

作者序

KO 基測數學總複習講義，今年邁入第四版，在奇鼎編輯團隊的努力之下，本書的內容愈來愈充實，幾乎年年根據學習者與教學者的意見增刪與修改，期待本書能夠更符合使用者的需求，成為更多國三學生迎戰基本學力測驗時的最佳幫手。

今年的內容也增加了「**解題小偏方**」，希望透過此一提醒能夠引導同學的解題方向，不至於在繁忙的課業下浪費太多時間摸索。此外，每一單元皆有「**基測趨勢預測題**」提供同學在複習的當下，有顯著的目標可以追尋。今年也從善如流的刪去去年的「Learning Map - 學習地圖」，改以「**重點手冊**」方式，將基測會考的重點概念與重要公式羅列其中，讓同學們要進考場之前有手冊可以憑藉，做最後的複習，此重點手冊也可謂目前坊間重點手冊中最為完整，希望不要讓同學在複習過有遺珠之憾，

提供閱讀本書的一些方法，首先，上課時一定要專心聽老師講解，其次，不要只練習學生演練與同步評量輒止，應當將後面的**基本觀念題**、**歷屆基測題**與**基測趨勢題**全部都做完，因為這些題目都是一時之選，絕對對您的複習有幫助，當您對完答案之後，將做錯的題目用螢光筆畫出來，未來再度複習時只需要計算這些題目即可，無須再浪費更多的時間一題一題做過，本書也很貼心地為每一題都附上詳解，幫助您在沒有人可以詢問或請教之下可以自修，以上方法要踏實的執行，因為基測數學每一題都是決勝關鍵，唯有細心的同學方能掌握致勝先機。在此，預先祝福您金榜題名、數學得滿分。

Sincerely yours,

 Ph. D.



第1單元	整數的四則運算與科學記號	9
	能力一 數線與整數的加減運算	
	能力二 整數的乘除與四則運算	
	能力三 乘方與指數律	
	能力四 科學記號	
第2單元	最大公因數、最小公倍數	23
	能力一 因數與倍數	
	能力二 質因數分解	
	能力三 最大公因數	
	能力四 最小公倍數	
第3單元	分數的四則運算	35
	能力一 分數的加減運算	
	能力二 分數的乘除與四則運算	
第4單元	一元一次方程式	44
	能力一 以文字符號代表數	
	能力二 一元一次式的運算	
	能力三 一元一次方程式	
	能力四 應用問題	
第5單元	二元一次聯立方程式	56
	能力一 二元一次方程式的列式	
	能力二 代入消去法與加減消去法	
	能力三 二元一次聯立方程式的應用	
第6單元	二元一次方程式的圖形	69
	能力一 直角平面坐標	
	能力二 二元一次方程式的圖形 (一)	
	能力三 二元一次方程式的圖形 (二)	
第7單元	比例與線型函數	82
	能力一 比例式	
	能力二 連比例	
	能力三 正比與反比	
	能力四 函數與線型函數圖形	
第8單元	一元一次不等式	97
	能力一 一元一次不等式	
	能力二 一元一次不等式的性質	
	能力三 解一元一次不等式與應用	

第9單元	乘法公式與多項式	107
	能力一 乘法公式	
	能力二 多項式的加減運算	
	能力三 多項式的乘除運算	
第10單元	平方根與勾股定理	120
	能力一 平方根	
	能力二 平方根的運算	
	能力三 商高定理	
第11單元	因式分解	132
	能力一 因式分解	
	能力二 十字交乘法的因式分解	
第12單元	一元二次方程式	139
	能力一 一元二次方程式的解法	
	能力二 一元二次方程式的應用	
第13單元	等差數列與等差級數	148
	能力一 數的規律與數型關係	
	能力二 等差數列與級數	
第14單元	平面圖形與立體圖形	158
	能力一 幾何圖形與角	
	能力二 圓形與扇形	
	能力三 立體圖形	
	能力四 容積與容量	
第15單元	尺規作圖與線對稱圖形	173
	能力一 尺規作圖與垂直、平分性質	
	能力二 線對稱與點對稱圖形	
第16單元	三角形	183
	能力一 內角與外角	
	能力二 多邊形的內角與外角	
	能力三 三角形的全等	
	能力四 三角形的邊角關係	
第17單元	平行與平行四邊形	198
	能力一 平行	
	能力二 平行四邊形與其他四邊形	
	能力三 三角形與四邊形中點連線	

基測模擬試題 (1~4 冊).....	213
-----------------------	-----

第18單元 相似形與相似三角形..... 217

能力一 相似形的概念與應用

第19單元 圓形..... 226

能力一 圓、點與直線

能力二 圓形與角度

能力三 圓與多邊形

第20單元 幾何證明與三角形的三心..... 239

能力一 數學證明與推理

能力二 三角形的外心、內心、重心

第21單元 二次函數..... 251

能力一 二次函數的圖形

能力二 二次函數的極值

第22單元 統計圖表與機率..... 260

能力一 統計圖表的判讀

能力二 平均數、中位數與眾數

能力三 全距、四分位距、百分位數與盒狀圖

能力四 機率與抽樣

基測模擬試題 (1~6 冊).....	277
-----------------------	-----

版本對照表

單元	版本	康軒	南一	翰林
單元 1 整數的四則運算與科學記號	一上	第一章 整數的運算	一上 第一章 整數的運算	一上 第一章 整數與數線
單元 2 最大公因數、最小公倍數	一上	第二章 分數的運算	一上 第二章 分數的運算	一上 第二章 分數的運算
單元 3 分數的四則運算	一上	第二章 分數的運算	一上 第二章 分數的運算	一上 第二章 分數的運算
單元 4 一元一次方程式	一上	第三章 一元一次方程式	一上 第三章 一元一次方程式	一上 第三章 一元一次方程式
單元 5 二元一次聯立方程式	一下	第一章 二元一次聯立方程式	一下 第一章 二元一次聯立方程式	一下 第一章 二元一次聯立方程式
單元 6 二元一次方程式的圖形	一下	第二章 直角坐標與二元一次方程式的圖形 第四章 線型函數及其圖形	一下 第二章 平面直角坐標系 第四章 函數及其圖形	一下 第二章 直角坐標與二元一次方程式的圖形 第四章 線型函數
單元 7 比例與線型函數	一下	第三章 比與比例式	一下 第三章 比例	一下 第三章 比例
單元 8 一元一次不等式	一下	第五章 一元一次不等式	一下 第五章 一元一次不等式	一下 第五章 一元一次不等式
單元 9 乘法公式與多項式	二上	第一章 乘法公式與多項式	二上 第一章 乘法公式與多項式	二上 第一章 多項式與乘法公式
單元 10 平方根與勾股定理	二上	第二章 平方根與勾股定理	二上 第二章 平方根與勾股定理	二上 第二章 二次方根與勾股定理
單元 11 因式分解	二上	第三章 因式分解	二上 第三章 因式分解	二上 第三章 因式分解

單元 \ 版本	康 軒	南 一	翰 林
單元 12 一元二次方程式	二上 第四章 一元二次方程式	二上 第四章 一元二次方程式	二上 第四章 一元二次方程式
單元 13 等差數列與等差級數	二下 第一章 等差數列與等差級數	二下 第一章 數列與等差級數	二下 第一章 數列與級數
單元 14 平面圖形與立體圖形	二下 第二章 幾何圖形與尺規作圖	二下 第二章 簡單幾何圖形	二下 第二章 幾何圖形
單元 15 尺規作圖與線對稱圖形	二下 第二章 幾何圖形與尺規作圖	二下 第二章 簡單幾何圖形	二下 第二章 幾何圖形
單元 16 三角形	二下 第三章 三角形的基本性質	二下 第三章 三角形的性質	二下 第三章 三角形的基本性質
單元 17 平行與平行四邊形	二下 第四章 平行	二下 第四章 平行與四邊形	二下 第四章 平行與四邊形
單元 18 相似形與相似三角形	三上 第一章 相似形	三上 第一章 比例線段與相似形	三上 第一章 相似形
單元 19 圓形	三上 第二章 圓	三上 第二章 圓的性質	三上 第二章 圓形
單元 20 幾何證明與三角形的三心	三上 第三章 幾何與證明	三上 第三章 幾何證明	三上 第三章 三角形的心
單元 21 二次函數	三下 第一章 二次函數	三下 第一章 二次函數	三下 第一章 二次函數
單元 22 統計圖表與機率	三下 第二章 敘述統計 第三章 機率與抽樣	三下 第二章 資料的整理與分析 第三章 機率與抽樣	三下 第二章 統計與機率

複習進度表

可依老師規畫及學生個人狀況自行調整，方便實用！

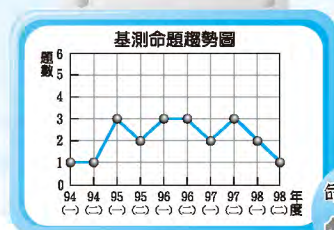
單元名稱	日期	熟練度
單元 1 整數的四則運算與科學記號	年 月 日	  
單元 2 最大公因數、最小公倍數	年 月 日	  
單元 3 分數的四則運算	年 月 日	  
單元 4 一元一次方程式	年 月 日	  
單元 5 二元一次聯立方程式	年 月 日	  
單元 6 二元一次方程式的圖形	年 月 日	  
單元 7 比例與線型函數	年 月 日	  
單元 8 一元一次不等式	年 月 日	  
單元 9 乘法公式與多項式	年 月 日	  
單元 10 平方根與勾股定理	年 月 日	  

請搭配 KO 基測複習卷一起複習，效果更佳！

單元名稱	日期	熟練度
單元 11 因式分解	年 月 日	  
單元 12 一元二次方程式	年 月 日	  
單元 13 等差數列與等差級數	年 月 日	  
單元 14 平面圖形與立體圖形	年 月 日	  
單元 15 尺規作圖與線對稱圖形	年 月 日	  
單元 16 三角形	年 月 日	  
單元 17 平行與平行四邊形	年 月 日	  
單元 18 相似形與相似三角形	年 月 日	  
單元 19 圓形	年 月 日	  
單元 20 幾何證明與三角形的三心	年 月 日	  
單元 21 二次函數	年 月 日	  
單元 22 統計圖表與機率	年 月 日	  

第 1 單元

整數的四則運算與科學記號

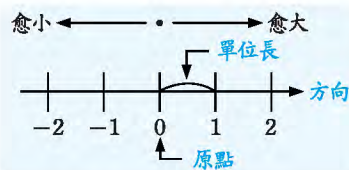


命題率
100%

能力 — 數線與整數的加減運算

一 數線的概念

如右圖把「數」標示在直線上，則此直線稱為數線，數線上應指明「原點」、「正向」、「單位長」等三個要素。



二 數

- 正數：大於 0 的數稱為正數，其中包含正整數、正分數、正小數。
- 零：0
- 負數：小於 0 的數稱為負數，其中包含負整數、負分數、負小數。

三 數的比較大小

1. **三一律**：A、B 兩數的大小關係可能有 $A > B$ 、 $A = B$ 、 $A < B$ 等三種情形，其中**僅有一種關係會成立**。
 2. **遞移律**：若有 A、B、C 三個數，則下列關係必成立。
 - (1) 若 $A > B$ ，且 $B > C$ ，則 $A > C$ ；
 - (2) 若 $A = B$ ，且 $B = C$ ，則 $A = C$ ；
 - (3) 若 $A < B$ ，且 $B < C$ ，則 $A < C$ 。
 3. 數線上「左方的數」 $<$ 「右方的數」。
- 例 1**： $-8 < -6$ ； $-2 < 0$ ； $1.2 < 3$ 。

小叮嚀

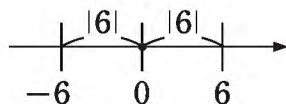
若 $A > C$ ，且 $B > C$ ，
無法比較出 A、B 兩數大小。

四 相反數

1. **相反數**：在原點的左、右兩邊且與原點距離相等的兩數，稱為相反數。
 2. 性質：
 - (1) 每一個數都有一個相反數。
 - (2) 正數的相反數為負數，負數的相反數為正數，**0 的相反數是 0**。
 - (3) **A 與 B 互為相反數，則 $A + B = 0$** 。
 - (4) 在數線上的兩點互為對稱點。
 3. 相反數的求法：只要將一個數加上「負號」就可以了。
- 例 2**：7 的相反數 $\Rightarrow -7$ ； (-7) 的相反數 $\Rightarrow -(-7) = +7$ 。

五 絕對值的概念

絕對值：數線上任一點與原點的**距離**，稱為該數的絕對值，以符號" $|$ "表示。**因為距離沒有負的，故絕對值必大於或等於 0**。



例 3： $|8| = 8$ ， $|-6| = 6$ ， $|0| = 0$ 。

六 絕對值的性質

$$1. |x| = \begin{cases} x, & \text{當 } x \geq 0 \\ -x, & \text{當 } x < 0 \end{cases} \quad (|x| \text{ 表示 } x \text{ 到原點的距離})$$

2. $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$ ，但當 $a < 0 \Rightarrow$ 則 x 不存在或稱無解。

七 整數的加減運算

1. 整數的加法：若 a 、 b 為整數，當：

(1) 同號數相加：將兩數的絕對值相加，其和的前面再冠以共同的性質符號。

① $a > 0$ 且 $b > 0$ 時， $a + b = +(|a| + |b|)$ 。

② $a < 0$ 且 $b < 0$ 時， $a + b = -(|a| + |b|)$ 。

(2) 異號數相加，絕對值大的數減絕對值小的數，其差的前面再冠以絕對值大的數的性質符號。

① $a > 0$ ， $b < 0$ ，且 $|a| > |b|$ 時： $a + b = +(|a| - |b|)$ 。

② $a > 0$ ， $b < 0$ ，且 $|a| < |b|$ 時： $a + b = -(|b| - |a|)$ 。

2. 加法的交換律：若 a 、 b 為整數，則 $a + b = b + a$ 。

3. 加法的結合律：若 a 、 b 、 c 為整數，則 $a + (b + c) = (a + b) + c$ 。

4. 整數的減法：減一個數等於加上這個數的相反數，則 $a - b = a + (-b)$ 。

5. 數線上的兩點距離：若數線上有兩點 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，則 $\overline{AB} = |a - b|$ 或 $|b - a|$ 。

6. 數線上有兩點 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，則 \overline{AB} 的中點坐標為 $\frac{a+b}{2}$ 。

老師 傳授

加減運算

學生 實作

1. $156 + (-137) + (-156) = ?$

2. $9 + (-8) - (-7) + (-6) = ?$

3. $-(5 - 9) - [-(-14) + 27] + \{-[-14 + (-18) - 23] - 14\} = ?$

4. $\frac{|(-3) + (-8)| - |(-3) - (-8)|}{|(-3) - 8| + |(-3) + 8|} = ?$

解

1. 原式 = $156 - 156 - 137 = -137$

2. 原式 = $9 - 8 + 7 - 6 = 2$

3. 原式 = $-(-4) - [14 + 27] + \{-[-14 - 18 - 23] - 14\}$
 $= 4 - 41 + \{14 + 18 + 23 - 14\}$
 $= 4 - 41 + 41 = 4$

4. 原式 = $\frac{|-11 - 5|}{11 + 5} = \frac{16}{16} = 1$

1. $(-5) + 7 + (-6) + (-8) = ?$

2. $[(-12345679) + 899931] + (-899930) = ?$

3. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 49 - 50 + 51 = ?$

4. 設 Φ 是一個新的運算符號，其定義為 $a \Phi b = |a| - b$ ，求 $5 \Phi (-4) = ?$

解

1. 原式 = $-(5 + 6 + 8) + 7 = (-19) + 7 = -12$

2. 原式 = $(-12345679) + [899931 + (-899930)] = (-12345679) + 1 = -12345678$

3. 原式 = $(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (49 - 50) + 51$
 $= (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + 51$
 $= (-25) + 51 = 26$

4. $a \Phi b = |a| - b$ ，

$5 \Phi (-4) = |5| - (-4) = 5 + 4 = 9$

2 老師 傳授

數線上的運算

學生 習作 2

若數線上有相異四點， $A(-8)$ 、 $B(-2)$ 、 $C(2)$ 、 $D(6)$ 。請問：(1) $\overline{AB} = ?$ (2) 若新的單位長為原單位長的兩倍，則 \overline{AD} 為多少個新單位長？(3) B 點的相反數是哪一點？

解

- (1) $\overline{AB} = (-2) - (-8) = \underline{6}$
 (2) $\frac{\overline{AD}}{\text{單位長}} = \frac{6 - (-8)}{2} = \underline{7}$
 (3) B 點的數 $= (-2)$ ，其相反數為 $-(-2) = 2$ ；
 B 點的相反數是 C 點

在數線上有 $A(-7)$ 、 $B(-1)$ 、 C 三點，請問：(1) 若 $3\overline{AB} = 2\overline{AC}$ ，求 $\overline{AC} = ?$ (2) 求 C 點坐標？(3) 若新的單位長為原單位長的三倍， \overline{AC} 為多少個新單位長？

解

- (1) $\overline{AB} = (-1) - (-7) = 6$ ，
 $3 \times 6 = 2 \times \overline{AC}$ ， $\overline{AC} = 18 \div 2 = \underline{9}$
 (2) $\because \overline{AC} = 9$ ， $|C - (-7)| = 9$
 $\Rightarrow |C + 7| = 9 \Rightarrow C + 7 = \pm 9$
 $\Rightarrow C = 2$ 或 -16
 (3) $\frac{\overline{AC}}{3} = \frac{9}{3} = \underline{3}$

3 老師 傳授

數線上的位置變動

學生 習作 3

數線上 $A(-3)$ 、 $B(2)$ 、 $C(8)$ ，若改以 B 點為新原點， A 、 C 的新坐標分別為 P 、 Q ，且 \overline{PQ} 中點為 M 。請問：(1) 若單位長不變，則 P 、 Q 分別為多少？又 \overline{PQ} 中點坐標 M 為何？(2) 若以原單位長的 $\frac{1}{2}$ 為新單位長，則 \overline{PQ} 的距離為何？又新 P 、 Q 所代表的值為何？

解

- (1) 新坐標 $= (\text{原數} - \text{新原點坐標}) \div \text{新單位長}$
 P 點： $(-3) - 2 = \underline{-5}$ ， Q 點： $8 - 2 = \underline{6}$ ，
 \overline{PQ} 的中點 $M = \frac{6 + (-5)}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$
 (2) $\overline{PQ} = 6 - (-5) = 11$ ， $11 \div \frac{1}{2} = \underline{22}$ ，
 $P_{\text{新}} = (-5) \div \frac{1}{2} = \underline{-10}$ ， $Q_{\text{新}} = 6 \div \frac{1}{2} = \underline{12}$

有一隻兔子在標有數線的跑道上，從坐標值為 -4 的 A 點開始向右跳，每次跳躍的距離都相等，而且方向不變，跳第三次時，落在坐標為 8 的 B 點，若跳第二十次，會落到 C 點，請問：(1) C 點坐標為何？(2) 若兔子改以 B 點為起點向右跳，以原單位長的 $\frac{1}{2}$ 為新單位長，則 C 點的新坐標為何？

解

- (1) $\overline{AB} = 8 - (-4) = 12$ ；
 單位長 $= 12 \div 3 = 4$ ；
 C 點 $= (-4) + (20 \times 4) = \underline{76}$
 (2) $\overline{BC} = 76 - 8 = 68$ ； $C_{\text{新}} = 68 \div \frac{1}{2} = \underline{136}$

4

老師 傳授

絕對值的運算

學生 實作

4

- $|4 + (-7)|$ 與 $|4| + |-7|$ 的大小關係？
- 若 $|A| - |-5| = 8$ ，則 A 數為何？
- 若 $|4 - A| + |B + 5| = 0$ ，求 A 、 B 兩數為何？
- $|-9 + 4| \times |4 + (-9)| + 10 = ?$

解

- $|4 + (-7)| = |4 - 7| = |-3| = 3$;
 $|4| + |-7| = 4 + 7 = 11$;
 $|4 + (-7)| < |4| + |-7|$
- $|A| - |-5| = 8$;
 $|A| = 8 + |-5| = 8 + 5 = 13$; $A = \pm 13$
- $|4 - A| + |B + 5| = 0$
因為任意數的絕對值 ≥ 0 ，正數與正數相加不可能為 0，因此只有一種可能，就是 $0 + 0 = 0$ 。
 $\Rightarrow |4 - A| = 0, 4 - A = 0, \underline{A = 4}$
 $|B + 5| = 0, B + 5 = 0, \underline{B = -5}$
- $|-9 + 4| \times |4 + (-9)| + 10$
 $= |-5| \times |-5| + 10 = 5 \times 5 + 10 = \underline{35}$

- $|(-4) + (-6)|$ 與 $|-4| + |-6|$ 的大小關係？
- $16 \div |A| = 4$ 與 $|B| \div 3 - 5 = 3$ ； A 、 B 應為多少？
- 若 A 、 B 兩整數，且 $|A| + |B| = 16$ ，求 A 的最大值與最小值？
- $|-13 + 12| \div |13 + (-12)| - 1 = ?$

解

- $|(-4) + (-6)| = |-10| = 10$;
 $|-4| + |-6| = 4 + 6 = 10$;
 $\Rightarrow |(-4) + (-6)| = |-4| + |-6|$
- $16 \div |A| = 4$; $|A| = 16 \div 4 = 4$;
 $A = \pm 4$
 $|B| \div 3 - 5 = 3$; $|B| = (3 + 5) \times 3$;
 $|B| = 24$; $B = \pm 24$
- 當 $B = 0$ 時; $|A| = 16$ ，則 $A = \pm 16$;
因此 A 有最大值 16，最小值 -16
- 原式 $= |-1| \div |1| - 1 = 1 - 1 = \underline{0}$

Let's Go!

