 = 133$

(C) 4. 柚子班上有女生 24 人，依身高(公分)的次序由矮到高排序如下： 143 、 144 、 145 、 146 、 147 、 147 、 148 、 148 、 148 、 149 、 150 、 151 、 151 、 151 、 152 、 152 、 155 、 156 、 157 、 157 、 158 、 159 、 160 、 163 。則下列敘述何者正確？

- (A) 第 10 百分位數為 144 公分
(B) 第 15 百分位數為 146.5 公分
(C) 第 78 百分位數為 157 公分
(D) 第 90 百分位數為 159.5 公分

4. (A) $P_{10} = 24 \times 0.1 = 2.4$ ，取第 3 位 $\Rightarrow 145$

(B) $P_{15} = 24 \times 0.15 = 3.6$ ，取第 4 位 $\Rightarrow 146$

(C) $P_{78} = 24 \times 0.78 = 18.72$ ，取第 19 位 $\Rightarrow 157$

(D) $P_{90} = 24 \times 0.9 = 21.6$ ，取第 22 位 $\Rightarrow 159$

(B) 5. 承上題，柚子班上 24 位女生身高的四分位距為何？

- (A) 8.5 (B) 9
(C) 9.5 (D) 10

5. $24 \times \frac{1}{4} = 6$ ， $Q_1 = \frac{a_6 + a_7}{2} = 147.5$ ； $24 \times \frac{3}{4} = 18$ ， $Q_3 = \frac{a_{18} + a_{19}}{2} = 156.5$
四分位距 = $Q_3 - Q_1 = 9$

能力四 機率與抽樣

一 機率

若一次試驗可能出現 n 種結果，且每一種結果發生的機會都相等，則每種結果發生的機率為 $\frac{1}{n}$ 。

1. 試驗

丟擲一枚質地均勻(公正)的硬幣，會出現正面及反面，二種結果。

丟擲一顆質地均勻(公正)的骰子，會出現一~六點，六種結果。

2. 事件

在每一種試驗中，總會出現許多結果，其中的「部分結果」的組合稱為事件。

3. 事件機率

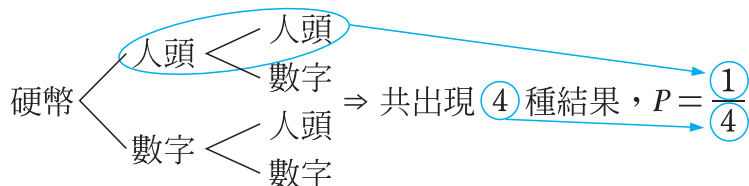
在一試驗中，可能發生的結果有 m 種，在每一種結果發生的機會相等之下，若事件包含其中 n 種可能的結果，即是事件發生的機率 $P = \frac{n}{m}$ 。

4. 樹狀圖

樹狀圖是一種簡單的方式，可以將可能發生的結果一一列出，方便我們去探討某事件發生的機率。

例2：若以一枚公正硬幣投擲兩次，出現兩次都是人頭的機率為何？

樹狀圖的畫法如下圖所示：



二 機率的三大基本問題

1. 擲骰子問題：

(1) 擲 n 顆骰子或 n 次，有 6^n 種結果。

(2) 擲 2 顆骰子，【各點數和】出現的機率如下表所示：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機 率	$\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. 丟硬幣問題：

(1) 丟 n 枚硬幣或 n 次，有 2^n 種情形。

(2) 丟三次一枚公正硬幣，各事件發生的機率如下表所示：

事 件	三 正	二正一反	一正二反	三 反
機 率	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. 取球問題：

(1) 有一個袋子，裝有紅球 n 顆、白球 m 顆，每次各取一球，**取出後放回**，則有下列情形：

① 取出紅球的機率 $P = \frac{n}{n+m}$ ② 取出白球的機率 $P = \frac{m}{n+m}$

(2) 有 A、B 兩個袋子，A 袋裝有紅球 n 顆、白球 m 顆，B 袋裝有紅球 r 顆、白球 s 顆；兩袋每次各取一球，**取出後放回**，則有下列情形：

事件	皆紅球	皆白球	A 紅 B 白	A 白 B 紅
機率	$P = \frac{n}{n+m} \times \frac{r}{r+s}$	$P = \frac{m}{n+m} \times \frac{s}{r+s}$	$P = \frac{n}{n+m} \times \frac{s}{r+s}$	$P = \frac{m}{n+m} \times \frac{r}{r+s}$

※【機率的變化多樣化，以上僅提供幾種基本型態，希望同學能透徹瞭解不要死記！】

二 抽樣

抽樣是爲了節省人力、物力與時間的一種方法，主要用來能夠推估接近整體母群的結果。因此，**抽樣是存在有誤差的**，**而且抽取的樣本也必須具有代表性**，否則會影響整體推估的效果。

師說 6

〈機率 I〉

演練 6

有二十顆球，球上分別標明 1、2、…、20 號，任取一球，請回答下列問題：

1. 抽到號碼是 3 的倍數的機率爲何呢？
2. 抽到號碼是質數，且號碼不小於 10 的機率爲何？

解

1. 3 的倍數有：

3、6、9、12、15、18 (共 6 個)

$$P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

2. 號碼是質數且不小於 10 的數有：

11、13、17、19 (共 4 個)

$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

英語演講比賽，史老師欲以抽籤方式由衍邵、佑鈞、崇賢三人中選一名參加比賽，若先由衍邵抽、佑鈞次之、崇賢最後，請問：誰被抽中的機率最大呢？

解

由衍邵先抽，則衍邵抽中的機率爲 $\frac{1}{3}$ 。

衍邵沒抽中時，

由佑鈞抽中的機率爲 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 。

衍邵與佑鈞皆沒抽中，

而崇賢抽中的機率爲 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$

因此三人抽中的機率相等

師說 7

〈機率 II〉

演練 7

季芬以投擲一粒公正骰子的點數當作一元二次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ 中 x 的係數 a 的值，今季芬投擲這粒公正骰子一次，使此方程式有解的機率為多少？

●解

方程式有解必須符合判別式 $D \geq 0$

$$D = b^2 - 4ac = a^2 - 4 \times 1 \times 2 = a^2 - 8 \geq 0$$

$$a = 3, 4, 5, 6 (a \leq 6)$$

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

設一元二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的係數 a 和 b 是由擲骰子的點數決定，擲第一次得 a ，擲第二次得 b ，請問：此方程式有相等實根（重根）的機率為何呢？

●解

方程式有相等實根（重根），則判別式 $D = 0$

$$D = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow a^2 = 4b, \text{ 可知 } a \text{ 必為偶數}$$

$$\text{當 } a = 2 \text{ 時, } b = 1$$

$$\text{當 } a = 4 \text{ 時, } b = 4$$

$$\text{當 } a = 6 \text{ 時, } b = 9 \text{ (不合)}$$

$$\text{機率 } P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

師說 8

〈抽樣〉

演練 8

家樂福舉辦年終摸彩活動，總經理想知道摸彩箱中有多少張彩券，於是請秘書丟入紅色的紙片（大小與彩券相同）200 張，均勻攪拌後，隨機抓取一把，其中有 5 張紅色紙片，10 張彩券，請問：摸彩箱中大約有多少彩券呢？

●解

設摸彩箱中有彩券 x 張

$$\frac{200}{x + 200} = \frac{5}{10 + 5} \Rightarrow 3000 = 5x + 1000$$

$$\Rightarrow x = \underline{400 \text{ (張)}}$$

桃園機場海關檢驗美國進口的櫻桃，有 300 盒櫻桃禮盒，每盒有 100 顆櫻桃，今天抽驗其中 15 盒，發現有 30 顆有蟲蟲出現，請問：有蟲蟲的機率是多少呢？大概有多少顆櫻桃有蟲蟲呢？

●解

$$15 \text{ 盒共有 } 15 \times 100 = 1500 \text{ 顆}$$

$$\text{有蟲蟲的機率} \Rightarrow P = \frac{30}{1500} = 0.02 = \underline{2\%}$$

$$\text{有蟲蟲的櫻桃顆數}$$

$$\Rightarrow 300 \times 100 \times 2\% = \underline{600 \text{ (顆)}}$$

同步評量 4

(D) 1. 下列何種情況不實施抽樣較為恰當？ 1. ∴ 全班人數不多，所以不用抽樣，直接調查即可

- (A) 進口奶粉的帶菌程度 (B) 廣播節目的收視率
(C) 市長候選人的民意支持度 (D) 全班學生的興趣調查

(D) 2. 同時投擲兩顆骰子，請問：下列敘述何者錯誤？

- (A) 一粒出現 1 點，另一粒出現 6 點的機率為 $\frac{1}{18}$
(B) 兩粒都出現 6 點的機率為 $\frac{1}{36}$
(C) 出現的點數和為 9 的機率為 $\frac{1}{9}$
(D) 出現的點數和不大於 6 的機率為 $\frac{2}{3}$