同步 評量

1

- (C) 1. 若 $a = 6, b = -10$ ，則下列何式的值會最小呢？
(A) $|a + b|$ (B) $|a - b|$
(C) $|a| - |b|$ (D) $|a| + |b|$
1. (A) $|6 + (-10)| = 4$
(B) $|6 - (-10)| = 16$
(C) $|6| - |-10| = 6 - 10 = -4$
(D) $|6| + |-10| = 6 + 10 = 16$
 $2. \because 11 > 3 > (-5)$,
且 $a + 3 = b + 11 = c - 5$,
 $\therefore b < a < c$
- (A) 2. 若 $a + 3 = b + 11 = c - 5$ ，則 a 、 b 、 c 三數大小為何？
(A) $b < a < c$ (B) $c < a < b$ (C) $a < b < c$ (D) $b < c < a$
3. $A + B + C = 0.5 + (-2) + (-1.5) = -3$
- (B) 3. 已知 A 、 B 、 C 三實數，且 $|A - 0.5| + |B + 2| + |C + 1.5| = 0$ ，試求 $A + B + C = ?$
(A) -4 (B) -3 (C) 4 (D) 3
- (C) 4. 有四個數 (-5) 、 (-3) 、 (-1) 、 8 ，任意選擇三個數 a 、 b 、 c ，則 $a + b - c$ 的最大值為何？
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
4. $8 + (-1) - (-5) = 7 + 5 = 12$
- (B) 5. 數線上有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五點，坐標分別為 $-1\frac{1}{3}$ 、 -3 、 0 、 2 、 0.5 ，則哪兩點間的距離最長？
(A) \overline{AB} (B) \overline{BD} (C) \overline{CD} (D) \overline{CE}
5. $\overline{BD} = |2 - (-3)| = 5$

能力二

整數的乘除與四則運算

一 整數的乘除法

1. 兩同號數相乘、除，結果為正數，兩異號數相乘、除，結果為負數。
2. 某幾個整數連乘、除時，可先決定最後的性質符號，再取每個數的絕對值連乘、除。

小叮嚀

奇數個負數連乘(除)，結果為負數；偶數個負數連乘(除)，結果為正數。

二 整數乘法的運算規律

若 a 、 b 、 c 為整數，則：

1. $a \times 1 = a$, $a \times (-1) = -a$, $a \times 0 = 0$ 。
 2. $a \times b = b \times a$ ← 交換律。
 3. $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ← 結合律。
 4. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ 或 $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$
 5. $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$ 或 $(b - c) \times a = b \times a - c \times a$
- } ← 分配律。

小叮嚀

1. (1) $(a + b) \div c = a \div c + b \div c$; (2) $(a - b) \div c = a \div c - b \div c$ ($c \neq 0$)。
2. (1) $a \div b \div c \neq a \div (b \div c)$; (2) $a \div (b + c) \neq a \div b + a \div c$; (3) $a \div (b - c) \neq a \div b - a \div c$ 。

三 整數的四則運算

如果算式中含有指數，且混有加、減、乘、除等多種運算時要先算指數再算乘(或除)、後算加(或減)，若有括號時，則先計算括號內的算式。

5

老師

傳授

整數的四則運算

學生

習作

5

請計算下列各式：

- (1) $9 + (-2) \times [18 - (-2) \times 3] \div 8 = ?$
- (2) $(-8) \times |6 - 16| - 20 \div (5 - 10) = ?$

解

- (1) 原式 $= 9 + (-2) \times [18 - (-6)] \div 8$
 $= 9 + (-2) \times [18 + 6] \div 8$
 $= 9 + (-2) \times 24 \div 8 = 9 - 6 = \underline{3}$
- (2) 原式 $= (-8) \times |-10| - 20 \div (-5)$
 $= (-8) \times |-10| + 4$
 $= -80 + 4 = \underline{-76}$

請計算下列各式：

- (1) $40 - (-2) \times [36 - (-3) \times (-6)] \div 3 = ?$
- (2) $|2 - 4 - 6| - 2 \times (3 - 9) + |35 - 10| \div (-5) = ?$

解

- (1) 原式 $= 40 - (-2) \times [36 - 18] \div 3$
 $= 40 - (-2) \times 18 \div 3$
 $= 40 - (-12) = \underline{52}$
- (2) 原式 $= |-8| - 2 \times (-6) + |25| \div (-5)$
 $= 8 + 12 - 5 = \underline{15}$

6

老師

傳授

交換律、結合律、分配律

學生

實作

6

請計算下列各式：

- (1) $1794 \times (-45) - 1794 \times 55 = ?$
 (2) $(-99) \times 4 \times 25 = ?$
 (3) $225 \div [(-25) \div 5] \div [225 \div (-5) \div 5] = ?$

解

- (1) 原式 $= 1794 \times (-45 - 55) = 1794 \times (-100)$
 $= -179400$
 (2) 原式 $= (-99) \times (4 \times 25) = -99 \times 100$
 $= -9900$
 (3) 原式 $= 225 \div (-5) \div (-9) = \underline{5}$

請計算下列各式：

- (1) $-336 - 199 \times 335 + 1 = ?$
 (2) $(-7) \times (-125) \times (-4) = ?$
 (3) $[5 \div 4 \div (-3)] \div [(-5) \div (3 \times 4)] = ?$

解

- (1) 原式 $= -336 - 199 \times 335 = 335 \times (-1 - 199)$
 $= 335 \times (-200) = \underline{-67000}$
 (2) 原式 $= (-7) \times [(-125) \times (-4)]$
 $= (-7) \times 500 = \underline{-3500}$
 (3) 原式 $= [5 \div 4 \div (-3)] \div [(-5) \div 3 \div 4]$
 $= \underline{1}$

Let's Go!

同步評量

2

(B) 1. 下列算式在哪一個步驟開始出錯呢？

題目： $12 \div 6 + 18 \div 6 + (11 - 13) - 13$ 步驟一： $(12 + 18) \div 6 + (11 - 13) - 13$ 步驟二： $30 \div 6 + 11 - (13 - 13)$ 步驟三： $5 + 11 - 0$ 步驟四： 15

(A) 步驟一 (B) 步驟二 (C) 步驟三 (D) 步驟四

1. 步驟二應為 $30 \div 6 + 11 - 13 - 13$

(A) 2. 牛仔褲的成本為每件 400 元，且店家依成本加三成作為定價。若褲架上標示售價為定價的 20% OFF，則每件物品可賺多少元？

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24

 $2,400 \times 1.3 \times 0.8 - 400 = 16$ (元)(C) 3. 請計算 $11111 + 293 + 507 = ?$

(A) 10910 (B) 10911 (C) 11911 (D) 11910

3. 原式 $= 11111 + (293 + 507) = 11911$ (D) 4. 請計算 $12321 + 221 - 321 = ?$

(A) 11211 (B) 12121 (C) 12222 (D) 12221

4. 原式 $= [12321 + (-321)] + 221 = 12221$ (B) 5. 請計算 $200 \times 79 - 200 = ?$

(A) 16500 (B) 15600 (C) 13600 (D) 16300

5. 原式 $= 200 \times (79 - 1) = 15600$

解題小

偏方

第 2 題：(1) 成本加三成 \Rightarrow 成本 $+$ (成本 $\times 0.3$) = 成本 $(1 + 0.3)$ = 成本 $\times 1.3$ 。(2) 定價的 20% OFF \Rightarrow 定價打八折 = 定價 $\times 0.8$ 。

能力三 乘方與指數律

一 指數記法

1. 指數又稱為次方，係指某相同整數其乘積的次數。
2. 若 a 、 n 為整數， a 稱為底數， n 稱為指數，指數記法如下所示：

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 次}} \quad (a \text{ 自乘 } n \text{ 次})$$

二 指數律

1. 指數律的運算規則

條件	規律		
1. 設 a 、 b 為實數， m 、 n 為整數	1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$	2. $(a^m)^n = a^{m \times n}$	3. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
2. 設 a 為實數， m 、 n 為整數， 且 $m > n$	1. $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$	2. $0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$	
3. 設 a 、 b 為實數且不為 0， 且 $m > n > 0$	1. $a^m \div a^n = a^{m-n}$	2. $a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$	
	3. $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \text{ 為整數})$	
	5. $a^m \div a^n = 1 \Rightarrow a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 \Rightarrow a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$		

2. 指數的奇、偶性質與底數正、負數的關係

	偶數次方	正負	奇數次方	正負
底數 為正	$2^2 = 2 \times 2 = 4$	正	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$	正
	$(2)^2 = 2 \times 2 = 4$	正	$(2)^3 = (2) \times (2) \times (2) = 8$	正
底數 為負	$-2^2 = -2 \times 2 = -4$	負	$-2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8$	負
	$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$	正	$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$	負
	$(-2^2) = -(2 \times 2) = -4$	負	$(-2^3) = -(2 \times 2 \times 2) = -8$	負

小叮嚀

負數遇到偶數次方要特別注意括號的位置，其值是不同的。

3. 帶有指數之數的大小比較：先把指數或底數化成相同數，再進行比較。

當底數與指數 皆為正整數時	指數相同 \rightarrow 底數愈大 \rightarrow 數值愈大
	底數相同 \rightarrow 指數愈大 \rightarrow 數值愈大

7 老師 傳授

乘方的比較大小

學生 實作

請比較下列各數的大小關係為何？

- (1) 2^{105} , 3^{70} , 5^{35}
 (2) 64^5 , $(2^5)^6$, 8×32
 (3) $(0.7)^3$, $(0.7)^5$, $(0.7)^7$

解

- (1) $2^{105} = 2^{3 \times 35} = (2^3)^{35} = 8^{35}$,
 $3^{70} = 3^{2 \times 35} = (3^2)^{35} = 9^{35}$,
 $5^{35} < 8^{35} < 9^{35} \Rightarrow 5^{35} < 2^{105} < 3^{70}$
 (2) $64^5 = (2^6)^5 = 2^{30}$, $(2^5)^6 = 2^{30}$,
 $8 \times 32 = 2^3 \times 2^5 = 2^8$
 $2^{30} = 2^{30} > 2^8 \Rightarrow 64^5 = (2^5)^6 > 8 \times 32$
 (3) $\because 0.7 < 1 \therefore (0.7)^3 > (0.7)^5 > (0.7)^7$

難題

請比較下列各數的大小關係為何？

- (1) 3^{42} , 7^{14} , 5^{28}
 (2) 49^{10} , $(7^5)^3$, 7×343
 (3) $(1.2)^3$, $(1.2)^5$, $(1.2)^7$

解

- (1) $3^{42} = (3^3)^{14} = 27^{14}$, $5^{28} = (5^2)^{14} = 25^{14}$
 $27^{14} > 25^{14} > 7^{14} \Rightarrow 3^{42} > 5^{28} > 7^{14}$
 (2) $49^{10} = (7^2)^{10} = 7^{20}$, $(7^5)^3 = 7^{15}$,
 $7 \times 343 = 7 \times 7^3 = 7^4$,
 $7^4 < 7^{15} < 7^{20} \Rightarrow 7 \times 343 < (7^5)^3 < 49^{10}$
 (3) $\because 1.2 > 1 \therefore (1.2)^3 < (1.2)^5 < (1.2)^7$

難題

8 老師 傳授

指數律的運算

學生 實作

試求下列各式的值：

- (1) $(-1^2) + (-1^3) + (-1)^4 = ?$
 (2) $(101 - 2 \times 50)^{100} + (3 \times 120)^0 +$
 $(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{6})^{50} = ?$
 (3) $2^3 \times 4^2 \times 8^3 \div 16^5 = ?$
 (4) $2^{12} - 2^{11} = ?$

解

- (1) 原式 $= (-1) + (-1) + 1 = -1$
 (2) 原式 $= (1)^{100} + 1 + 0 = 2$
 (3) 原式 $= 2^3 \times (2^2)^2 \times (2^3)^3 \div (2^4)^5 = 2^{16} \div 2^{20}$
 $= 2^{-4}$
 (4) 原式 $= 2^{11} \times (2 - 1) = 2^{11}$

難題

試求下列各式的值：

- (1) $(-1)^2 \times (-1)^3 \times (-1)^4 = ?$
 (2) $(15 - 22)^3 \div (9 - 16)^2 - (3 - 4)^2 \times (3^2 - 4^2) = ?$
 (3) $-6^0 + 0^6 + (-6) \times 6^0 = ?$
 (4) $3^{15} + 3^{14} - 3^{16} = ?$

解

- (1) 原式 $= 1 \times (-1) \times 1 = -1$
 (2) 原式 $= (-7)^3 \div (-7)^2 - 1 \times (-7)$
 $= (-7)^{3-2} + 7 = (-7) + 7 = 0$
 (3) 原式 $= (-1) + 0 + (-6) \times 1 = (-1) - 6$
 $= -7$
 (4) 原式 $= 3^{14} \times (3 + 1 - 3^2) = -5 \times 3^{14}$

難題

Let's Go!

同步 評量

3

(B) 1. 下列哪一個式子其值與 $(-2)^3$ 相等？

- (A) $(-2) \times (-3)$ (B) $-(2 \times 2 \times 2)$
 (C) $(-2) + (-2) + (-2)$ (D) $(-2) \times 3$

$$1. (-2)^3 = -8 = -2^3 = -(2 \times 2 \times 2)$$

(B) 2. 下列敘述何者錯誤？

- (A) 7 個 7 相加等於 7^2 (B) $(7+3)^2 - (7-3)^2 = 7^2$
 (C) 7 個 7 相乘等於 7^7 (D) $100^2 - 99^2 = 2 \times 99 + 1$

$$2. (7+3)^2 - (7-3)^2 = 10^2 - 4^2 = 84$$

(B) 3. 試計算 $-4^2 - (-5)^2 \div [(\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{2})^2 \times 6]$ 之值為何?

(A) -2 (B) 2 (C) -18 (D) 18

$$\begin{aligned} 3. \text{原式} &= -16 - 25 \div [\frac{1}{9} - \frac{3}{2}] \\ &= -16 - 25 \times (-\frac{18}{25}) = -16 + 18 = 2 \end{aligned}$$

(C) 4. 試比較 $a = (-0.5)^2$, $b = (-0.5^3)$, $c = (-0.5^4)$, $d = (-0.5)^5$ 的大小為何?

(A) $a > b > c > d$ (B) $c > a > b > d$

(C) $a > d > c > b$ (D) $a > c > d > b$

4. a 為正數, 但 b, c, d 皆為負數, 故 $d > c > b$
 $\Rightarrow a > d > c > b$

(D) 5. 試比較 $a = (\frac{1}{2})^4$, $b = (\frac{1}{4})^2$, $c = (\frac{1}{8})^0$ 的大小?

(A) $a > b > c$ (B) $a = b > c$ (C) $a < b < c$ (D) $a = b < c$

$$\begin{aligned} 5. a &= (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}, b = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}, \\ c &= (\frac{1}{8})^0 = 1 \Rightarrow a = b < c \end{aligned}$$

能力四 科學記號

一 十進位制

名稱(位)	兆	億	萬	千	百	十	個
換算	10^{12}	10^8	10^4	10^3	10^2	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
名稱(位)	十分	百分	千分	萬分	十萬分	百萬分	千萬分
換算	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

例4: (1) 123456789 此數中「3」為 3×10^6 , 表示為3個百萬。

(2) 123.456789 此小數中「8」為 8×10^{-5} , 表示為8個十萬分之一。

二 科學記號

1. 科學記號的表示法。設 n 為非零的整數, 其科學記號的表示法如下所示:

$$n = a \times 10^m \quad (1 \leq a < 10, m \text{ 為整數})$$

2. 科學記號與位數關係

條件	位數關係
若 $m > 0$	則 n 的整數位數為 $m + 1$ 位
若 $m = 0$	則 n 的整數位數只有 1 位
若 $m < 0$	則 n 的小數點後到第一個不是 0 的數之間有 $ m + 1 $ 個 0

9

老師傳授

十進位制與科學記號

學生寫作

9

1.2 萬 \times 3 萬 \times 4 萬 = a 萬, 請問: $a = ?$

解

$$\begin{aligned} 1.2 \text{ 萬} \times 3 \text{ 萬} \times 4 \text{ 萬} &= (2 \times 3 \times 4 \text{ 萬萬}) \text{ 萬}, \\ a &= 24 \text{ 萬萬} = \underline{24 \text{ 億}} \end{aligned}$$

1. 有一數為 32.43, 請問: 十位的「3」所代表的值是百分位的「3」所代表的值的幾倍?

解

$$1. \text{原式} = \frac{3 \times 10^1}{3 \times 10^{-2}} = 10^3 = \underline{1000 \text{ (倍)}}$$

2. 999×189 為幾位數呢？

難題

3. 中央政府負債 4 兆 5 千萬元。(請用科學記號表示)

解

$$2. 999 \times 189 = (1000 - 1) \times 189 = 189000 - 189$$

$$\because 189000 = 1.89 \times 10^5 \text{ 為六位數}$$

$\therefore 999 \times 189$ 也是六位數

$$3. 4 \text{ 兆} = 4 \times 10^{12},$$

$$5 \text{ 千萬} = 5 \times 10^7 = 0.00005 \times 10^{12},$$

$$\Rightarrow 4 \text{ 兆 } 5 \text{ 千萬元} = \underline{4.00005 \times 10^{12}} \text{ (元)}$$

解題小偏方 老師 9-2: (1) 科學記號: 某數 $= a \times 10^n$, $1 \leq a < 10$ 。

(2) 利用 10^n 概念將 999 改為 $(1000 - 1)$ 方便運算。

2. $1 \times 10^a + 2 \times 10^b + 3 \times 10^c + 4 \times 10^d = 24130$, 且 $a \neq b \neq c \neq d$, 請問: $a + b + c + d = ?$

難題

3. $2^{1999} \times 5^{1989}$ 是幾位數呢？

解

$$2. 24130 = 2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1$$

對照後可知 $a = 2, b = 4, c = 1, d = 3$,

$$\therefore a + b + c + d = 2 + 4 + 1 + 3 = \underline{10}$$

$$3. 2^{1999} \times 5^{1989} = 2^{10} \times (2 \times 5)^{1989} = 1024 \times 10^{1989}$$

$$= 1.024 \times 10^{1992}, \text{ 有 } \underline{1993} \text{ 位數}$$

10 老師 傳授

科學記號的運算

學生 寫作 10

已知 $A = 3 \times 10^{15}$, $B = 2 \times 10^{14}$, 請計算下列各式, 並以科學記號表示之。

(1) $A + B$ (2) $6A - 3B$ (3) $4A \times 3B$

解

$$(1) A + B = 3 \times 10^{15} + 2 \times 10^{14}$$

$$= 30 \times 10^{14} + 2 \times 10^{14}$$

$$= 32 \times 10^{14} = \underline{3.2 \times 10^{15}}$$

$$(2) 6A - 3B = 6(3 \times 10^{15}) - 3(2 \times 10^{14})$$

$$= 18 \times 10^{15} - 6 \times 10^{14}$$

$$= 180 \times 10^{14} - 6 \times 10^{14}$$

$$= 174 \times 10^{14} = \underline{1.74 \times 10^{16}}$$

$$(3) 4A \times 3B = 4 \times (3 \times 10^{15}) \times 3 \times (2 \times 10^{14})$$

$$= 12 \times 6 \times 10^{15+14} = 72 \times 10^{29}$$

$$= \underline{7.2 \times 10^{30}}$$

已知 $A = 6 \times 10^{12}$, $B = 3 \times 10^{10}$, 請計算下列各式, 並以科學記號表示之。

(1) $\frac{1}{3}A - \frac{1}{6}B$ (2) $2A \div B$

解

$$(1) \frac{1}{3}A - \frac{1}{6}B = \frac{1}{3}(6 \times 10^{12}) - \frac{1}{6}(3 \times 10^{10})$$

$$= 2 \times 10^{12} - 0.5 \times 10^{10}$$

$$= (200 - 0.5) \times 10^{10}$$

$$= 199.5 \times 10^{10}$$

$$= \underline{1.995 \times 10^{12}}$$

$$(2) 2A \div B = 2 \times (6 \times 10^{12}) \div (3 \times 10^{10})$$

$$= \frac{12 \times 10^{12}}{3 \times 10^{10}} = 4 \times \left(\frac{10^{12}}{10^{10}} \right)$$

$$= 4 \times 10^{12-10} = \underline{4 \times 10^2}$$

11 老師 傳授

科學記號的應用

學生 寫作 11

公益彩券選號共有 5240000 種組合, 得到頭獎的機會是 $\frac{1}{5240000}$, 錢臻多想中頭獎, 決定買下 5240000 種組合, 一組 50 元, 則她共要花多少錢?(以科學記號表示)

生活題

解

$$5240000 = 5.24 \times 10^6,$$

$$50 \times 5.24 \times 10^6 = 262 \times 10^6 \text{ (元)}$$

$$= \underline{2.62 \times 10^8} \text{ (元)}$$

鹿林慧星與地球最近的距離為 6 千萬公里, 若一光年為 9.6×10^{15} 公尺, 則該慧星與地球相距多少光年?

生活題

解

$$\frac{6 \times 10^7 \text{ 公里}}{9.6 \times 10^{15} \text{ 公尺}} = \frac{6 \times 10^7 \text{ 公里}}{9.6 \times 10^{12} \text{ 公里}} = 0.625 \times 10^{-5}$$

$$= \underline{6.25 \times 10^{-6}} \text{ (光年)}$$



同步 評量

4

- (B) 1. 1.23×10^4 乘開後為 5 位數，則 2.3×10^{-4} 乘開後，數字「2」位於哪一位數呢？
 (A) 千分位 (B) 萬分位 (C) 千位 (D) 萬位
 $1.23 \times 10^{-4} = 0.00023$ ，
 2 出現在萬分位
- (A) 2. 計算 $0.000025 \times 10^{11} \times 64 + 0.95 \div (5 \times 10^{-9}) = ?$
 (A) 3.5×10^8 (B) 3.5×10^{-8}
 (C) 3×10^8 (D) 3×10^{-8}
 $2.25 \times 10^{-6} \times 10^{11} \times 64 + \frac{0.95}{5 \times 10^{-9}}$
 $= 16 \times 10^7 + 1.9 \times 10^8 = 1.6 \times 10^8 + 1.9 \times 10^8 = 3.5 \times 10^8$
- (D) 3. 已知 1 奈米 = 10^{-9} 米，那麼請求出 0.0636 公尺是幾奈米？（請以科學記號的形式表示）
 (A) 6.36×10^4 (B) 6.36×10^5 (C) 6.36×10^6 (D) 6.36×10^7
 $3. \frac{6.36 \times 10^{-2}}{10^{-9}} = 6.36 \times 10^7$ (奈米)
- (B) 4. x 為一個小數，其小數點向左移 3 位後記成科學記號是 3.54×10^{-7} ，則 x 的小數點向右移 2 位記成科學記號為何？
 (A) 3.54×10^{-3} (B) 3.54×10^{-2} (C) 3.54×10^{-1} (D) 3.54×10^3
 $4. x = 3.54 \times 10^{-7} \times 10^3 = 3.54 \times 10^{-4}$ ；
 小數點向右移兩位後，新的小數為 $3.54 \times 10^{-4} \times 10^2 = 3.54 \times 10^{-2}$
- (D) 5. 假設光纖傳遞資料的速度為每秒 3×10^5 個 *bits*，在不考慮其他因素下，仁鴻下載一首 6×10^5 個 *bytes* 的歌曲需要多少時間？（1 *bytes* = 8 *bits*）
 (A) 2 秒 (B) 3 秒 (C) 8 秒 (D) 16 秒
 $5. 6 \times 10^5$ (*bytes*) = $6 \times 10^5 \times 8 = 48 \times 10^5$ (*bits*)
 $\frac{48 \times 10^5}{3 \times 10^5} = 16$ (秒)



生活應用題※，本書特有題◎，難題#



基本 觀念題

- (D) 1. 下列四個等式何者不成立？
 (A) $(23 + 7) - 9 = 23 + (7 - 9)$
 (B) $(66 - 22) - 13 = 66 - (22 + 13)$
 (C) $(-56) + [-(-66)] = [-(-66)] + (-56)$
 (D) $(-138) + 73 = 73 - (-138)$
 1. (D) $(-138) + 73 = 73 + (-138) = 73 - 138$
- (D) 2. 已知 $a = 6$, $b = -8$, $c = 14$ ，則 $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ 的值為何？
 (A) 11 (B) 22 (C) 33 (D) 44
 2. 原式 = $|6 + 8| + |-8 - 14| + |14 - 6|$
 $= 14 + 22 + 8 = 44$
- (B) 3. 下列敘述何者正確？
 (A) $13 + |-13| = 0$ ，所以 13 與 -13 互為相反數
 (B) 0 的相反數為 0
 (C) 數線上， A 、 B 兩數與 5 的距離相同，所以 A 、 B 兩數互為相反數
 (D) $3\frac{2}{3}$ 與 $-3\frac{3}{2}$ 互為相反數
 3. (A) $13 + |-13| = 26$
 (B) 0 的相反數是自己
 (C) 相反數相加為 0，不是 5
 (D) $3\frac{2}{3} + (-3\frac{3}{2}) \neq 0$ ，不是相反數
- (B) 4. 試計算 $10^{23} \times 10^{-19} \div 10^{-3} = ?$
 (A) 10 (B) 10^7 (C) 10^{35} (D) 10^{49}
 4. 原式 = $10^{23 + (-19) - (-3)} = 10^7$

(B) 5. 有多少個整數的絕對值比 7 小呢？

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

5. 有 $\pm 6, \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ 與 0 ，共 13 個

(C) 6. 所有絕對值小於 $\frac{19}{3}$ 的整數和為多少呢？

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

$$6. |A| < \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3},$$

$A \Rightarrow 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ ，其整數和為 0

(C) 7. 假設有兩數分別為 -9 及 25，同時減去下列哪一個數之後，會成為相反數呢？

- (A) 10 (B) -10 (C) 8 (D) -8

$$7. \text{令此數為 } x, (-9-x) + (25-x) = 0, \\ 16 = 2x, x = 8$$

(C) 8. 數線上 A、B、C 三點各表示的數為 $-3, \frac{1}{3}, 4$ ，若以 C 點為新的原點，而單位長不變，則 A 點所表示的數變為多少呢？

- (A) -1 (B) 1 (C) -7 (D) 7

$$8. \overline{AC} = |4 - (-3)| = 7,$$

A 點位於新原點左方，A 點為 -7

(C) 9. $\frac{1}{2 \times 10^4} + \frac{0.0036}{4 \times 10^2} = ?$

- (A) 1.4×10^{-4} (B) 14×10^{-5}
(C) 5.9×10^{-5} (D) 5.9×10^{-4}

$$9. \text{原式} = (0.5 \times 10^{-4}) + (\frac{3.6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^2})$$

$$= (5 \times 10^{-5}) + (0.9 \times 10^{-5}) = 5.9 \times 10^{-5}$$

* (A) 10. 惠晶在某次段考中，若以數學科 95 分為基準，各科分數登記如右表，則平均分數為幾分？

- (A) 93 (B) 94 (C) 95 (D) 96

科目	國	英	數	自	社	平均
差值(分)	-8	-5	0	+2	+1	?

$$10. \frac{(-8) + (-5) + 0 + 2 + 1}{5} = \frac{-10}{5} = -2,$$

平均分數為 $95 - 2 = 93$

* (B) 11. 英文字典共 2500 頁，厚 4 公分，則平均每頁的厚度為多少公分呢？

- (A) 1.6×10^{-2} (B) 1.6×10^{-3}
(C) 1.6×10^{-4} (D) 16×10^{-4}

$$11. \frac{4}{2500} = 0.0016 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ (公分)}$$

(C) 12. 設 A 為 -8 的相反數，B 為 6 的相反數，C 為 $-(-9)$ 的相反數，則 $A - B + C$ 之值為多少？

- (A) 11 (B) 7 (C) 5 (D) -11

$$12. A = -(-8) = 8, B = -6,$$

$$C = -(-(-9)) = -9$$

$$\therefore A - B + C = 8 - (-6) + (-9) = 8 + 6 - 9 = 5$$

(D) 13. 設 a、b 均為有理數，已知 $|a| + |b| = 3$ ，則 a 一定不是下列哪一個數？

- (A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4

$$13. \because |a| > 0, |b| > 0, \therefore |a| \leq 3, -3 \leq a \leq 3$$

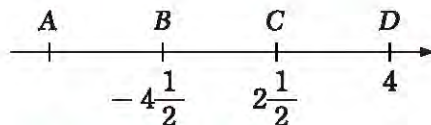
◎ (B) 14. 999×9999 為幾位數呢？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

$$14. 999 \times 9999 = (1000 - 1) \times 9999 = 9999000 - 1 \text{ 為 7 位數}$$

◎ (C) 15. 如右圖，若 A、B 兩點距離與 C、D 兩點距離相同，則 A 點坐標為何？

- (A) -3 (B) $-3\frac{1}{2}$
(C) -6 (D) $-6\frac{1}{2}$



$$15. \overline{CD} = 4 - 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A = -4\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-9-3}{2} = -6$$

解題小

第 9 題：先將 0.0036 改為 3.6×10^{-3} ，再除以 4×10^2 即可，切勿將分母通分。

第 13 題： $|a| > 0, |b| > 0$ ，且 $|a| + |b| = 3$ ，故 a 或 b 皆不可能為 4。



(A) 1. 若 a 、 b 兩數滿足 $10^{2a+1} = 1000^{b-1} = 1000000000$ ，則 $a+b = ?$

97 基測二

- (A) 8 (B) 15 (C) $\frac{25}{2}$ (D) $\frac{43}{6}$

$$1. 10^{2a+1} = 1000^{b-1} = 10^9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+1=9 \\ 3b-3=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=8$$

(D) 2. 已知數線上代表四數 a 、 b 、 $a+b$ 、 $a-b$ 的點分別為 A 、 B 、 C 、 D 。若 $|b| > |a| > 0$ ，則此四點的關係，下列敘述何者正確？

97 基測一

- (A) A 到 B 的距離與 C 到 D 的距離相等
 (B) A 到 C 的距離與 B 到 D 的距離相等
 (C) B 到 C 的距離與 B 到原點的距離相等
 (D) A 到 B 的距離與 D 到原點的距離相等

2. (A) $\overline{AB} = |b-a|$, $\overline{CD} = |a-b-a-b| = |-2b|$
 (B) $\overline{AC} = |a+b-a| = |b|$,
 $\overline{BD} = |a-b-b| = |a-2b|$
 (C) $\overline{BC} = |a+b-b| = |a|$, $\overline{BO} = |b|$
 (D) $\overline{AB} = |b-a|$, $\overline{DO} = |a-b| = |b-a|$

(D) 3. 下列哪一個式子計算出來的值最大？

97 基測一

- (A) $8.53 \times 10^9 - 2.17 \times 10^8$
 (B) $8.53 \times 10^{10} - 2.17 \times 10^9$
 (C) $9.53 \times 10^9 - 2.17 \times 10^8$
 (D) $9.53 \times 10^{10} - 2.17 \times 10^9$

3. (A) $8.53 \times 10^9 - 0.217 \times 10^9 = 8.313 \times 10^9$
 (B) $8.53 \times 10^{10} - 0.217 \times 10^{10} = 8.313 \times 10^{10}$
 (C) $9.53 \times 10^9 - 0.217 \times 10^9 = 9.313 \times 10^9$
 (D) $9.53 \times 10^{10} - 0.217 \times 10^{10} = 9.313 \times 10^{10}$

※ (A) 4. 小嘉全班在操場上圍坐成一圈。若以班長為第 1 人，依順時針方向算人數，小嘉是第 17 人；若以班長為第 1 人，依逆時針方向算人數，小嘉是第 21 人。求小嘉班上共有多少人？

97 基測一

- (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39

$$4. 17 + 21 - 2 = 36$$

(A) 5. 右圖表示數線上四個點的位置關係，且它們表示的數分別為 p 、 q 、 r 、 s 。若 $|p-r| = 10$ ， $|p-s| = 12$ ， $|q-s| = 9$ ，則 $|q-r| = ?$

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

5. $\overline{PR} = |p-r| = 10$, $\overline{PS} = |p-s| = 12$,
 $\overline{QS} = |q-s| = 9$, $\overline{RS} = 12 - 10 = 2$
 $\Rightarrow |q-r| = \overline{QR} = \overline{QS} - \overline{RS} = 9 - 2 = 7$

97 基測一

(C) 6. 已知 n 滿足 $\frac{n}{7.24} = \frac{16.13}{8.13}$ 。若將 n 描在數線上，則下列哪一個數在數線上的位置最接近 n ？

95 基測二

- (A) 12.24 (B) 13.13 (C) 14.25 (D) 15.24

$$6. n = 16.13 \times 7.24 \div 8.13 \approx 14.36$$



※ (D) 1. 若以 7:35 為基準，遲到 5 分鐘以 (-1) 表示。某天，小玲於 7:15 分到校，則可記為下列何者？

- (A) -2 (B) $+2$ (C) -4 (D) $+4$

1. 小玲提早 20 分到校， $20 \div 5 = 4$ ，可記為 $+4$

(D) 2. 請計算下列式子 $|-26| + [(-4) + 3] + (-4) - (-8) = ?$


- (A) -23 (B) 23 (C) -29 (D) 29

2. 原式 $= 26 + (-1) - 4 + 8 = 29$

(C) 3. 下列四個數分別為 $-\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{5}$ ，何者的絕對值最接近 0？

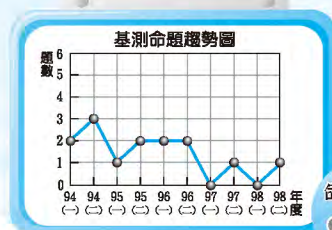
- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{5}$

3. 在數線上分別標出其位置，再比較各點與原點的距離即可得

- (C) 4. 假設 $x=3$ 、 $y=4$ 、 $z=5$ ，則 $|x-y|+|y-z|-|z-x|$ 的值為何？
 (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 4. 原式 $= |3-4|+|4-5|-|5-3|=0$
- (A) 5. 若 17 、 -23 、 $-(-15)$ 、 20 的相反數分別是 a 、 b 、 c 、 d ，則 $a-b+c-d=?$
 (A) -35 (B) 35 5. $a-b+c-d=-17-23+(-15)-(-20)$
 $=-17-23-15+20=-35$
 (C) -41 (D) 41
- ◎(C) 6. 數線上 A 、 B 兩點分別代表 -3 與 10 ，則下列哪一個等式不能計算出 \overline{AB} 呢？
 (A) $10-(-3)$ (B) $|(-3)-10|$ 6. $\overline{AB}=(\text{大坐標}-\text{小坐標})$
 $=|\text{大}-\text{小}|=|\text{小}-\text{大}|$
 (C) $|-3|-|-10|$ (D) $|10-(-3)|$
- (A) 7. 設 $4^2 \times 10^3 \times 20 = 2^a \times 5^b$ ，求 $a+b=?$
 (A) 13 (B) 10 (C) 7 (D) 5 7. 原式 $= 2^4 \times (2 \times 5)^3 \times (2^2 \times 5) = 2^9 \times 5^4$
 $\Rightarrow a+b=9+4=13$
- ◎(C) 8. 請問： 17^{2007} 是 17^{2006} 的多少倍？
 (A) 2006 (B) 2007 (C) 17 (D) 10 8. $\frac{17^{2007}}{17^{2006}} = 17^{(2007-2006)} = 17$
- ◎(A) 9. 若有一數 A 小於它自己的相反數，則 A 數為何？
 (A) $A < 0$ (B) $A = 0$ (C) $A > 0$ (D) $A > -A$ 9. 負數的相反數是正數
- #(D) 10. 設 a 為整數，則滿足 $-4 < |a| < 4$ 的值有多少個？
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 10. $\because -4 < |a| < 4$ 的意思等於 $0 < |a| < 4$ ，
 $\therefore a=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ，共 7 個
- ※(D) 11. 小華老師在高速公路上開車，從臺中到臺北再到中壢，臺中的公里數（里程碑）為 177 ，往北走到臺北，公里數（里程碑）顯示為 6 ，再往南走到中壢，走了 35 公里，請問：中壢與臺中相距多少公里呢？
 (A) 313 (B) 164 (C) 141 (D) 136 11. 中壢 $= 35 + 6 = 41$ ，
 中壢與臺中相距 $= |177 - 41| = 136$ (公里)
- ※(A) 12. 在電腦的容量規格中， $1Kb = 2^{10} \text{bytes}$ ， $1Mb = 2^{10}Kb$ ， $1Gb = 2^{10}Mb$ ，若小錠買了一顆 $8Gb$ 的隨身碟，相當於多少 bytes ？
 (A) 2^{33} (B) 2^{34} (C) 2^{35} (D) 2^{36} 12. $8Gb = 8 \times 2^{30} = 2^3 \times 2^{30} = 2^{33}$ (bytes)
- (A) 13. 絕對值大於 19 ，但不大於 38 的整數一共有多少個呢？
 (A) 38 (B) 28 (C) 19 (D) 14 13. $38 - 19 = 19$ ， $19 \times 2 = 38$ (個)
- (C) 14. 如下圖，數線上 A 、 B 兩點的距離為何？