2. 出現點數和不大於 6 的機率為

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(B) 3. 從車站到學校有 4 條路線，小胖打算由車站到學校，同時阿瘦打算從學校到車站，兩人各隨機選擇一條路線，試問兩人相遇的機率為何？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$
 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

3. 若車站到學校有 1、2、3、4，四條路，小胖：車站到學校，阿瘦：學校到車站，所有事件有 $4^2 = 16$ (種)，兩人相遇有 (1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 4) 共四種， $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

(A) 4. 魚池裡養了一些虱目魚，從池裡捉了 20 條魚作上記號後放回池中，經過一段時間後，再從池中隨機抓出 50 條魚，其中有 4 條魚身上有記號，則池中約有多少條魚？

- (A) 250 (B) 300 (C) 200 (D) 350

4. 設約有 x 條魚， $\frac{20}{x} = \frac{4}{50}$ ， $1000 = 4x$ ， $x = 250$

(B) 5. 有一批奇異果共有 900 箱，每箱內有 40 顆，現在欲抽樣調查奇異果的損傷情形，打開其中二箱，結果共有 5 顆損傷，則抽樣調查的結果中，完整沒損傷的機率為何？

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{13}{16}$

5. 兩箱共 $40 \times 2 = 80$ (顆)，機率為 $\frac{80 - 5}{80} = \frac{75}{80} = \frac{15}{16}$



基本觀念題

(A) 1. 仁鴻第一次段考 6 科的平均是 86.5 分，如果數學不算，其它 5 科的平均是 93 分，則他的數學成績是幾分？

- (A) 54 (B) 56 (C) 58 (D) 59

1. $86.5 \times 6 - 93 \times 5 = 519 - 465 = 54$ 分

(B) 1. 若有 9 筆資料由小而大排序為 a_1 、 a_2 、……、 a_9 ，若拿掉 a_3 ，則此時中位數為何呢？

- (A) $\frac{a_4 + a_5}{2}$ (B) $\frac{a_5 + a_6}{2}$ (C) a_5 (D) a_6

1. a_1 、 a_2 、 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7 、 a_8 、 a_9 ，共 8 項，中位數為第 $\frac{8}{2} = 4$ 位與第 $\frac{8}{2} + 1 = 5$ 位數值的平均 = $\frac{a_4 + a_5}{2}$

(C) 3. 奇鼎國中第一次段考數學有 15% 的人考 95 分，20% 的人考 90 分，5% 的人考 85 分，12% 的人考 80 分，18% 的人考 75 分，其餘的人考 70 分，則此次段考數學成績的中位數為何？

- (A) 70 (B) 75 (C) 80 (D) 85

3. $100\% - (15\% + 20\% + 5\% + 12\% + 18\%) = 30\%$
 $30\% + 18\% + 12\% = 60\%$ ，中位數為 80

(D) 4. 有一組資料恰為等差數列，共有 13 項，公差是 3，求其四分位距為何？

- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18

4. $13 \times \frac{1}{4} = 3.25$ ， $13 \times \frac{3}{4} = 9.75$ ，

$Q_3 - Q_1 = a_{10} - a_4 = a_1 + 9d - (a_1 + 3d) = 6d = 6 \times 3 = 18$

(D) 5. 史老師家庭每月支出 50000 元，其中衣著每月支出 5000 元，以圓面積圖表示，則其圓心角的大小為幾度？

- (A) 45° (B) 31.5° (C) 50° (D) 36°

5. $360^\circ \times \frac{5000}{50000} = 360^\circ \times \frac{1}{10} = 36^\circ$