 (A) 4 (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{14}{3}$ 14. A 點表示的數是 $-1\frac{2}{3}$ ， B 點表示的數是 $2\frac{2}{3}$
 $\therefore \overline{AB} = |-1\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}| = |-\frac{13}{3}| = \frac{13}{3}$
- (B) 15. 若甲數 < 0 ，乙數 > 0 ，且甲數 + 乙數 > 0 ，則下列何者正確？
 (A) $|甲數| > |乙數|$ (B) $|甲數| < |乙數|$ 15. \because 甲、乙是異號數，且 $甲+乙 > 0$ ，
 \therefore 正數的絕對值較大， $|甲數| < |乙數|$
 (C) $|甲數| = |乙數|$ (D) 不能確定

第 2 單元

最大公因數、最小公倍數



命題率
80%

能力 — 因數與倍數

一 因數與倍數的定義

除法原理	「被除數 = 除數 × 商數 + 餘數」，且除數 ≠ 0， $0 \leq \text{餘數} < \text{除數}$ 。
整除	A、B、C 皆為整數，當 $A \div B = C$ (餘數為 0)，亦即 $A = B \times C$ 時，稱 B (或 C) 整除 A 或是 A 能被 B (或 C) 整除。
因數與倍數	當 B 整除 A，則 B 稱為 A 的「因數」；反之 A 稱為 B 的「倍數」。 即 $A = B \times C$ 其中 $B、C \neq 0$ ，稱 B (或 C) 為 A 的因數；A 為 B (或 C) 的倍數。 例如： $8 \div 2 = 4$ ；2 與 4 皆為 8 的因數，8 是 2 與 4 的倍數。

二 因數與倍數的性質

- 任何整數皆為 1 的倍數；1 為任何整數的因數，而且 1 是任何整數的最小正因數。
- 任何整數 (除了 0 之外)，就是本身的因數，也是本身的倍數。
- 0 是任意非零整數的倍數；但 0 不是任意整數的因數 (∵ 分母不可為 0)。
- 任意整數 (除了 0 之外) 都是 0 的因數。

三 倍數的判別法

2 的倍數判別法	末位數字是 0、2、4、6、8 的整數，則此數為 2 的倍數，例如：1974。
5 的倍數判別法	末位數字是 0、5 的整數，則此數為 5 的倍數，例如：1790、1975。
3 的倍數判別法	某整數的數字總和是 3 的倍數，則此數為 3 的倍數，例如：1974。
9 的倍數判別法	某整數的數字總和是 9 的倍數，則此數為 9 的倍數，例如：1971。
11 的倍數判別法	某整數的 (奇數位數字和) - (偶數位數字和) 的差值是 0 或 11 的倍數，則此數為 11 的倍數，例如：1782、1969。

老師傳授

因數與倍數的判別法 I

學生實作

1. 在 123、3462、45783、231110 中，是 2 的倍數有幾個？是 3 的倍數有幾個？

解

1. 是 2 的倍數有 3462、231110，共 2 個
是 3 的倍數有 123、3462、45783，共 3 個

1. 在 231、7895、66330、472098 中，是 5 的倍數有幾個？是 11 的倍數有幾個？

解

1. 是 5 的倍數有 7895、66330，共 2 個
是 11 的倍數有 231、66330、472098，共 3 個

2. 若 A 是正整數，且 A 的所有正因數由大到小排列分別是 r 、 s 、 t 、 8 、 7 、 4 、 2 、 1 ，則 r 、 s 、 t 分別是多少呢？
3. 在 $200 \sim 400$ 之間 12 的倍數有幾個呢？

解

2. 由題意可知

$$r \times 1 = s \times 2 = t \times 4 = 8 \times 7 = 56;$$

此正整數應為 56 ；

$$\text{所以 } r = 56, s = 28, t = 14$$

$$3. 200 \div 12 = 16 \cdots 8; 400 \div 12 = 33 \cdots 4,$$

取 $33 - 16 = 17$ ；共有 17 個

2. 若 B 是正整數，其全部的正因數由小到大排列如下： 1 、 2 、 3 、 e 、 6 、 d 、 9 、 c 、 18 、 b 、 36 、 a ，試求 $a - b + c - d + e = ?$
3. 在 $1974 \sim 2007$ 之間， 3 的倍數有幾個呢？

解

$$2. B = 1 \times a = 2 \times 36 = 3 \times b = e \times 18 = 6 \times c = d \times 9$$

$$\Rightarrow a = 72, b = 72 \div 3 = 24,$$

$$e = 72 \div 18 = 4, c = 72 \div 6 = 12,$$

$$d = 72 \div 9 = 8$$

$$\Rightarrow a - b + c - d + e = 56$$

$$3. 1974 \div 3 = 658, 2007 \div 3 = 669,$$

$$(669 - 658) + 1 = 12 \text{ (個)}$$

2 老師傳授

因數與倍數的判別法 II

學生寫作 2

1. 有一個四位數 $789\square$ ，同時為 2 和 3 的倍數，則 $\square = ?$
2. 巧虎要將 88 顆糖果分給他的好朋友，每一位好朋友都可以分到一樣多的糖果沒有剩下，已知巧虎的好朋友約有 12 位，請問巧虎的好朋友有多少位？

生活題

解

$$1. 2 \text{ 的倍數時, } \square = 0、2、4、6、8$$

$$3 \text{ 的倍數時, } \square = 0、3、6、9$$

$$\Rightarrow \square = 0 \text{ 或 } 6$$

$$2. 88 = 2 \times 44 = 4 \times 22 = 8 \times 11$$

故好朋友有 11 位

1. 有一個七位數 $123\square456$ 能被 9 整除，試求 $\square = ?$
2. 某國中師生共 676 人，要搭遊覽車去校外教學，若每車人數大於 20 人且小於 60 人，且每車人數需相同，試問需要幾輛車？

生活題

解

$$1. 1 + 2 + 3 + \square + 4 + 5 + 6 = 21 + \square,$$

$$21 + 6 = 27 \text{ 可被 } 9 \text{ 整除, } \square = 6$$

$$2. 676 = 1 \times 676 = 2 \times 338 = 13 \times 52,$$

故每車可坐 52 人 \Rightarrow 共需 13 輛車

Let's Go! 同步評量 1

堆顆 堆顆 堆顆 堆顆
 $1. 42 = \cancel{1} \times 42 = 42 \times 1 = \cancel{2} \times 21 = 21 \times 2 \Rightarrow$ 共 8 種分法，且每堆 5 顆以上共有 5 種分法
 $= \cancel{3} \times 14 = 14 \times 3 = \cancel{6} \times 7 = \cancel{7} \times 6$

- (D) 1. 楊丞林要將 42 顆糖果分給她的粉絲，而且每堆（包含分成一堆）糖果數目要相同。若經紀人告訴她每堆至少要有 5 顆以上，則她的分法剩下幾種？

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

- (C) 2. 36 、 123 、 190 、 324 、 665 、 47 六個數中，有 a 個是 2 的倍數，有 b 個是 3 的倍數，有 c 個是 4 的倍數，則 $a + b - c = ?$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. $\begin{cases} 2 \text{ 的倍數} \Rightarrow 36、190、324 \Rightarrow a = 3 \\ 3 \text{ 的倍數} \Rightarrow 36、123、324 \Rightarrow b = 3 \\ 4 \text{ 的倍數} \Rightarrow 36、324 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$
 故 $a + b - c = 4$

- (B) 3. 五位數 $29\square87$ 若為 3 的倍數，則 \square 不為下列何者？

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 7

3. $2 + 9 + \square + 8 + 7 = 26 + \square$ 須為 3 的倍數， $\therefore \square$ 可為 $1、4、7$

- (C) 4. 97 減去下列哪一個數後是 7 的倍數？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

$$4. 97 - 6 = 91, 91 \div 7 = 13$$

(C) 5. 下列哪一個敘述是錯誤的？

- (A) 0 是除了 0 以外皆為任意整數的倍數
 (B) 1 是任意整數的因數
 (C) 因為 $72 = 8 \times 9$ ，所以 8 是 72 的倍數
 (D) 因為 $28 = 4 \times 7$ ，所以 28 是 4 的倍數

能力二 質因數分解

一 質數的定義

質數	一個大於 1 的正整數，除了 1 與本身之外沒有其他的因數；亦即只有兩個因數就是 1 與本身。
合數	一個正整數除了 1 與本身之外，還有其他的因數，亦即有三個（含）以上正因數的整數。
質因數	一個正整數分解成一個或一個以上不同質數的相乘積，這些質數稱為該整數的質因數；亦即質因數既是因數也是質數。

二 質數的性質

- 質數中最小的數是 2；質數中唯一的偶數是 2。
- 合數中最小的數是 4，最大的數是無限大。
- 1 沒有質因數。（因為 1 不是質數，所以 1 不是質因數。）
- 100 以內的質數有 25 個。（要記起來！）

小叮嚀

背

100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

三 標準分解式（質因數分解）

- 標準分解式的定義：將一個合數，分解成質因數的連乘積，且將質數由小而大排列；相同的質數寫成次方的形式，稱為「標準分解式」，此過程稱為「質因數分解」。
- 指數記法係指將相同數的連乘積之次數記在該數的右上方。

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots a \times a}_{n \text{ 個}} = a^n$$

↑ 指數
↑ 底數

例 1： $120 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ 個}} \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

- 質因數分解最常運用「短除法」來分解一個（含）以上的數。

例 2：

2		90	
3		45	
3		15	
5		5	
		1	

2		90	180
3		45	90
3		15	30
5		5	10
		1	2

質因數

3 老師 傳授

質數與合數的判別 I

學生 習作

從 1~25 的整數中，只有 1 個因數的正整數有多少個？只有 2 個因數的整數有多少個？

解

- (1) $1 = 1 \times 1$ ，1 只有 1 個因數 \therefore 只有 1 個
 (2) 只有兩個因數的必定是質數，
 所以 2、3、5、7、11、13、17、19、23
共有 9 個

下列整數中 36、38、49、50、55、64、100、113 哪些數是質數？哪些整數的因數個數是偶數個？哪些整數的因數個數是奇數個？

解

- (1) 是質數的只有 113
 (2) 因為 38 是非完全平方數，所以因數有 1、2、19、38 共 4 個。因為 36 是完全平方數，所以因數有 1、2、3、4、6、9、12、18、36 共 9 個。因此，
因數個數是偶數個有：38、50、55、113；
因數個數是奇數個有：36、49、64、100

解題小偏方 因數個數是偶數個必定是非完全平方數，奇數個必定是完全平方數。

4 老師 傳授

質數與合數的判別 II

學生 習作

將 50 表示為兩質數和，並使兩質數乘積為最大，則此兩質數應為何數呢？

解

- $3 + 47 \Rightarrow 3 \times 47 = 141$
 $7 + 43 \Rightarrow 7 \times 43 = 301$
 $13 + 37 \Rightarrow 13 \times 37 = 481$
 $19 + 31 \Rightarrow 19 \times 31 = 589$
 所以此兩質數為 19 和 31

在 15、20、27、31 中，何者不能寫成兩個質數的和？

解

- $15 = 2 + 13$ 、 $20 = 7 + 13$ 、 $31 = 2 + 29$
27 無法寫成兩個質數的和

5 老師 傳授

質因數分解

學生 習作

- 下列各數 55、57、58、59 哪一個有最小的質因數？
- 有一數 $A = 82 \times 83 \times 84$ 之標準分解式為何？

解

1. $55 = 5 \times 11$ ， $57 = 3 \times 19$ ，
 $58 = 2 \times 29$ ， $59 = 1 \times 59$ 。
 因為 2 是最小的質數，
 所以有最小質因數的數為 58
 2. $A = 82 \times 83 \times 84$
 $= (2 \times 41) \times 83 \times (2^2 \times 3 \times 7)$
 $= \underline{2^3 \times 3 \times 7 \times 41 \times 83}$

有一數 $A = 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14$ ，求 A 的標準分解式？A 的質因數和為何？

解

- (1) $A = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \times 11$
 $\times (2 \times 2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7)$
 $= \underline{2^7 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13}$
 (2) A 的質因數和
 $= 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = \underline{41}$

解題小偏方 因為 58 為偶數，且最小的質數為 2，因此我們可以直接判斷出 58 有最小質因數。

Let's Go!

同步 評量

2

- (C) 1. 最接近 200 的質數為何?
(A) 203 (B) 201 (C) 199 (D) 197
- (D) 2. 在 361、342、324、306、289 中，因數個數為偶數個的為何？
(A) 361、342 (B) 342、324 (C) 324、306 (D) 342、306
2. ∴ 342 和 306 非完全平方數
- (B) 3. 若 2 和 3 為四位數 $5\square 2\square$ 的因數，且兩個方格內的數字是相同的，則 $\square = ?$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
3. \square 必為 0、2、4、6、8，又 $5+2+\square+\square=3$ 的倍數，只有 4 符合
- (A) 4. 已知 A 數的質因數分解為 $a^3 \times b \times c$ ，其中 a 、 b 、 c 為相異質數，則 A 數最小為何？
(A) 120 (B) 122 (C) 124 (D) 126
4. 欲求 A 數最小值，則 a 必為 2， $2^3 \times 3 \times 5 = 120$
- (A) 5. 設 $x = 2^y \times 5 \times 11$ ，且 22 是 x 的因數，20 不是 x 的因數，則 $y = ?$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
5. ∵ $22 = 2 \times 11$ ， $20 = 2^2 \times 5$ ∴ $y = 1$

解題小 偏方

第 5 題：(1) 22 是 x 的因數 $\Rightarrow 22 = 2 \times 11$ ，其中 2 與 11 皆為 x 的因數。

(2) 20 不是 x 的因數 $\Rightarrow 20 = 2^2 \times 5$ ，其中 2^2 與 5 必有一個不是 x 的因數。

能力三 最大公因數

一 公因數與最大公因數

1. **公因數**：當一個整數 a 同時是其他整數 b 、 c 、 d ……的因數時，則 a 稱為這些整數 b 、 c 、 d ……的公因數。
2. **最大公因數**：任意幾個整數的公因數中，最大的數，稱為最大公因數。
3. 最大公因數的表示法：以小括號表示，如 (a, b, c) 。

二 最大公因數的求法

1. **短除法**：找出 90、180 的共同質因數，依序整除，直到沒有共同質因數可以再除為止。

例 3 \rightarrow :

2	90	180	
3	45	90	
3	15	30	
5	5	10	
	1	2	

(90, 180) = $2 \times 3^2 \times 5 = 90$

質因數

2. **指數型**：各個整數先分解成標準分解式，找出具有共同的質因數，且這個因數的次方數是最小或相同的，再列出連乘積的式子。

例 4 \rightarrow : $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \textcircled{2} \times 3^2 \times 5$
 $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times \textcircled{3}^2 \times \textcircled{5}$
 $(90, 180) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

三 公因數與最大公因數的性質

1. 不論有幾個整數，這些整數的**最大公因數僅有 1 個**。
2. 最大公因數是所有公因數的**倍數**，所有公因數都是最大公因數的**因數**。
3. **互質**：若有二個整數其最大公因數等於 1，則稱此二數為互質。

例 5： $(24, 36) = 2^2 \times 3 = 12$

12 的因數有 1、2、3、4、6、12 都是 24 與 36 的公因數。

例 6：互質，但二數都不是質數，如 $(4, 21) = 1$ ； $(6, 55) = 1$ 。

二數都是質數，必定互質，如 $(13, 19) = 1$ ； $(23, 97) = 1$ 。

小叮嚀

二相異質數必定互質，但互質的二數未必為質數。

6

老師傳授

最大公因數與互質

學生習作

6

1. 165、231 的最大公因數為何？此二數的公因數為何？
2. $(2 \times 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 3 \times 5^2 \times 5^3 \times 7) = ?$
3. 有二組數 $(72, 117)$ 、 $(363, 274)$ ，請問：哪一組數是互質？

解

1. $(165, 231) = 33$ ；

其公因數有 1、3、11、33

2. 原式 $= (2^3 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5^5 \times 7)$
 $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

3. $(72, 117) = 3^2$ ； $(363, 274) = 1$
 故 363 與 274 互質

1. 求 $(75, 105, 285) = ?$

2. 求 $(5 \times 7^3 \times 11^2, 5^3 \times 7^2 \times 11, 5^2 \times 7^5 \times 13) = ?$

3. 有三數 78、91、130 是否互質？若非互質此三數的公因數個數有幾個呢？

解

1. $(75, 105, 285) = 3 \times 5 = 15$

2. 原式 $= 5 \times 7^2 = 245$

3. $(78, 91, 130) = 13$ ，故此三數並非互質。

此三數的最大公因數為 13，其公因數為 1、13，因此，公因數個數有 2 個

7

老師傳授

最大公因數的應用 I

學生習作

7

五月天想在錄音室中鋪上海綿墊，已知錄音室長 560 公分，寬 320 公分，每一塊海綿墊都是正方形且不可裁切，若要全部鋪滿，請問：五月天至少要買幾塊相同的海綿墊才能將錄音室鋪滿？此時海綿墊的邊長為多少？ **生活題**

解

求 560 與 320 的最大公因數，為海綿墊的邊長。

$(560, 320) = 2^4 \times 5 = 80$

$\Rightarrow 560 \div 80 = 7, 320 \div 80 = 4, 7 \times 4 = 28$

\therefore 需邊長 80 公分的海綿墊 28 塊

5566 偶像團體為了要犒賞粉絲，特地製作了一個長 32 公分、寬 28 公分、高 24 公分的長方體蛋糕，為了給粉絲們吃到一樣大的正方體蛋糕又不剩下，請問：至少可切成幾塊小蛋糕呢？每一個小蛋糕的體積是多少呢？ **生活題**

解

(1) $(32, 28, 24) = 4$

$\Rightarrow 32 \div 4 = 8, 28 \div 4 = 7, 24 \div 4 = 6,$

\therefore 正方體蛋糕個數 $= 8 \times 7 \times 6 = 336$ (塊)

(2) 每一個正方體蛋糕體積為

$4 \times 4 \times 4 = 64$ (立方公分)



老師

傳授

最大公因數的應用 II

學生

實作



有一個三角形的露營場地，每邊長為 120 公尺、160 公尺、180 公尺，童軍隊長要求在四周圍插上火把，每支火把間隔要相同且最大，而三角形營地的三頂點一定要豎立一支火把，請問：共要火把幾支？火把的間隔為多少公尺呢？

生活題

解

$$(120, 160, 180) = 20 \text{ (公尺)}, 120 \div 20 = 6$$

$$160 \div 20 = 8, 180 \div 20 = 9$$

因為植樹原理所以每邊要插 7、9、10 支火把。

又三頂點會重複，所以需要插上

$$(7 + 9 + 10) - 3 = 23 \text{ 支火把}$$

∴ 火把間隔為 20 公尺，共有 23 支火把

黑珍珠蓮霧有 348 個，枇杷有 232 個，水果商打算將全部水果分裝但不超過 60 盒，每盒中都要有兩樣水果，且每一盒的蓮霧要一樣多，枇杷也是。請問：最多可以分裝成多少盒？兩樣水果在每盒中的個數為何？

生活題

解

$(348, 232) = 2 \times 2 \times 29$ ，因為不可超過 60 盒，所以最多僅能裝 $2 \times 29 = 58$ 盒。

$$348 \div 58 = 6, 232 \div 58 = 4$$

∴ 可分裝成 58 盒，每盒裝有 6 個蓮霧、4 個枇杷

Let's Go!

同步

評量

3

- (C) 1. 已知 a 、 b 的最大公因數為 18，請問 a 、 b 的所有正公因數有幾個？
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
- (D) 2. 下列哪兩個數互質？
(A) 31 與 93 (B) 28 與 91
(C) 21 與 231 (D) 74 與 123
- (B) 3. 下列哪個數與 $3 \times 5^2 \times 7$ 互質？
(A) 57 (B) 121 (C) 225 (D) 287
- (A) 4. 將 36 個修正帶、42 支原子筆、102 個橡皮擦分裝在幾個文具盒中，若同一種文具在每盒中的個數均一樣多，最多可分裝成幾個文具盒？
(A) 6 (B) 7 (C) 17 (D) 21
- (C) 5. 將一個長 48 公分，寬 18 公分的蜂蜜蛋糕，切成數個底面積相同的正方形小蛋糕，則每一個小蛋糕的底面積最大為多少平方公分？
(A) 16 (B) 25 (C) 36 (D) 49

$$1. \because 18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$$

∴ a 、 b 的正公因數為 1、2、3、6、9、18，共 6 個

2. (A) 31 與 93 均有因數 31，故不互質

(B) 28 與 91 均有因數 7，故不互質

(C) 21 與 231 均有因數 21，故不互質

(D) 74 與 123 除了 1 之外，無其他正因數，故互質

3. (A) 57 為 3 的倍數

(B) 121 不是 3 或 5 或 7 的倍數，故互質

(C) 225 為 5 的倍數

(D) 287 為 7 的倍數

$$4. (36, 42, 102) = 6$$

$$5. (48, 18) = 6, 6 \times 6 = 36$$



能力

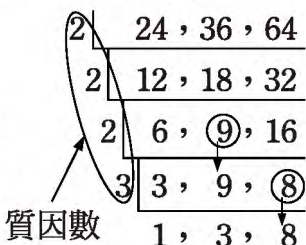
四 最小公倍數

一 公倍數與最小公倍數

1. **公倍數**：當一個整數 a 同時是其他整數 b 、 c 、 d ……的倍數時，則 a 稱為這些整數 b 、 c 、 d ……的公倍數。
2. **最小公倍數**：任意幾個整數的公倍數中，最小的數，稱為最小公倍數。
3. 最小公倍數的表示方法：以中括號表示，如 $[a, b, c]$ 。

二 最小公倍數的求法

1. **短除法**：找出 24、36、64 的共同質因數當除數，只要有二數（含）以上的數有共同質因數，都要除盡，直到沒有共同質因數可以再除為止，再將所有共同質因數及最終不能除的數寫成連乘積，即為所求。

例 7：  $[24, 36, 64] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 3 \times 8 = 576$

2. **指數型**：各個整數先分解為標準分解式，列出全部的質因數，若有相同的質因數則找出次方數最大的，再列出連乘積的式子。

例 8： $24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$, $64 = 2^6$
 $[24, 36, 64] = 2^6 \times 3^2 = 576$

三 公倍數與最小公倍數的性質

- 不論有幾個整數，這些整數的最小公倍數僅有 1 個。
- 最小公倍數是所有公倍數的因數，所有公倍數都是最小公倍數的倍數。
- 已知有 $\frac{c}{a}$ 與 $\frac{d}{b}$ 兩個最簡分數：
 - 若要同乘一個「最小正整數」，使兩數成為整數，此數應為 $[a, b]$ 。
 - 若要同乘一個「最小正分數」，使兩數成為整數，此數應為 $\frac{[a, b]}{(c, d)}$ 。
- 若 a, b 兩數互質，則 a, b 的最小公倍數為 $a \times b$ 。
- 若有 a, b 兩數，則 $a \times b = [a, b] \times (a, b)$ 。

9

老師 傳授

最小公倍數的計算

學生 習作

9

- 試求 105, 220, 231 的最小公倍數。
- 試求 $2^2 \times 3^3$, $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ 的最小公倍數。(以標準分解式表示)
- 有兩分數 $2\frac{1}{26}$, $2\frac{3}{65}$ 同時乘上一個正分數，使其兩數成為正整數，則所乘之數最小為何？

解

- $[105, 220, 231]$
 $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 4620$
- $[2^2 \times 3^3, 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11] = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$
- $2\frac{1}{26} = \frac{53}{26}$, $2\frac{3}{65} = \frac{133}{65}$, $[26, 65] = 130$
 $(53, 133) = 1$,
 所乘的最小正分數為 $\frac{130}{1} = 130$

- 試求 88, 189 的最小公倍數。
- 若 $[300, 360, 432] = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ，求 $a + b + c = ?$
- 若 A, B 為正整數， $A \times B = 7524$ ， A 與 B 的最大公因數為 6，則 A 與 B 的最小公倍數為何？

解

- $\because 88 = 2^3 \times 11$, $189 = 3^3 \times 7$ 兩數互質
 $\therefore [88, 189] = 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11 = 16632$
- $[300, 360, 432] = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$
 $\Rightarrow a + b + c = 9$
- $\because A \times B = [A, B] \times (A, B)$
 $\therefore [A, B] = 7524 \div 6 = 1254$

10

老師傳授

最小公倍數的應用

學生習作

10

子睿、莉婷、羿嘉三人同時同地出發，依同方向繞周長 1980 公尺的圓形水池競走，每分鐘子睿走 330 公尺；莉婷走 220 公尺；羿嘉走 198 公尺，試問幾小時後三人相會於原點？又相會時子睿走了多少公里？

生活題

解

- (1) $1980 \div 330 = 6$, $1980 \div 220 = 9$,
 $1980 \div 198 = 10$
 $\Rightarrow [6, 9, 10] = 90$ (分) = 1.5 小時
- (2) $90 \div 6 = 15$,
 $1980 \times 15 = 29700$ (公尺) = 29.7 (公里)

勝峰、棋凱、正義三位同學，體育課跑 360 公尺的操場，從起跑線沿同方向出發，勝峰每分鐘跑 72 公尺、棋凱每分鐘跑 90 公尺、正義每分鐘跑 60 公尺，則幾分鐘之後三人會在起跑處會合呢？

生活題

解

- 勝峰跑一圈需 $360 \div 72 = 5$ (分)
 棋凱跑一圈需 $360 \div 90 = 4$ (分)
 正義跑一圈需 $360 \div 60 = 6$ (分)
 $\therefore [5, 4, 6] = \underline{60}$ (分)



同步評量

4

(B) 1. 試求 56 與 75 的最小公倍數為何？

- (A) 2100 (B) 56×75
 (C) $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ (D) $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

$$1. 56 = 2^3 \times 7, 75 = 3 \times 5^2, \text{兩數互質} \\ [56, 75] = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 56 \times 75$$

(C) 2. 試求 $2^3 \times 3^2 \times 7$ 與 $2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ 的最小公倍數為何？

- (A) $2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$ (B) $2^3 \times 3^3 \times 7$
 (C) $2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11$ (D) $2^2 \times 3^2 \times 7$

$$2. [2^3 \times 3^2 \times 7, 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11] \\ = 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11$$

(D) 3. 若 a, b 為正整數， $a \times b = 3366$ ， $[a, b] = 306$ ，則 $(a, b) = ?$

- (A) 3 (B) 6
 (C) 9 (D) 11

$$3. a \times b = [a, b] \times (a, b) \\ \Rightarrow 3366 = 306 \times (a, b) \Rightarrow (a, b) = 11$$

(D) 4. $\frac{1}{12}$ 與 $\frac{1}{18}$ 分別乘以下列哪一正整數後，皆都變成整數？

- (A) 24 (B) 38
 (C) 48 (D) 72

$$4. \text{此正整數} = [12, 18] = 2^2 \times 3^2 = 36, \\ \text{凡為 } 36 \text{ 倍數皆可}, 72 = 36 \times 2$$

(A) 5. 長方形磁磚，每塊長 40 公分、寬 60 公分，若磁磚不分割，以這些磁磚拼成一個最小正方形，則需要幾塊長方形磁磚？

- (A) 6 (B) 8
 (C) 12 (D) 16

$$5. [40, 60] = 2^3 \times 3 \times 5 = 120 \\ \frac{120}{40} \times \frac{120}{60} = 3 \times 2 = 6 \text{ (塊)}$$

解題小

備方

第 3 題：若假設 a 與 b 兩數互質，則 $(a, b) = 1$ ， $(a, b) \times [a, b] = 1 \times [a, b] = a \times b$ ，進一步推廣後可知，若 a 與 b 兩數不互質，則 $(a, b) \times [a, b] = a \times b$ 亦成立。

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

- (B) 1. 下列敘述何者正確？
 (A) 除了 1 及自己本身之外無其他正因數的自然數稱為質數
 (B) 恰有兩個正因數的自然數稱為質數
 (C) 不是質數的自然數稱為合數
 (D) 質數均為奇數
 1. (A) 自然數包含 1, 1 不為質數
 (C) 1 不是質數也不是合數
 (D) 質數中唯有 2 是偶數
- (A) 2. 下列何者是 $2^2 \times 3$ 的倍數？
 (A) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (B) $2^3 \times 5$ (C) 2×3^2 (D) $2 \times 3^2 \times 7$
 $2. 2^2 \times 3$ 的倍數 $\Rightarrow 2^2 \times 3^3 \times 5$
- (B) 3. 下列哪一個數的質因數僅有 2、3、7 呢？
 (A) 24 (B) 42 (C) 28 (D) 82
 $3. 42 = 2 \times 3 \times 7$
- (B) 4. $(84, 120, 210) + [12, 15, 45]$ 的值為下列何者？
 (A) 168 (B) 186 (C) 268 (D) 286
 $4. (84, 120, 210) = 2 \times 3 = 6,$
 $[12, 15, 45] = 3^2 \times 4 \times 5 = 180 \Rightarrow 6 + 180 = 186$
- (C) 5. 右列短除法的過程，何者敘述正確？
 (A) 21 是三數最大公因數
 (B) $3 \times 7 \times 19$ 是三數的最小公倍數
 (C) 3 是三數的最大公因數
 (D) $1 \times 7 \times 19$ 是三數的最小公倍數

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 21, 147, 57} \\ 7 \overline{) 7, 49, 19} \\ 1, 7, 19 \end{array}$$

 $5. 3$ 是三數的最大公因數， $3 \times 7 \times 19$ 是三數的最小公倍數
- (D) 6. 下列各數何者可以用兩個相異質數之和表示呢？
 (A) 2 (B) 3
 (C) 4 (D) 5
 $6. 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 2, 4 = 1 + 3 = 2 + 2, 5 = 1 + 4 = 2 + 3,$
 又 1 不為質數，故只有 5 符合
- (D) 7. 已知 $A = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 、 $B = 6 \times 5 \times 7$ ，則下列敘述何者有誤？
 (A) $[A, B] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ (B) $(A, B) = 2 \times 3 \times 5$
 (C) B 有 4 個相異質因數 (D) B 有 14 個正因數
 $7. B$ 有 16 個正因數
- (C) 8. 假設 x 為正整數，使得 $\frac{57}{x}$ 也是正整數的 x 有多少個？
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
 $8. 當分子為分母的倍數時，則此分數為一整數，又 57 的因數有 1、3、19、57 四個，故 x 有四個$
- (A) 9. 若有 a 、 b 兩數， $a = 3^3 \times 7^2 \times 11$ ， $b = 5^3 \times 7^3 \times 11^2$ ，則 a 、 b 的正公因數有幾個？
 (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
 $9. (a, b) = 7^2 \times 11$ ，公因數有 1、7、11、49、77、 $7^2 \times 11$ ，共 6 個
- (D) 10. 判斷下列何者不是 1599 的因數呢？
 (A) 13 (B) 41 (C) 123 (D) 202
 $10. 1599 = 3 \times 13 \times 41$ ，又 $123 = 3 \times 41$
 故 202 不為 1599 的因數
- (A) 11. 若 9、15、16、35、50 均為 x 的因數，則 x 的最小值為何？
 (A) $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ (B) $2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7$
 (C) $2 \times 3 \times 5$ (D) $2 \times 3^2 \times 5$
 $11. 9 = 3^2, 15 = 3 \times 5, 16 = 2^4,$
 $35 = 5 \times 7, 50 = 2 \times 5^2$
 x 的最小值 $= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

- (C) 12. 有三個正分數 $\frac{35}{12}$ 、 $\frac{49}{30}$ ，分別乘以一個正分數 a 之後，都成為整數，則 a 的值可能為下列何者？
 $12. a = \frac{[12, 30]}{(35, 49)} = \frac{60}{7}$
 (A) $\frac{30}{7}$ (B) $\frac{7}{30}$ (C) $\frac{60}{7}$ (D) $\frac{7}{60}$
- ※(D) 13. 老師發給每一位同學一張長、寬分別為 12、15 公分的衛生紙，請問：要多少張才能組合出一個正方形呢？
 $13. [12, 15] = 60, 60 \div 12 = 5, 60 \div 15 = 4, 5 \times 4 = 20$
 (A) 38 (B) 32 (C) 26 (D) 20
- ※(D) 14. 施努筆老師要在 1 年 18 班進行分組教學，他發現如果 4 人一組、5 人一組、8 人一組都可以將班上同學編組完成，請問：該班最少有多少人呢？
 $14. [4, 5, 8] = 2^3 \times 5 = 40$
 (A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 40
- ※(C) 15. 有一瓶藥水 924 c.c.，用滴管（最小單位為 1 c.c.）平均分裝於若干個杯子內，若每個杯子內的藥水 c.c. 數均為 x ，則 x 不可能為下列何者？
 $15. 924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$ ，沒有 5 這個因數
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7



- ※(B) 1. 某棟大樓頂樓裝有紅、藍、綠三盞燈，其中紅燈每 35 分鐘閃一次，藍燈每 40 分鐘閃一次，綠燈每 25 分鐘閃一次。若這三盞燈於晚上 7 點同時閃一次，則當晚 8 點 55 分後，哪一盞燈先閃？
 $1. 7 \text{ 點} \sim 8 \text{ 點 } 55 \text{ 分} \Rightarrow 115 \text{ 分鐘}$
 紅： $115 \div 35 = 3 \dots 35 \times (3 + 1) = 140$
 藍： $115 \div 40 = 2 \dots 40 \times (2 + 1) = 120$
 綠： $115 \div 25 = 4 \dots 25 \times (4 + 1) = 125$
 $\therefore 120 < 125 < 140, \therefore \text{藍燈先閃}$
 (A) 紅燈 (B) 藍燈 (C) 綠燈 (D) 三盞燈同時閃
- (C) 2. 若 $a = 1.071 \times 10^6$ ，則 a 是下列哪一數的倍數？
 $2. a = 1.071 \times 10^6 = 1071 \times 10^3$
 $= (3^2 \times 7 \times 17) \times (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 17$
 $\therefore a$ 是 72 的倍數
 (A) 48 (B) 64 (C) 72 (D) 81
- ※(B) 3. 小王有一包糖果，若平均分成 21 堆，剩 17 顆；若平均分成 7 堆，則剩幾顆？
 $3. \text{設平分 } 21 \text{ 堆時，每堆有 } a \text{ 顆糖果，則有 } 21a + 17 \text{ 顆糖果，平分 } 7 \text{ 堆}$
 $\Rightarrow (21a + 17) \div 7 = 3a + 2 + \frac{3}{7} \Rightarrow \text{可平分 } (3a + 2) \text{ 堆，剩 } 3 \text{ 顆}$
 (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 6
- (B) 4. 有一個三位數，其百位、十位、個位數字分別為 1、 a 、 b 。若此數與 72 的最大公因數為 12，則 $a + b$ 可能為下列哪一數？
 $4. 100 \sim 200 \text{ 之間，} 12 \text{ 的倍數有 } 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192$ ，其中滿足題意的有 132 和 156
 $a + b$ 可能為 $3 + 2 = 5$ 或 $5 + 6 = 11$
 (A) 2 (B) 5 (C) 8 (D) 14
- (A) 5. 設「 $a \ominus b$ 」代表大於 a 且小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \ominus 15 = 2$ 。若 $30 \ominus c = 2$ ，則 c 可能為下列哪一個數？
 $5. \text{由 } 30 \ominus c = 2 \text{ 可知，大於 } 30 \text{ 且小於 } c \text{ 的有 } 2 \text{ 個質數；大於 } 30 \text{ 的前兩個質數是 } 31, 37$ ，所以 c 可能為 38
 (A) 38 (B) 42 (C) 46 (D) 50

解題小幫手

- 第 13 題：長方形要拼成正方形，即是要找長、寬的最小公倍數。
 第 14 題：三數皆能將某數整除，則某數為此三數的最小公倍數。
 第 15 題：藥水「杯」容量必為藥水「瓶」容量的質因數。

- ※(C) 6. 有 30 張分別標示 1~30 號的紙牌。先將號碼數為 3 的倍數的紙牌拿掉，然後從剩下的紙牌中，拿掉號碼數為 2 的倍數的紙牌。若將最後剩下的紙牌，依號碼數由小到大排列，則第 5 張紙牌的號碼為何？
- (A) 7 (B) 11 (C) 13 (D) 17

6. $[2, 3] = 6$ ，依序拿掉 2、3、6 的倍數後，剩下的數由小到大排列為：1、5、7、11、13、17、...，故第 5 張紙牌的號碼為 13

86 基測一



- (B) 1. 下列四個數中哪一個數與 77 互質？
- (A) 35 (B) 34 (C) 33 (D) 22

1. $77 = 7 \times 11$ ∴ 34 非 7 或 11 的倍數 ∴ 77 與 34 互質

- (C) 2. 求 a 、 b 的最大公因數，計算過程如右圖，則下列何者正確？
- (A) $a + b + c = 267$ (B) $b - d = 100$
 (C) $a + b = 245$ (D) $d > c$