(A) 6. 查理布朗給史努比六月分家庭預算圓面積圖中，交通費所占扇形之兩半徑的夾角為 60° ，請問：交通費占總預算的多少？

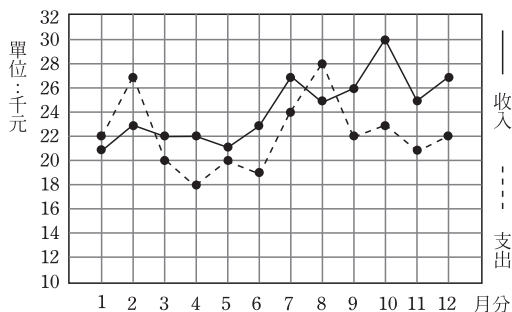
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

6. 占 $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

- (C) 7. 奇鼎國中將全校學生人數分一年級男生、一年級女生、二年級男生、二年級女生、三年級男生、三年級女生六組繪製圓面積圖，得三年級男生所占的圓心角為 45° ，若三年級男生有 300 人，則該校全校學生共有多少人？
- (A) 1350 (B) 2000 (C) 2400 (D) 4500

7. 設全校有 x 人，
 則 $\frac{300}{x} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$ ， $\frac{300}{x} = \frac{1}{8}$
 $\therefore x = 2400$

- (D) 8. 奧麗薇小姐去年 12 個月的收支情形如下圖所示，則下列何者正確？



8. (A) 觀察折線圖可知收入最多的是 10 月
 (B) 整年平均收入為
 $(21 + 23 + 22 + 22 + 21 + 23 + 27 + 25 + 26 + 30 + 25 + 27) \div 12 = 292 \div 12 = 24.333\dots$
 全年平均收入約為 24333 元
 (C) 整年平均支出為
 $(22 + 27 + 20 + 18 + 20 + 19 + 24 + 28 + 22 + 23 + 21 + 22) \div 12 = 266 \div 12 = 22.1666\dots$
 全年平均支出約為 22167 元
 (D) 收支相抵不夠的月份有 1 月、2 月、8 月共 3 個月

- (A) 收入最多的是 8 月分 (B) 整年平均收入為 24000 元
 (C) 整年平均支出為 20000 元 (D) 有 3 個月收支相抵不夠

- (D) 9. 小菁參加全民英檢共有 15000 人參加，小菁成績的百分位數為 99，則下列何者不可能是她的名次？
- (A) 1 (B) 15 (C) 30 (D) 151

9. $15000 \times \frac{1}{100} = 150$ 表示在 150 名內，故(D)不可能

- (D) 10. 小華在基測中，成績的百分位數為 97，此表示下列何者？

- (A) 他的成績贏過 97 人 (B) 約有 97% 的人成績比他好
 (C) 他的成績平均 97 分 (D) 他的成績約贏過 97% 的人

10. (A) 應該是贏過考生人數的 97%
 (B) 應該是有 97% 的人成績比他差
 (C) 無法知道分數

- (C) 11. 彰化到新竹，走山線有 4 種方法，走海線有 5 種方法，則某人以抽籤決定由彰化到新竹走海線的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{5}{4}$

11. 走海線的機率為 $\frac{5}{9}$

- (A) 12. 投 1 粒骰子兩次，則出現的點數和為 7 之機率為何？

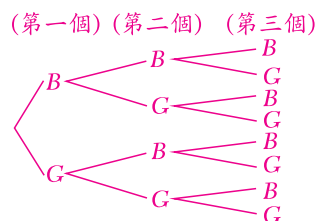
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$

12. 點數和為 7 有 (1, 6)、(2, 5)、(3, 4)、(4, 3)、(5, 2)、(6, 1) \therefore 機率為 $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

- (C) 13. 一個有三個小孩的家庭，其中兩個男孩、一個女孩的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{8}$
 (B) $\frac{1}{4}$
 (C) $\frac{3}{8}$
 (D) $\frac{5}{8}$

13. 畫樹狀圖如圖
 \therefore 二個男孩，一個女孩的事件有 (B, B, G), (B, G, B), (G, B, B) 三種結果，故機率為 $\frac{3}{8}$



- (C) 14. 將 0、1、2、3、4 五個數中任取二個數字 (不重複) 排成一個二位數，此二位數為偶數的機率為何？

- (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{8}{3}$
 (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{8}$

14. (1) 任取二數字 (不重複) 排成二位數有 $5 \times 4 - 4 = 16$ (個)
 (2) 此二位數為偶數有 10、12、14、20、24、30、32、34、40、42 共 10 個
 \therefore 為偶數的機率為 $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