5 $\left| \begin{array}{l} a, b \\ 28, c \\ d, 3 \end{array} \right.$
 7 $\left| \begin{array}{l} a, b \\ 28, c \\ d, 3 \end{array} \right.$
 2. $d = 28 \div 7 = 4, c = 3 \times 7 = 21,$
 $a = 28 \times 5 = 140, b = 21 \times 5 = 105$

- ※(A) 3. 你的 YAHOO 電子郵件信箱必須有四位數密碼輸入才能打開，已知密碼 $abcd$ 分別是在 $2520 = 2^a \times b^2 \times c \times d$ 的質因數分解中，請問：此信箱密碼為何？
- (A) 3357 (B) 3372 (C) 2357 (D) 2375

3. $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

- (A) 4. 若 $(甲, 72) = 12$ ， $[甲, 72] = 360$ ，求甲 = ？
- (A) 60 (B) 50 (C) 40 (D) 30

4. $甲 \times 72 = 12 \times 360$ ，甲 = 60

- (B) 5. 符號「甲◎乙」代表甲、乙的最小公倍數除以最大公因數，例如： $12 \circ 16 = 48 \div 4 = 12$ ，請問： $64 \circ 224 = ?$
- (A) 7 (B) 14 (C) 28 (D) 32

5. $[64, 224] = 32 \times 2 \times 7 = 448,$
 $(64, 224) = 32, 448 \div 32 = 14$

- ※(D) 6. 老師拿出一張長 240cm、寬 150cm 的圖畫紙，欲剪出 n 個正方形做為抽籤之用，正方形大小相同，但紙張不可以剩下，則 n 的最小值為何？
- (A) 24 (B) 30 (C) 36 (D) 40

6. $(240, 150) = 30, 240 \div 30 = 8,$
 $150 \div 30 = 5, 8 \times 5 = 40$

- (B) 7. 有一正整數 $64 = a \times b$ ， a 、 b 皆是大於 0 的整數，求 $a + b$ 的最小值為何？
- (A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14

7. $64 = 8 \times 8, 8 + 8 = 16$ (最小值)

- ※(C) 8. 學校舉行模擬考從早上 6 時起，每 45 分敲一下下課鐘，每 50 分敲一下模擬考結束鐘，請問：下課鐘與模擬考結束鐘何時齊鳴呢？
- (A) 上午 11:30 (B) 中午 12:30
 (C) 下午 1:30 (D) 下午 2:30

8. 鐘聲齊鳴的時間是 $[45, 50] = 450$ ；
 早上 6 時到下午 1 時共 7 小時計 420 分，
 所以 $450 - 420 = 30$ ；下午 1 時 30 分

- #(C) 9. 正整數 a 與 1176 的最大公因數為 42，且 140 與 a 的最大公因數為 70，則 a 的最小值為何？
- (A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 250

9. ∴ $(a, 1176) = 42, (140, a) = 70,$
 ∴ $a = [42, 70] = 210$

- #(B) 10. 已知 $x = 2 \times 3^{\square} \times 5$ ，假設 540 是 x 的倍數，但 450 不是 x 的倍數，則 $\square = ?$
- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

10. $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5, 450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ ，因為 540 是 x 的倍數，
 則 \square 可為 1、2、3，又 450 不為 x 的倍數，故 \square 只能為 3

解題小備方

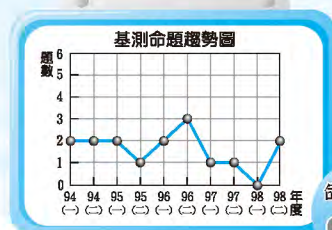
第 9 題：某數與其他兩數有不同的兩個最大公因數，則某數必為兩個最大公因數的最小公倍數。
 第 10 題：

(1) 540 是 x 的倍數 $\Rightarrow 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ ，所以 2、2²、3、3²、3³、5，皆為 540 的因數。

(2) 450 不是 x 的倍數 $\Rightarrow 450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ ，所以 2、3、3²、5、5²，其中有一個不是 450 的因數。

第 3 單元

分數的四則運算



命題率
90%

能力 — 分數的加減運算

一 分數

分數係指在有理數中可表示成 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)，其中 a 稱為分子， b 稱為分母。

1. 分數的種類

最簡分數 分子是整數，分母是正整數，且分子和分母互質的分數。例如： $\frac{3}{11}$ ， $\frac{5}{4}$ 。

真分數 商小於 1 且大於 0 的分數，即分子小於分母。例如： $\frac{3}{8}$ 。

假分數 商不小於 1 的分數，即分子大於等於分母，可寫成帶分數。例如： $\frac{9}{7}$ 、 $\frac{7}{7}$ 。

帶分數 一個整數加一個真分數，例如 $c\frac{a}{b}$ ，讀作「 c 又 b 分之 a 」。例如： $2\frac{5}{12}$ 。

2. 分數的基礎運算

種類	說明	例子
擴分	1. 一個分數的分子與分母同時乘以一個不是 0 的整數 2. 擴分後的分數與原來分數的值相等	$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$
約分	1. 一個分數的分子與分母同時除以它們的「公因數」 2. 約分後的分數與原來分數的值相等	$\frac{14}{24} = \frac{14 \div 2}{24 \div 2} = \frac{7}{12}$

3. 分數的加減運算

種類	分母相同	分母不同	遇帶分數
說明	直接將分子相加減再化成最簡分數。	先通分化為同分母，再相加減。	先把帶分數化成假分數再相加減，也可以整數部分與分數部分，分別相加減，再合併。 ※帶分數中的整數很大時，最好使用整數與分數分開計算的方法。
例子	$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$	$\frac{3}{7} - \frac{4}{5} = \frac{(3 \times 5) - (7 \times 4)}{7 \times 5} = -\frac{13}{35}$	$1\frac{5}{7} + 2\frac{3}{4} = \begin{cases} \text{方法一：} (1+2) + (\frac{5}{7} + \frac{3}{4}) = 3 + \frac{41}{28} = 4\frac{13}{28} \\ \text{方法二：} \frac{12}{7} + \frac{11}{4} = \frac{48+77}{28} = \frac{125}{28} = 4\frac{13}{28} \end{cases}$

4. 分數的大小比較

- (1) 此分數為正數時，化為同分母再比較分子的大小，若分子愈大，則此分數愈大。
- (2) 此分數為正數時，化為同分子再比較分母的大小，若分母愈大，則此分數愈小。
- (3) 此分數為負數時，先比較其絕對值的大小，加上負號後其大小方向相反。
- (4) 特殊題型：分子與分母差相同。可利用其差值與整數間的關係來判斷大小。

老師 傳授

分數的比較大小

學生 習作

比較下列各分數的大小：

- (1) $\frac{3}{11}, \frac{7}{11}, \frac{9}{11}$
- (2) $\frac{13}{4}, \frac{13}{6}, \frac{13}{8}$
- (3) $-\frac{23}{21}, -\frac{21}{19}, -\frac{19}{17}$

解

- (1) $\frac{3}{11} < \frac{7}{11} < \frac{9}{11}$
- (2) $\frac{13}{4} > \frac{13}{6} > \frac{13}{8}$
- (3) $-1\frac{2}{21} > -1\frac{2}{19} > -1\frac{2}{17}$
 $\Rightarrow -\frac{23}{21} > -\frac{21}{19} > -\frac{19}{17}$

比較下列各分數的大小：

- (1) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$
- (2) $\frac{7}{9}, \frac{7+1}{9}, \frac{7}{9+1}$
- (3) $-3 - \frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, -3 + \frac{2}{3}$

解

- (1) $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}, \frac{3}{4} = \frac{12}{16}, \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$
 $\frac{12}{18} < \frac{12}{16} < \frac{12}{15} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$
- (2) $\frac{7}{9} < \frac{8}{9}, \frac{7}{9} > \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{7}{10} < \frac{7}{9} < \frac{8}{9}$
 $\Rightarrow \frac{7}{9+1} < \frac{7}{9} < \frac{7+1}{9}$
- (3) $-3 - \frac{1}{3} = -(3\frac{1}{3}) = -\frac{10}{3},$
 $-3 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3} \Rightarrow -\frac{10}{3} < -\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$
 $\Rightarrow -3 - \frac{1}{3} < -\frac{8}{3} < -3 + \frac{2}{3}$

2 老師 傳授

分數的交換律與結合律

學生 習作

請計算下列各式：

- (1) $\frac{13}{11} \times 18 + \frac{13}{11} \times 12 - \frac{13}{11} \times 7 - \frac{13}{11} = ?$
- (2) $\frac{2006}{2007} \times 2006 = ?$

解

- (1) 原式 $= \frac{13}{11} \times (18 + 12 - 7 - 1) = \frac{13}{11} \times 22$
 $= 26$
- (2) 原式 $= \frac{2006}{2007} \times (2007 - 1) = 2006 - \frac{2006}{2007}$
 $= 2005\frac{1}{2007}$

請計算下列各式：

- (1) $\frac{17}{23} \times 11\frac{1}{2} \div (2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5}) = ?$
- (2) $(1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 + \frac{1}{100}) = ?$

解

- (1) 原式 $= \frac{17}{23} \times \frac{23}{2} \div (\frac{11}{5} + \frac{6}{5}) = \frac{17}{2} \div \frac{17}{5}$
 $= \frac{17}{2} \times \frac{5}{17} = \frac{5}{2}$
- (2) 原式 $= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{101}{100} = \frac{101}{2}$

$$(3) (3\frac{3}{5} - 4\frac{2}{7}) \times \frac{35}{6} = ?$$

解

$$(3) \text{原式} = \frac{18}{5} \times \frac{35}{6} - \frac{30}{7} \times \frac{35}{6} = 21 - 25 \\ = \underline{-4}$$

$$(3) -2\frac{3}{7} \times 7\frac{5}{11} - 6\frac{6}{11} \times 2\frac{3}{7} = ?$$

解

$$(3) \text{原式} = -(2\frac{3}{7} \times 7\frac{5}{11} + 6\frac{6}{11} \times 2\frac{3}{7}) \\ = -2\frac{3}{7} \times (7\frac{5}{11} + 6\frac{6}{11}) \\ = -2\frac{3}{7} \times 14 = \underline{-34}$$

3 老師 傳授

分數加減法的應用

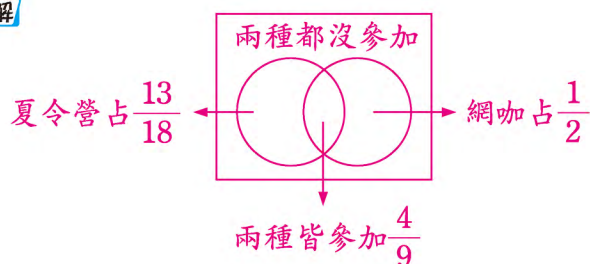
學生 寫作 3

安安班上同學暑假活動中，參加夏令營的占 $\frac{13}{18}$ ，泡在網咖的占 $\frac{1}{2}$ ，兩種都有的占 $\frac{4}{9}$ ，試回答下列問題：

- (1) 夏令營或網咖至少參加一種的，占全班的幾分之幾？
- (2) 夏令營或網咖兩種都沒參加的，占全班的幾分之幾？
- (3) 只有參加夏令營而沒有上網咖的，占全班的幾分之幾？
- (4) 只有上網咖而沒有參加夏令營的，占全班的幾分之幾？

生活題

解



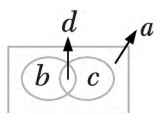
$$(1) \frac{13}{18} + \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{13 + 9 - 8}{18} = \frac{14}{18} = \underline{\frac{7}{9}}$$

$$(2) 1 - \frac{7}{9} = \underline{\frac{2}{9}}$$

$$(3) \frac{13}{18} - \frac{4}{9} = \frac{13 - 8}{18} = \underline{\frac{5}{18}}$$

$$(4) \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9 - 8}{18} = \underline{\frac{1}{18}}$$

解題小 偏方



(1) 至少參加一種

$$\Rightarrow b + c - d$$

(2) 兩種都沒參加

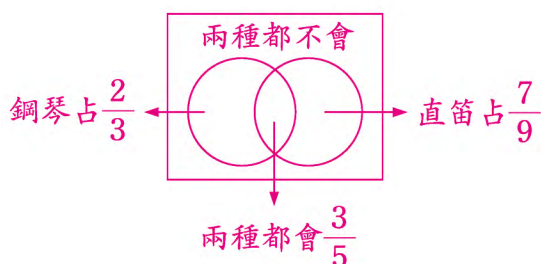
$$\Rightarrow a - (b + c - d)$$

平平班上會彈鋼琴的人占全班人數的 $\frac{2}{3}$ ，會吹直笛的人數占全班人數的 $\frac{7}{9}$ ，兩種都會的人數占全班人數的 $\frac{3}{5}$ ，試回答下列問題：

- (1) 會彈鋼琴或會吹直笛的人，占全班的幾分之幾？
- (2) 兩種樂器都不會的人，占全班的幾分之幾？
- (3) 只會彈鋼琴而不會吹直笛的人，占全班的幾分之幾？
- (4) 只會吹直笛而不會彈鋼琴的人，占全班的幾分之幾？

生活題

解



$$(1) \frac{2}{3} + \frac{7}{9} - \frac{3}{5} = \frac{30 + 35 - 27}{45} = \underline{\frac{38}{45}}$$

$$(2) 1 - \frac{38}{45} = \underline{\frac{7}{45}}$$

$$(3) \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10 - 9}{15} = \underline{\frac{1}{15}}$$

$$(4) \frac{7}{9} - \frac{3}{5} = \frac{35 - 27}{45} = \underline{\frac{8}{45}}$$



同步 評量 1

(B) 1. 若 $2\frac{2}{9} + 3\frac{5}{6} + 4\frac{7}{12}$ 的值可化為最簡分數 $\frac{n}{m}$ ，下列敘述何者正確？

- (A) m 、 n 均為質數 (B) $m + n$ 為質數
(C) $m + n$ 為 3 的倍數 (D) $m + n$ 為 5 的倍數

$$1. \text{原式} = \frac{20}{9} + \frac{23}{6} + \frac{55}{12} = \frac{383}{36} \\ \Rightarrow 383 + 36 = 419 \text{ 為質數}$$

(C) 2. 甲、乙、丙三位選手各罰球 7、8、9 次，分別命中 4、5、6 球，則誰的命中率最高？

- (A) 甲 (B) 乙
(C) 丙 (D) 一樣高

$$2. \text{甲、乙、丙命中率分別為 } \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9} \\ \frac{4}{7} = 1 - \frac{3}{7}, \frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8}, \frac{6}{9} = 1 - \frac{3}{9} \\ \therefore \frac{3}{7} > \frac{3}{8} > \frac{3}{9}, \therefore \frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \frac{6}{9}, \text{丙命中率最高}$$

(A) 3. 請計算 $\frac{1}{143} - \frac{1}{187} - \frac{1}{221} = \frac{A}{11 \times 13 \times 17}$ ，求 $A = ?$

- (A) -7 (B) 7
(C) -15 (D) 15

$$3. \text{原式} = \frac{1}{11 \times 13} - \frac{1}{11 \times 17} - \frac{1}{13 \times 17} = \frac{17 - 13 - 11}{11 \times 13 \times 17} = \frac{-7}{11 \times 13 \times 17}$$

(A) 4. 請計算 $\left| \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \right| + \left| \frac{1}{10} - \frac{1}{8} \right| + \left| \frac{1}{12} - \frac{1}{10} \right| = ?$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$
(C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$

$$4. \text{原式} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{1}{6}$$

(B) 5. 有一題目是 $(-3\frac{1}{6}) - (-\frac{1}{3}) = ?$ 但阿穎不小心算成是 $(-3\frac{1}{6}) + (-\frac{1}{3})$ ，則他算出的答案比正確答案大或小多少呢？

- (A) 大 $\frac{2}{3}$ (B) 小 $\frac{2}{3}$
(C) 大 $\frac{1}{6}$ (D) 小 $\frac{1}{6}$

$$5. \text{原來} \Rightarrow -3\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = -3\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{17}{6} \\ \text{後來} \Rightarrow -3\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -3\frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{21}{6} \\ -\frac{21}{6} - (-\frac{17}{6}) = \frac{-21+17}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(D) 6. 安哥把收入的 $\frac{1}{4}$ 拿來當作生活費， $\frac{1}{6}$ 拿給女兒交學費，剩下的錢全部都給心愛的老婆，請問給老婆的錢占收入的多少呢？

- (A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$

$$6. 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{12-3-2}{12} = \frac{7}{12}$$



能力的二 分數的乘除與四則運算

一 分數的乘除運算

- 分數相乘時，把分子相乘做為新分子，分母相乘做為新分母，所得的新分數就是分數的乘積。
- 分數相乘時，若分子和分母之間有公因數，可以先約去公因數再相乘。
- 分數相乘時，帶分數應先化成假分數後再相乘。
- 倒數：一個分數的分子不為 0，將其分子與分母互調，所得新的分數就是原分數的倒數。
 - 若有兩分數其乘積等於 1，此兩數必互為倒數。
 - 一個不等於 0 的數，其倒數與其相反數的乘積必為 -1。

4

老師傳授

分數的四則運算

學生寫作

4

請計算下列各式：

(1) $1\frac{3}{4} \div [3 \times (1.6 + 5 \div 3)] \times 4 = ?$

(2) $0.5 \div [(\frac{1}{3} + 0.4) \times \frac{3}{11}] = ?$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \frac{7}{4} \div [3 \times (\frac{16}{10} + \frac{5}{3})] \times 4 \\ &= \frac{7}{4} \div (3 \times \frac{98}{30}) \times 4 = \frac{7}{4} \times \frac{10}{98} \times 4 \\ &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \frac{1}{2} \div [(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}) \times \frac{3}{11}] \\ &= \frac{1}{2} \div (\frac{11}{15} \times \frac{3}{11}) = \frac{1}{2} \times 5 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

請計算下列各式：

(1) $1\frac{2}{3} \div [(0.5 - \frac{1}{4}) \div \frac{21}{44} \times \frac{7}{11}] = ?$

(2) $14\frac{1}{5} - (3\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} + 0.5) = ?$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \frac{5}{3} \div [(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \times \frac{44}{21} \times \frac{7}{11}] \\ &= \frac{5}{3} \div [\frac{1}{4} \times \frac{4}{3}] = \frac{5}{3} \times 3 = \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \frac{71}{5} - (\frac{7}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{71}{5} - (\frac{21}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{71}{5} - \frac{23}{4} \\ &= \frac{169}{20} = \underline{\underline{8\frac{9}{20}}} \end{aligned}$$

5

老師傳授

分數四則運算的應用

學生寫作

5

1年18班的人數為40人。第一次段考數學科分數，80分以上的人數恰好占全班人數的 $\frac{1}{4}$ ，70幾分的人數恰好占全班人數的 $\frac{1}{2}$ ，60幾分的人數恰好占全班人數的 $\frac{1}{5}$ ，請問：不及格的人數應為幾人？

生活題

解

$$\begin{aligned} \text{不及格人數占全班人數} &= 1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) \\ &= 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}, \\ 40 \times \frac{1}{20} &= 2(\text{人}) \quad \therefore \underline{\underline{\text{不及格的有2人}}} \end{aligned}$$

櫻怡、良宜、宇倫、育杰等四人合資10000元開店，良宜出全部資金的 $\frac{2}{5}$ ，櫻怡出的資金是良宜的 $\frac{3}{4}$ ，宇倫出的資金是櫻怡的 $\frac{1}{3}$ ，剩下的資金由育杰出，則育杰出多少錢呢？

生活題

解

$$\begin{aligned} \text{良宜占} &\frac{2}{5}, \text{櫻怡占} \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}, \\ \text{宇倫占} &\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \\ \text{育杰出資} &= 10000 \times [1 - (\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10})] \\ &= 10000 \times \frac{1}{5} = \underline{\underline{2000(\text{元})}} \end{aligned}$$

Let's Go!