(C) 15. 甲、乙兩人由 1、2、3、4 四個數字，各自任意寫出一個數字（設每個數字被寫的機會相等），則甲所寫數字大於乙所寫數字的機率為何？

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$
(C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{12}$

15. \therefore

甲	2	3	4
乙	1	1, 2	1, 2, 3

，共 6 種可能 \therefore 甲、乙兩人由 1、2、3、4 四個數字，各自任意出一個數字有 $4 \times 4 = 16$ (種) 可能， \therefore 機率 = $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$



1. 前三次總分 = $87 + 83 + 88 = 258 \Rightarrow$ 令第四次成績為 x ， $\frac{258 + x}{4} + 1 \Rightarrow 774 + 3x = 1044, x = 90$

(D) 1. 小明前三次的考試成績分別為 87、83、88 分。若他在第四次考試後，計算四次的平均分數，發現比前三次的平均分數多 1 分，則小明第四次的成績為幾分？

- (A) 87 (B) 88 (C) 89 (D) 90

97 基測二

(C) 2. 某袋中有 1 號球 8 顆、2 號球 7 顆、3 號球 6 顆。若自袋中抽取一球，且每球被抽中的機會相等，則抽中 3 號球的機率為何？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{21}$

2. $P = \frac{6}{8 + 7 + 6} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

97 基測二

(C) 3. 阿曜將班上同學的基測數學成績分成 1~15、16~30、31~45、46~60 等四組，並將資料記錄於右表。表中 x 、 y 、 z 、 u 的值，下列哪一選項是正確的？

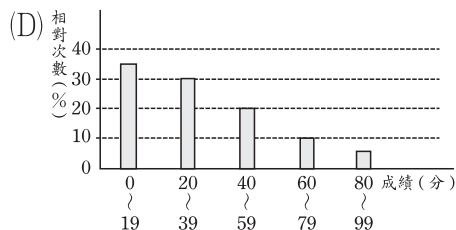
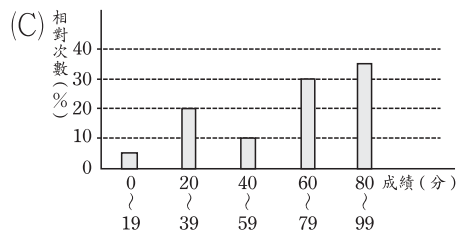
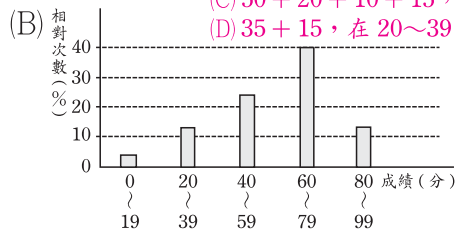
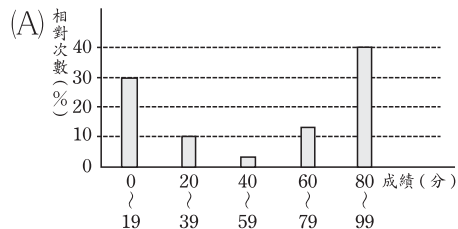
成績(分)	1~15	16~30	31~45	46~60
次數(人)	1	6	4	x
相對次數(%)	5	30	20	y
累積相對次數(%)	5	z	u	100

- (A) $x = 11$ (B) $y = 40$
(C) $z = 35$ (D) $u = 20$

3. $z = 30 + 5 = 35, u = 20 + 35 = 55, y = 100 - 55 = 45$
 $\frac{4}{20} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 9$

97 基測二

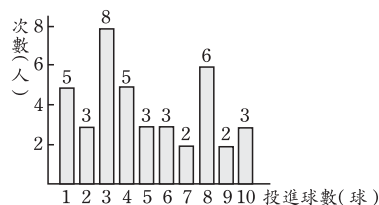
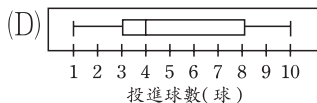
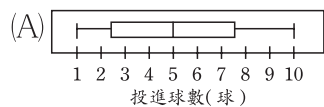
(D) 4. 下列各選項所呈現的資料，哪一個中位數最小？



4. (A) $30 + 10 + 5 + 5$ ，在 60~79 這組
(B) $5 + 15 + 25 + 5$ ，在 60~79 這組
(C) $50 + 20 + 10 + 15$ ，在 60~79 這組
(D) $35 + 15$ ，在 20~39 這組

97 基測二

(D) 5. 若右圖是某班 40 人投籃成績次數長條圖，則下列何者是右圖資料的盒狀圖？



97 基測一

5. $40 \times 25\% = 10 \Rightarrow$ 找第 10 與第 11 筆資料的平均 $\Rightarrow Q_1 = 3$
 $40 \times 50\% = 20 \Rightarrow$ 找第 20 與第 21 筆資料的平均 $\Rightarrow Q_2 = 4$
 $40 \times 75\% = 30 \Rightarrow$ 找第 30 與第 31 筆資料的平均 $\Rightarrow Q_3 = 8$

(A) 6. 某籃球隊隊員只 16 人，每人投籃 6 次，且右表為其投進球數的次數分配表。若此隊投進球數的中位數是 2.5，則眾數為何？

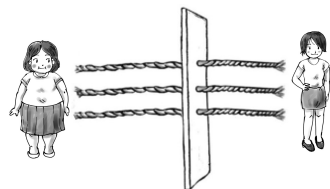
投進球數	0	1	2	3	4	5	6
次數(人)	2	2	a	b	3	2	1

- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 6

6. 中位數 = 2.5, $2 + 2 + a = \frac{16}{2}$,
 $a = 8 - 2 - 2 = 4, b = 6 - 4 = 2$

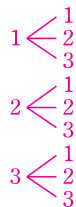
97 基測一

(B) 7. 如右圖，有三條繩子穿過一片木板，姊妹兩人分別站在木板的左、右兩邊，各選該邊的一條繩子。若每邊每條繩子被選中的機會相等，則兩選到同一條繩子的機率為何？



- (A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{6}$
(D) $\frac{1}{9}$

7. 選同一條繩子的狀況有 $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$
 $\Rightarrow P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



97 基測一



(B) 1. 將一粒公正的骰子連擲二次，出現點數和小於 6 的機率為 a ，出現點數和大於 6 的機率為 b ，則 $a + b = ?$

- (A) $\frac{27}{36}$ (B) $\frac{31}{36}$
(C) $\frac{27}{31}$ (D) $\frac{30}{31}$

1. 點數和為 6 有 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 共有 5 種, $\therefore 36 - 5 = 31 \Rightarrow$ 機率 = $\frac{31}{36}$

(C) 2. 一列開往豐原的電聯車有三節車廂供乘客搭乘，芳琦、詩涵兩人任意搭乘這三節車廂到豐原（每節車廂被選擇的機會均等），則二人在同一車廂之機率為何？

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(D) 3. 投擲一粒公正的骰子兩次，令第一次得到的點數為 x ，第二次得到的點數為 y ，則下列敘述何者正確？

- (A) 於每次實驗中， $x > y$ 的機率為 $\frac{1}{2}$
(B) 於每次實驗中， x 為 1 點的機率為 $\frac{1}{2}$
(C) 於每次實驗中， (x, y) 為 $2x + y = 6$ 的解，機率為 $\frac{1}{6}$
(D) 若於每次實驗後，將所得的 (x, y) 繪於坐標平面上，則必落在第一象限上

3. (A) $P = \frac{15}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. (B) $P = \frac{1}{6}$
(C) $P = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ (D) 機率有正沒有負

(A) 4. 將一枚公正的硬幣連投 3 次，則 3 次都出現正面的機率是 a ，2 次出現正面且 1 次出現反面的機率是 b ，只出現 1 次正面的機率是 c ，最少有 1 次出現正面的機率是 d ，則 $a + b + c - d = ?$

- (A) 0 (B) $\frac{3}{8}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{8}$

4. $a = \frac{1}{8}, b = \frac{3}{8}, c = \frac{3}{8}, d = \frac{7}{8}$
 $\Rightarrow a + b + c - d = \frac{1 + 3 + 3 - 7}{8} = 0$

(D) 5. 籤筒中有 10 枝籤，分別標有 1, 2, …, 10 等號碼，從其中抽出一枝，若其號碼為 a ，則此號碼使 $a - 3$ 為正數， $a - 7$ 為負數之機率為何？

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{10}$

$$5. \begin{cases} a - 3 > 0 \\ a - 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow 3 < a < 7 \\ a = 4, 5, 6 \Rightarrow P = \frac{3}{10}$$