同步評量

2

(B) $1.\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = ?$

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{19}{4}$ (C) $\frac{19}{16}$ (D) $\frac{19}{2}$

$1.\frac{1}{4} + \frac{15}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{4} + \frac{9}{2} = \frac{19}{4}$

(C) 2. 育安從家裡到學校的上學途中，會經過育平蛋糕店和小華文具店，走了全程的 $\frac{1}{3}$ 到達育平蛋糕店，又走了剩餘路程的 $\frac{1}{3}$ 到達小華文具店。請問：文具店到學校的路程為全程的幾分之幾？

(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{6}{9}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{2}{9}$

$2.1 - [\frac{1}{3} + (\frac{2}{3} \times \frac{1}{3})] = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{2}{9}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

- (B) 3. 有純酒精 $33\frac{1}{3}$ 公升，加入純水 $11\frac{2}{3}$ 公升混合後，分裝到 $\frac{5}{2}$ 公升的瓶子，試問可裝滿多少瓶？
- (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20

$$3. (33\frac{1}{3} + 11\frac{2}{3}) \div \frac{5}{2} = (\frac{100}{3} + \frac{35}{3}) \times \frac{2}{5} = \frac{135}{3} \times \frac{2}{5} = 18$$



生活應用題※，本書特有題◎，難題#



(B) 1. $1\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} \div \frac{7}{11} = ?$

- (A) $\frac{11}{3}$ (B) $\frac{22}{3}$ (C) $\frac{11}{6}$ (D) $\frac{3}{22}$

$$1. \frac{7}{4} \times \frac{8}{3} \times \frac{11}{7} = \frac{22}{3}$$

- (C) 2. 在下列選項中，最接近 $2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$ 的值為何？

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18

$$2. (3 + 4 + 5 + 6) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5})$$

$$= 18 - 1\frac{17}{60} = 16\frac{43}{60} \approx 17$$

- (C) 3. $980 \times 12.5 = 980 \times (\square \div 8) = 980 \div 8 \times \triangle =$ 甲，則下列敘述何者正確？

- (A) $\square + \triangle = 1000$ (B) 甲 = 12500
(C) $\square \times 2 = 200$ (D) $(\square + \triangle) \times 2 = 2000$

$$3. 980 \times 12.5 = 980 \times (\frac{100}{8}) = 980 \times 100 \div 8$$

$$= 980 \div 8 \times 100, \square = 100, \triangle = 100$$

- (A) 4. 已知 A、B、C 三數均為正數，若 $A \times \frac{16}{17} = B \times \frac{17}{18} = C \times \frac{18}{19}$ ，則此三數的大小為何？

- (A) $A > B > C$ (B) $A > C > B$
(C) $A < B < C$ (D) $A < C < B$

$$4. \because \frac{16}{17} < \frac{17}{18} < \frac{18}{19}, \text{ 且 } A、B、C \text{ 為正數}, \therefore A > B > C$$

- (C) 5. x 的 $\frac{1}{2}$ 的 $\frac{2}{3}$ 的 $\frac{3}{4}$ 的 $\frac{4}{5}$ 是 210，則 x 的 $\frac{1}{3}$ 是多少？

- (A) 105 (B) 210
(C) 350 (D) 420

$$5. (\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5})x = 210 \Rightarrow \frac{1}{5}x = 210$$

$$\Rightarrow x = 1050 \quad \therefore \frac{1}{3}x = 350$$

- ※(B) 6. 某工程光緯獨作 15 日完工，承凱獨作 18 日完工。光緯每日比承凱每日多做全工程的多少？

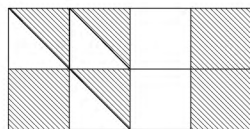
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{90}$ (C) $\frac{1}{60}$ (D) $\frac{1}{80}$

$$6. \frac{1}{15} - \frac{1}{18} = \frac{6-5}{90} = \frac{1}{90}$$

- (D) 7. 如右圖，將矩形分成八塊大小相同的正方形，則斜線區域面積占原長方形面積的幾分之幾呢？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{16}$
(C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$

7. 將矩形中的小正方形看成兩個相等三角形，則矩形共有 16 個三角形，斜線部分占了 9 個



解題小偏方 第 3 題： $a \times (b \div c) = a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times b = (a \div c) \times b$ 。

(C) 8. 有一種新的運算規則 $a\$b = a \div b + a \times b$, 試求 $(\frac{2}{3} \$ \frac{3}{4}) = ?$

- (A) $3\frac{3}{5}$ (B) $1\frac{5}{18}$ (C) $\frac{25}{18}$ (D) $\frac{18}{25}$

$$8. \frac{2}{3} \$ \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \\ = \frac{8}{9} + \frac{1}{2} = \frac{16+9}{18} = \frac{25}{18}$$

※(A) 9. 有一隻蝸蝓自地面想爬到 3 公尺高的玻璃上, 白天往上爬 $\frac{3}{2}$ 公尺, 晚上會下滑 $\frac{3}{4}$ 公尺, 請問過了三天三夜之後, 牠離玻璃頂端有多少公尺呢?

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{5}$

$$9. 3 - 3 \times (\frac{3}{2} - \frac{3}{4}) = 3 - 3 \times \frac{3}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

※(B) 10. 仁安班上有 33 人, 其中 $\frac{3}{4}$ 的人由家長接送, 而且家長接受的有 $\frac{2}{5}$ 的人是女生, 則班上男生由家長接送的人數算法何者正確?

- (A) $33 \times \frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ (B) $33 \times \frac{3}{4} \times (1 - \frac{2}{5})$ (C) $33 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ (D) $33 \times (\frac{3}{4} - 1) \times \frac{2}{5}$

(C) 11. 下列哪一個式子與 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} \times (\frac{3}{2} - \frac{1}{3})$ 不相等呢?

- (A) $\frac{2}{3} \times 3 \times (\frac{3}{2} - \frac{1}{3})$
 (B) $\frac{2}{3} \times (\frac{3}{2} - \frac{1}{3}) \div \frac{1}{3}$
 (C) $\frac{2}{3} \div (\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3})$
 (D) $\frac{2}{3} \times (3 \times \frac{3}{2} - 3 \times \frac{1}{3})$

$$11. \because \frac{2}{3} \div \frac{1}{3} \times (\frac{3}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \div \frac{1}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\text{但(C)} \frac{2}{3} \div (\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \div (\frac{1}{2} - \frac{1}{9}) = \frac{12}{7}$$

(D) 12. 請比較 $-\frac{3}{2}$ 、 $-\frac{5}{4}$ 、 $-\frac{4}{3}$ 的大小為何?

- (A) $-\frac{3}{2} < -\frac{5}{4} < -\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{2} > -\frac{5}{4} > -\frac{4}{3}$
 (C) $-\frac{5}{4} > -\frac{3}{2} > -\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{3}{2} < -\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$

$$12. \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}, \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}, \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$$

(B) 13. 有一個分數的分母為 32, 若分子加上 2 後可約分成 $\frac{1}{8}$, 求其原分數為何?

- (A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

$$13. \frac{1}{8} = \frac{1 \times 4}{8 \times 4} = \frac{4}{32}, \text{原分數} = \frac{4-2}{32} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

(A) 14. 試求 $-\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2^3} - (\frac{1}{2})^4 = ?$

- (A) $-\frac{15}{16}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $-\frac{5}{16}$ (D) $\frac{5}{16}$

$$14. \text{原式} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{-8-4-2-1}{16} \\ = -\frac{15}{16}$$

(B) 15. 有可樂 3 杯, 老師喝 $\frac{5}{6}$ 杯, 主任比老師多喝了 $\frac{2}{9}$ 杯, 則兩人共喝了多少杯可樂?

- (A) $\frac{14}{9}$ (B) $\frac{17}{9}$ (C) $\frac{35}{18}$ (D) $\frac{37}{18}$

$$15. \text{所求} = \frac{5}{6} + (\frac{5}{6} + \frac{2}{9}) = \frac{15+5+4}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$



(C) 1. 計算 $(-\frac{1}{3})^3 \times (-18) + \frac{3}{4} \div (-3)$ 之值為何?

- (A) $-\frac{17}{36}$ (B) $-\frac{11}{12}$
 (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{4}$

98 基測二

$$1. \text{原式} = (-\frac{1}{27}) \times (-18) + \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

(C) 2. 估算 $2009 \times (-\frac{2009}{2008})$ 的值最接近下列哪一數？

- (A) -2008 (B) -2009
(C) -2010 (D) -2011

2. $2009 \times (-\frac{2009}{2008}) = 2009 \times (-\frac{2008}{2008} - \frac{1}{2008}) = 2009 \times (-1 - \frac{1}{2008})$
 $= -2009 - \frac{2009}{2008} \approx -2010$

98 基測二

(A) 3. 計算 $\frac{2}{3} \times (1 + \frac{1}{2}) - \frac{3}{2} \div (\frac{1}{2} - 1)$ 之值為何？

- (A) 4 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

3. 原式 = $(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}) - \frac{3}{2} \times (-2) = 1 + 3 = 4$

97 基測二

(C) 4. 計算 $48 \div (\frac{8}{15} + \frac{24}{35})$ 之值為何？

- (A) 75 (B) 160 (C) $\frac{315}{8}$ (D) $90\frac{24}{35}$

4. 原式 = $48 \div (\frac{56}{105} + \frac{72}{105}) = 48 \times \frac{105}{128} = \frac{315}{8}$

97 基測一

(D) 5. 若三個正數 a 、 b 、 c 的關係式為 $a + \frac{a}{101} = b - \frac{b}{87} = c$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？

- (A) $a > b > c$ (B) $c > b > a$ (C) $a > c > b$ (D) $b > c > a$

5. 原式 $\Rightarrow a(1 + \frac{1}{101}) = b(1 - \frac{1}{87}) = c$ ， $\because 1 + \frac{1}{101} > 1 > 1 - \frac{1}{87}$ ， $\therefore a < c < b$

96 基測二

(B) 6. 在算式 $21 - (-\frac{50}{87} \square 24)^2$ 的 \square 中，填入下列哪一個運算符號，可使計算出來的值是最小的？

- (A) + (B) - (C) \times (D) \div

6. $\because 21 - (-\frac{50}{87} \square 24)^2$ 要最小， $\therefore (-\frac{50}{87} \square 24)^2$ 要最大，故為(B)

96 基測一

基測 趨勢題

(B) 1. 試計算 $\frac{1}{(-2)} + \frac{2}{(-2)^2} + \frac{4}{(-2)^3} + \frac{8}{(-2)^4}$ 之值為何？

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

1. 原式 = $-\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - \frac{4}{8} + \frac{8}{16}$
 $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

(B) 2. $A \times \frac{3}{5} = B \div 2\frac{1}{2}$ ，若 $A > 0$ ， $B > 0$ ，則下列何者正確？

- (A) $A > B$ (B) $A < B$
(C) $A = B$ (D) 無法比較

2. $\frac{3}{5}A = \frac{2}{5}B$ ， $\because \frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ ， $\therefore A < B$

(D) 3. $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{100}) = ?$

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{50}$ (D) $\frac{1}{100}$

3. 原式 = $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$

(A) 4. 設 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ ，下列何者正確？

- (A) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b - c}$ (B) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{c}$
(C) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b} - a \times \frac{1}{c}$ (D) $a \div (b - c) = a \times \frac{1}{b + c}$

4. $a \div (b - c) = \frac{a}{b - c} = a \times \frac{1}{b - c}$

解題小 備方 第2題： $\frac{3}{5}A = \frac{2}{5}B \Rightarrow 大 \times 小 = 小 \times 大$ 。

第3題： $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times \dots \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \Rightarrow$ 可約分2。

第4題： $a \div (b - c) = \frac{a}{b - c} \neq \frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ 。

(B) 5. 若 A 為負整數，且 $-\frac{5}{16} > \frac{A}{48} > -\frac{3}{4}$ ，則滿足此關係的 A 共有多少個？

- (A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24

$$5. -\frac{5}{16} > \frac{A}{48} > -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{5}{48} > \frac{A}{48} > -\frac{36}{48}$$

A 的個數 = $(36 - 15) + 1 = 22$ 個

(A) 6. 試計算 $|\frac{1}{8} - \frac{1}{6}| + |\frac{1}{6} - \frac{1}{4}| + |\frac{1}{4} - \frac{1}{2}| = ?$

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$

$$6. \text{原式} = (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-1+4}{8} = \frac{3}{8}$$

(A) 7. 下列何者不等於 $-8\frac{1}{3}$ ？

- (A) $-8 + \frac{1}{3}$ (B) $-8 + (-\frac{1}{3})$
(C) $-8 - \frac{1}{3}$ (D) $-(8 + \frac{1}{3})$

$$7. \because -8\frac{1}{3} = -8 + (-\frac{1}{3}) = -8 - \frac{1}{3} = -(8 + \frac{1}{3})$$

#(C) 8. 若 a, b 為正整數，且兩分數和為 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ ，則 $1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} -$

$$\frac{13}{42} = ?$$

- (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{5}{13}$
(C) $\frac{5}{14}$ (D) $\frac{5}{16}$

$$8. 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) - (\frac{1}{6} + \frac{1}{7})$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$$

※(A) 9. 來一客便利商店促銷麵包，推出 A, B, C 三種方案，哪一種最划算？

A：每個皆打 85 折。

B：每個麵包比原來大百分之十。

C：買 12 個麵包，加送 1 個。

- (A) A 家 (B) B 家 (C) C 家 (D) 無法比較

$$9. A: \text{每個為原價的} \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

$$B: \text{加大麵包為原來的} \frac{1}{1.1} = \frac{10}{11}$$

$$C: \text{每個為原價的} \frac{12}{13}$$

$$\because \frac{17}{20} < \frac{10}{11} < \frac{12}{13}, \therefore A \text{ 家最划算}$$

※(B) 10. 一列火車已固定速率開 210 公里需要 $2\frac{1}{2}$ 小時，若要提早 $\frac{3}{4}$ 小時到達，則火車速率每小時要增加多少公里？

- (A) 24 (B) 36 (C) 48 (D) 60

$$10. \text{所求} = [210 \div (2\frac{1}{2} - \frac{3}{4})] - (210 \div 2\frac{1}{2}) = 120 - 84 = 36 \text{ (公里/小時)}$$

(A) 11. 計算 $1 - 1 \div \{1 - 1 \div [1 - 1 \div (1 + \frac{1}{10})]\} = ?$

- (A) $\frac{11}{10}$ (B) $\frac{10}{11}$
(C) 11 (D) 10

$$11. 1 - 1 \div \{1 - 1 \div [1 - 1 \div (1 + \frac{1}{10})]\}$$

$$= 1 - 1 \div \{1 - 1 \div [1 - \frac{10}{11}]\} = 1 - 1 \div \{1 - 11\} = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$$

(C) 12. 請問 $273 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13})$ 的值會介於哪兩個正整數之間？

- (A) 340~341 (B) 341~342
(C) 342~343 (D) 343~344

$$12. 273 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13})$$

$$= 273 \times \frac{1}{2} + 273 \times \frac{1}{3} + 273 \times \frac{1}{5} + 273 \times \frac{1}{7} + 273 \times \frac{1}{13}$$

$$= 136.5 + 91 + 54.6 + 39 + 21 = 342.1$$

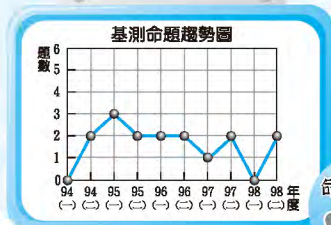
※(D) 13. 高中生聯誼，規定不認識的兩人要握手打招呼，此次聯誼有 11 人參加，其中有 3 人已經互相認識，所以不需要互相握手，其餘則是沒有彼此認識的人。請問聯誼中最少要握手幾次才能達到彼此認識的目的？

- (A) 49 (B) 50 (C) 51 (D) 52

$$13. \frac{11(11-1)}{2} - \frac{3(3-1)}{2} = 55 - 3 = 52$$

第4單元

一元一次方程式



命題率
80%

能力 — 以文字符號代表數

一 兩數相乘的記法

數字與文字符號相乘的記法	數字寫在文字之前，「 \times 」可寫成「 \cdot 」或省略不寫。 例如： $x \times (-3) = (-3) \cdot x = -3x$ 。
文字與文字符號相乘的記法	相同的文字符號相乘可改寫成指數形式，不同的文字符號相乘應按照字母順序編寫，且「 \times 」可省略不寫。 例如： $2 \times x \times x = 2x^2$ ； $a \times x \times 3 \times p \times z = 3apxz$ 。
文字除以數字的記法	「 \div 」可以省略不寫，並將該數寫成分數形式與文字符號相乘。 例如： $x \div 4 = x \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$ 。

二 以符號代表數學式

條件	符號表示法
n 為整數	則偶數以 $2n$ 表示，奇數以 $2n + 1$ 表示。
連續三整數	則以 $n - 1, n, n + 1$ 或 $n, n + 1, n + 2$ 表示。
連續三偶數或三奇數	則以 $n - 2, n, n + 2$ 表示。

老師傳授

依題意以符號列式

學生寫作

請依下列各題之題意列出數學式：

- (1) 有糖果 y 顆平均分給同學吃，若每位同學平均分得 6 顆後，還剩下 3 顆，則同學共有幾位？
- (2) 有一長方形的周長為 50，若長為 x ，則此長方形的面積該如何表示？
- (3) 若雞蛋一打 x 元，則買 20 顆雞蛋需要多少錢？

解

- (1) $(y - 3) \div 6 = \frac{y - 3}{6}$ (位)
- (2) 寬 $= \frac{50}{2} - x = 25 - x$ ，
面積 $= x(25 - x)$ (平方單位)
- (3) $x \div 12 \times 20 = \frac{5}{3}x$ (元)

試以文字符號表示下列各題的解：

- (1) 奇鼎國中福利社將每罐成本為 x 元的優酪乳加六成作為定價，再以定價打 8 折售出，請問：每罐優酪乳賺或賠多少元呢？
- (2) 若有一只王建民用過的棒球手套，按原價打 6 折後賣 x 元，則此手套原價是多少？
- (3) 邱薏仁買了 5 支原子筆，若一打原子筆需要 a 元，則邱薏仁付 100 元可找回多少元？