(C) 6. 以坐標平面的原點開始，擲一公正的硬幣，若出現正面，則向右移一單位；若出現反面，則向上移一單位，試問擲硬幣四次到達 (3, 1) 的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{16}$

$$6. P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

(C) 7. 有七個數由小到大排列，其算術平均數為 47，前四個數的算術平均數為 42，後四個數的算術平均數為 51，請問：此七個數的中位數為何呢？

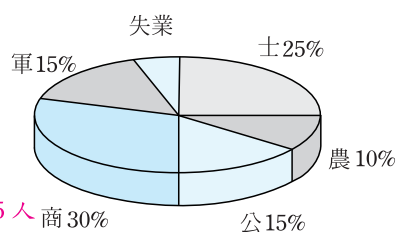
- (A) 23 (B) 33 (C) 43 (D) 53

$$7. \text{中位數} = 42 \times 4 + 51 \times 4 - 47 \times 7 = 43$$

(D) 8. 右圖是奇鼎國中調查校內學生家長職業的結果，已知家長是務農與從商的相差 100 人，請問：目前有多少位的學生家長失業呢？

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25

$$8. \text{全校人數} \Rightarrow 100 \div 20\% = 500 \\ 500 \times (100 - 15 - 30 - 15 - 10 - 25)\% = 25 \text{ 人}$$



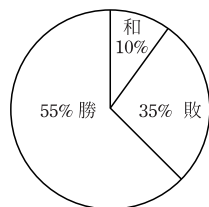
(A) 9. 紐約洋基隊的教練將這一年來所有比賽的勝、敗、和的場數所占的百分比繪製成圓形百分圖，如圖所示。如果這一年共比賽 40 場，請問：紐約洋基這一年的勝率是百分之多少？(以四捨五入法取一位小數)

- (A) 61.1% (B) 61.2% (C) 61.3% (D) 61.4%

$$\text{勝率} = \frac{\text{勝場數}}{\text{出賽場數} - \text{和場數}}$$

$$9. \text{勝場數} = 40 \times 55\% = 22 \text{ (場)},$$

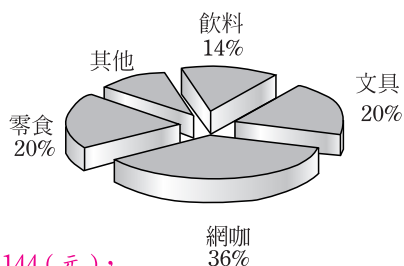
$$\text{和場} = 40 \times 10\% = 4 \text{ (場)}, \text{勝率} = \frac{22}{40 - 4} = \frac{22}{36} \approx 61.1\%$$



(D) 10. 家偉一個星期共花費 800 元，他把這 800 元花用的項目繪製圓形百分圖，如圖所示，如果他把上網咖的費用節省 50%，喝飲料的錢節省 10%，那麼他一個星期大約可節省多少元？(以四捨五入法取到整數)

- (A) 152 (B) 153 (C) 154 (D) 155

$$10. \text{網咖: } 800 \times 36\% \times 50\% = 144 \text{ (元)}, \\ \text{飲料: } 800 \times 14\% \times 10\% = 11.2 \text{ (元)}, \\ 144 + 11.2 = 155.2 \approx 155 \text{ (元)}$$



(B) 11. 已知一袋中有紅、白兩種色球共 24 顆，自其中隨機抽取 5 球，得到紅球 3 顆，則袋中最有可能的紅球數目為何呢？

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16

$$11. \text{由題目可知紅球約占全部的 } \frac{3}{5}, \text{ 因此袋中最有可能的紅球數目為 } 24 \times \frac{3}{5} = \frac{72}{5} = 14.4, \text{ 四捨五入取整數為 } 14$$

(A) 12. 袋子中原有相同大小的色球 5 個，其中黃球 4 個、白球 1 個，後來又放入黃球、白球各 2 個，則取得白球的機率會如何改變呢？

- (A) 加球後變大 (B) 加球後變小 (C) 加球後不變 (D) 加球後變為原來的兩倍

$$12. \text{原本取得白球的機率為 } \frac{1}{5}, \text{ 後來取得白球的機率為 } \frac{1 + 2}{5 + 2 + 2} = \frac{1}{3}, \text{ 所以機率變大}$$