解

- (1) $x \times 1.6 \times 0.8 = 1.28x \Rightarrow 1.28x - x = 0.28x$
 \Rightarrow 每罐賺 $0.28x$ (元)
- (2) 原價 $\times 0.6 = x$
 $\Rightarrow x \div 0.6 = x \div \frac{3}{5} = x \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}x$ (元)
- (3) 一支原子筆為 $\frac{a}{12}$ 元
 $\Rightarrow 100 - 5 \times \frac{a}{12} = 100 - \frac{5}{12}a$ (元)

解題小偏方

設方程式的重點在於：將想求的數設為 x ，依照問題所給定條件寫成方程式，不需要考慮太多的枝節而被語意給困住。

2 老師 傳授

求算式的值

學生 實作 2

試求出(A)~(F)的值。

結果 算式 \ x	-3	$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}x + 3$	(A)	(D)
$x \div \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$	(B)	(E)
$-\frac{2}{3} - (-5x)$	(C)	(F)

解

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \frac{1}{2}(-3) + 3 = \frac{-3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{3}{2} \\ \text{(B)} \quad & -3 \div \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -9 - \frac{1}{4} = \frac{-37}{4} \\ \text{(C)} \quad & -\frac{2}{3} - \{-5 \times (-3)\} = -\frac{2}{3} - 15 = \frac{-47}{3} \\ \text{(D)} \quad & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{-1}{6} + \frac{18}{6} = \frac{17}{6} \\ \text{(E)} \quad & -\frac{1}{3} \div \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -1 - \frac{1}{4} = \frac{-5}{4} \\ \text{(F)} \quad & -\frac{2}{3} - \{(-5) \times \left(-\frac{1}{3}\right)\} = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \\ & = \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

試求出(A)~(F)的值。

結果 算式 \ y	-4	$\frac{1}{6}$
$-5y + \frac{3}{2}$	(A)	(D)
$-y \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$	(B)	(E)
$-7 - (-3y - 1)$	(C)	(F)

解

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & -5(-4) + \frac{3}{2} = 20 + \frac{3}{2} = \frac{43}{2} \\ \text{(B)} \quad & -(-4) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} \\ \text{(C)} \quad & -7 - \{-3(-4) - 1\} = -7 - 11 = \frac{-18}{1} \\ \text{(D)} \quad & -5\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{3}{2} = \frac{-5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{-5 + 9}{6} \\ & = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \text{(E)} \quad & -\left(\frac{1}{6}\right) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2}{4} \\ & = \frac{1}{4} \\ \text{(F)} \quad & -7 - \left\{-3\left(\frac{1}{6}\right) - 1\right\} = -7 + \frac{3}{2} \\ & = \frac{-14 + 3}{2} = \frac{-11}{2} \end{aligned}$$

Let's Go! 同步 評量 1

- (D) 1. 人輔、紀晴、小鐘一起去唱 KTV 共花了 800 元，又共同買了飲料花了 x 元，則每人平均須分攤多少元？
 (A) $800 + x$ (B) $\frac{800}{3} + x$ (C) $800 + \frac{x}{3}$ (D) $\frac{800 + x}{3}$
- (C) 2. 維尼的爺爺年齡比維尼的爸爸多了 40 歲，而維尼的爸爸年齡是維尼的 2 倍，若維尼今年是 x 歲，則爺爺的年齡該如何表示？
 (A) $x + 40$ (B) $(x + 40) \times 2$ (C) $2x + 40$ (D) $2 \times 40 + x$
- (B) 3. 小嫻在資訊展的時候，用 x 元買了一臺 85 折的促銷電腦，則這臺電腦原售價為多少元？
 (A) $\frac{x}{85}$ (B) $\frac{100}{85}x$ (C) $0.85x$ (D) $8.5x$

(C) 4. 已知大諒哥的身高是小亮哥的 $\frac{11}{9}$ 倍少 9 公分，若小亮哥的身高為 x 公分，則大諒哥的身高為多少公分？

(A) $\frac{11x-9}{9}$ (B) $\frac{11}{9}x-1$ (C) $\frac{11}{9}x-9$ (D) $\frac{11}{9}(x-9)$

(B) 5. 有一正整數 a 除以 b ，得商為 3，餘數為 1，則 $b = ?$

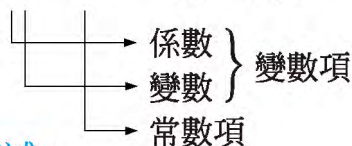
(A) $\frac{a+1}{3}$ (B) $\frac{a-1}{3}$ (C) $\frac{a}{3}+1$ (D) $\frac{a}{3}-1$

5. $a = b \times 3 + 1 \Rightarrow b = \frac{a-1}{3}$

能力二 一元一次式的運算

一 加減法運算

1. 一次式的型態： $3x - 5 \Rightarrow$ 一元一次式



2. 同類項才能相加減。

例 1 \rightarrow $2x + 3y - x + 2y - 5$

$= (2x - x) + (3y + 2y) - 5 = x + 5y - 5$



在 x 的多項式中， x 的次方相同的項，稱為同類項，常數是 x^0 項。

(1) x 與 $3x$ 是同類項，(2) $\frac{1}{x}$ 與 x 不是同類項，(3) \sqrt{x} 與 $2x$ 不是同類項。

二 乘除法運算

1. 運算三律

(1) 交換律： $a \times b = b \times a$

(2) 結合律： $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(3) 分配律： $a \times (b \pm c) = ab \pm ac$

2. 除法運算：先將除數變為倒數，再與被除數相乘。

3. 去括號運算

(1) 由左運算到右，先乘除後加減，先做小括號再做中括號最後處理大括號。

(2) 括號前若為「減號」，去括號後，括號內的運算符號也要「變號」。

3

老師傳授

一次式的化簡

學生寫作

3

1. $(-6x) \div (-\frac{2}{3}) = ?$

2. $(-8y) \div 4 - 3 = ?$

3. $2(3x-1) + (5x-2) = ?$

解

1. 原式 $= 6x \times \frac{3}{2} = 9x$

2. 原式 $= \frac{(-8y)}{4} - 3 = -2y - 3$

3. 原式 $= 6x - 2 + 5x - 2 = 11x - 4$

1. $3(2x-3) - 4(3x+2) = ?$

2. $(-\frac{1}{2}) \times (-10x) + (3x-5) = ?$

3. $(-7x+8) \div (-4) = ?$

解

1. 原式 $= 6x - 9 - 12x - 8 = -6x - 17$

2. 原式 $= 5x + 3x - 5 = 8x - 5$

3. 原式 $= \frac{-7x+8}{(-4)} = \frac{7}{4}x - 2$

$$4. x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = ?$$

解

$$4. \text{原式} = \frac{16x - 8x + 4x - 2x + x}{16} = \frac{11}{16}x$$

$$4. \frac{4x-1}{5} - \frac{1-2x}{3} + \frac{-3x}{4} = ?$$

解

$$4. \text{原式} = \frac{48x - 12 - 20 + 40x - 45x}{60} \\ = \frac{43x - 32}{60}$$

解題小偏方

注意括號前的減號(負號): $-(-3x+4) = 3x-4$ 。注意分式中的減號: $\frac{-3(2x+4)}{6} - \frac{-2(3x+4)}{6} = \frac{-6x-12+6x+8}{6} = -\frac{2}{3}$ 。

4 老師傳授

一次式的運算

學生寫作 4

1. 設 $A = 3x + 2$, $B = -4x + 3$, $C = x + 7$,試化簡 $\frac{3}{2}A - \frac{1}{4}B + \frac{C}{8} = ?$ (以 x 表示)2. 教室布置, 佩恩獨做要 3 天才能完成, 育真獨做要 5 天才能完成, 若佩恩先做 x 天 ($x < 3$), 則育真接手還要幾天才能完成教室布置?

生活題

解

$$1. \frac{3}{2}(3x-2) - \frac{1}{4}(-4x+3) + \frac{1}{8}(x+7) \\ = \frac{9x-6}{2} + \frac{4x-3}{4} + \frac{x+7}{8} \\ = \frac{36x-24+8x-6+x+7}{8} = \frac{45x-23}{8}$$

2. 設教室布置為 1, 佩恩一天做 $\frac{1}{3}$,育真一天做 $\frac{1}{5}$,

$$(1 - \frac{1}{3}x) \div \frac{1}{5} = (1 - \frac{1}{3}x) \times 5 \\ = 5 - \frac{5}{3}x \text{ (天)}$$

1. 設 $P = 3x - 2$, $Q = \frac{2}{3}P - x$, $R = \frac{3}{4}Q + x$, 試化簡 $2P - 3Q + 4R = ?$ (以 x 表示)2. 臺北與臺南相距 200 公里, 小華從臺南到臺北, 去程每小時 x 公里, 回程每小時 100 公里, 請問: 來回的平均時速為何? (以 x 表示)

生活題

解

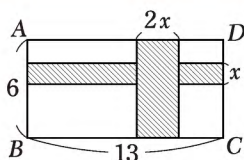
$$1. R = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}P - x) + x = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}x \\ 2P - 3Q + 4R \\ = 2P - 3(\frac{2}{3}P - x) + 4(\frac{1}{2}P + \frac{1}{4}x) \\ = 2P - 2P + 3x + 2P + x \\ = 2P + 4x = 2(3x - 2) + 4x = 10x - 4 \\ 2. \frac{200}{x} + \frac{200}{100} = \frac{200}{x} + 2, \\ 400 \div (\frac{200}{x} + 2) = 400 \times (\frac{x}{200 + 2x}) \\ = \frac{200x}{100 + x} \text{ (公里/小時)}$$

5 老師傳授

面積問題的列式

學生寫作 5

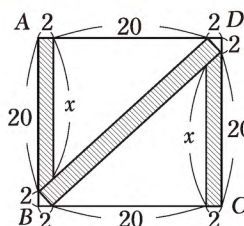
如圖, 這是海灣共和國的國旗, 試求斜線部分面積為何?



解

$$13x + 6(2x) - 2x \cdot x = 13x + 12x - 2x^2 \\ = 25x - 2x^2 \text{ (平方單位)}$$

如圖, 這是K 龍星共和國的國旗, 試求斜線部分面積為何?



解

$$(24 \times 22) - 2(20x \cdot \frac{1}{2}) - 2(2 \times 2 \times \frac{1}{2}) \\ = 528 - 20x - 4 = 524 - 20x \text{ (平方單位)}$$

Let's Go!

同步 評量

2

(D) 1. 下列選項何者正確？

(A) $-(x-2) = -x-2$

(B) $(3x-1) \times 4 = 12x-1$

(C) $-2(-3x+4) = 6x+8$

(D) $-3(2x-1) = -6x+3$

1. (A) $-(x-2) = -x+2$

(B) $(3x-1) \times 4 = 12x-4$

(C) $-2(-3x+4) = 6x-8$

(D) 2. 化簡 $\frac{1+x}{2} + \frac{2-x}{3} - \frac{x-2}{4} = ?$

(A) $\frac{-x+16}{9}$

(B) $\frac{-x+16}{12}$

(C) $\frac{-x+20}{9}$

(D) $\frac{-x+20}{12}$

2. 原式 $= \frac{6+6x}{12} + \frac{8-4x}{12} - \frac{3x-6}{12}$
 $= \frac{6+6x+8-4x-3x+6}{12} = \frac{-x+20}{12}$

(B) 3. 有一梯形，上底為 $(3a-1)$ 公分、下底為 $(5a-3)$ 公分、高為 8 公分，則此梯形的面積為多少平方公分？

(A) $16a-8$

(B) $32a-16$

(C) $16a-4$

(D) $32a-4$

3. 梯形面積 $= \frac{(\text{上底}+\text{下底}) \times \text{高}}{2}$
 $= \frac{[(3a-1)+(5a-3)] \times 8}{2} = 4 \times (8a-4) = 32a-16$

(A) 4. 如右圖，求矩形內斜線部分的三角形面積為何？

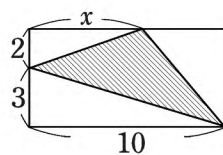
(A) $\frac{3}{2}x+10$

(B) $\frac{3}{2}x-85$

(C) $\frac{x}{2}+10$

(D) $\frac{x}{2}-85$

4. $10 \times (2+3) - \frac{2 \times x}{2} - \frac{3 \times 10}{2} - \frac{(10-x) \times 5}{2}$
 $= 50 - x - 15 - 25 + \frac{5}{2}x = 10 + \frac{3x}{2}$

(C) 5. 阿信與阿成兩人共有 5000 元，於八八水災募款時，阿信捐出所有錢的 $\frac{1}{2}$ ，阿成捐出所有錢的 $\frac{2}{3}$ ，若阿成有 x 元，則阿信與阿成共捐出多少元？

(A) $\frac{1}{6}x+5000$

(B) $5000 - \frac{1}{6}x$

(C) $\frac{1}{6}x+2500$

(D) $2500 - \frac{1}{6}x$

5. $\frac{2}{3}x + (5000-x) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + 2500 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x + 2500$



能力 三

一元一次方程式

一 一元一次方程式的標準式

若一數學式型如： $ax+b=0$ ，則稱為一元一次方程式。

二 標準式的解（根）

標準式 $ax+b=0$ 的條件	解的表示法	
當 $a \neq 0$	則 $x = -\frac{b}{a}$	恰有一解
當 $a=b=0$	則 $x =$ 任意數	無限多解
當 $a=0, b \neq 0$	則 $x =$ 無解	無解

三 等量公理（假設 $a=b$ ）

1. 等量加法： $a+c=b+c$

2. 等量減法： $a-c=b-c$

3. 等量乘法： $a \times c = b \times c$

4. 等量除法： $a \div c = b \div c, (c \neq 0)$

6 老師傳授

解一元一次方程式

學生寫作 6

1. 解方程式 $3(x-2) - 2(x+3) = -12$
2. 若方程式 $2x - 3 = x + 3$ 與 $x - a = 2 - ax$ 有相同的解，則 $a = ?$
3. $\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + x \right) \right] \right\} = 1$ ，求 $x = ?$

解

1. $3(x-2) - 2(x+3) = -12$
 $3x - 6 - 2x - 6 = -12$
 $x = -12 + 12 = 0$
2. $2x - 3 = x + 3$, $x = 6$ 代入 $x - a = 2 - ax$,
 $6 - a = 2 - 6a$, $a = -\frac{4}{5}$
3. 原式 $\Rightarrow \frac{1}{60} \left(\frac{1}{2} + x \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + x = 60$
 $\Rightarrow x = 59\frac{1}{2}$

1. 解方程式 $\frac{3}{2}x + 7 = \frac{2}{3}x + 12$
2. 若方程式 $4x - (21 - x) = 69$ 與 $5x + 3 = ax - 15$ 有相同解，求 $a = ?$
3. $2 \{ 4 [2 (3x + 1) - 1] + 5 \} - 2 = -32$ ，求 $x = ?$

解

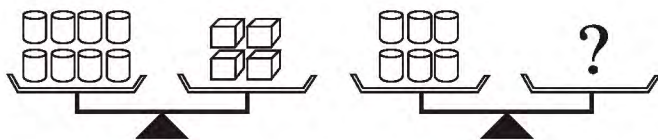
1. $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = 12 - 7$
 $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right)x = 5$, $\frac{5}{6}x = 5$, $x = 6$
2. $4x - 21 + x = 69$, $5x = 90$, $x = 18$
 代入 $5x + 3 = ax - 15$, $a = 6$
3. 原式 $\Rightarrow 2 \{ 24x + 4 + 5 \} - 2 = -32$
 $\Rightarrow 48x + 18 - 2 = -32$
 $\Rightarrow 48x = -32 - 16$
 $\Rightarrow x = -1$

7 老師傳授

能運用等量公理解題

學生寫作 7

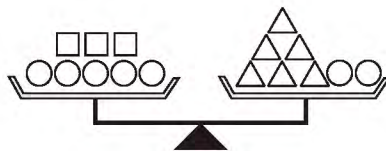
如圖，有正方體的積木與直圓柱積木數個，左邊天平是平衡狀態，如果右邊的天平也要呈現平衡，則右邊的秤盤應放置幾個正方體呢？



解

- 令 $\square = x$ 、 $\square = y$
 $8x = 4y \Rightarrow 2x = y$
 $\Rightarrow 3(2x) = 3y$
 故應放 \square 3 個

有三種積木 \square 、 \circ 、 \triangle 放置於天平兩側，已知同一種積木的質量相同，若下圖中的天平呈現平衡，試問 $\circ + \square$ 會和幾個 \triangle 等重？



解

- $5\circ + 3\square = 2\circ + 6\triangle$
 $3\circ + 3\square = 6\triangle$
 $\underline{\circ + \square = 2\triangle}$

Let's Go! 同步評量 3

- (B) 1. 方程式 $\frac{x-600}{3} = \frac{x-200}{4}$ ，求 $x = ?$
 (A) -1800 (B) 1800 (C) -3000 (D) 3000
- (B) 2. 方程式 $\frac{3}{4}x - m = \frac{3x-2}{5}$ ，若 $x = 4$ 時，則 $m = ?$
 (A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) 5

1. $\frac{x-600}{3} = \frac{x-200}{4}$
 $\Rightarrow 4x - 2400 = 3x - 600$, $x = 1800$

2. $\frac{3}{4}(4) - m = \frac{3(4)-2}{5}$, $m = 1$

(D) 3. 化簡 $\frac{x-1}{2} - \frac{-x+1}{4} + \frac{x+1}{8} = ax + b$, 則下列哪一個選項的值最小?

- (A) $a+b$ (B) $a-b$
(C) $a \times b$ (D) $a \div b$

$$3. \frac{4x-4+2x-2+x+1}{8} = \frac{7x-5}{8} = \frac{7}{8}x - \frac{5}{8}$$

$$a \div b = \frac{7}{8} \div \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{7}{8} \times \left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{7}{5} \text{ 最小}$$

(C) 4. 下列是解一元一次方程式 $6\left(\frac{1}{2}x+3\right)-1=11$ 的步驟, 請問下列哪一步驟開始錯誤?

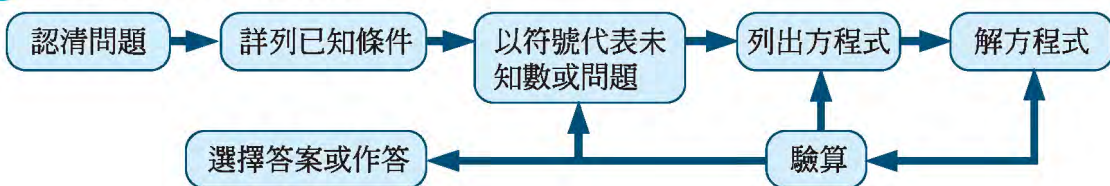
- (A) $6\left(\frac{1}{2}x+3\right)=12$ (B) $\frac{1}{2}x+3=12 \div 6$ (C) $2 \times \frac{1}{2}x+3=2 \times 2$ (D) $x=-2$
4.(C)應為 $2 \times \frac{1}{2}x + 3 \times 2 = 2 \times 2$

(D) 5. 有珍奶一杯重 x 公克, 其中珍珠(粉圓)占 40%, 若再加入珍珠 10 公克混合後, 則珍珠占 50%, 依題意可列出下列哪一個方程式?

- (A) $x \times 40\% = (x+10) \times 50\%$ (B) $x \times 40\% = x \times 50\% + 10$
(C) $x \times 40\% + 10 = x \times 50\% + 10$ (D) $x \times 40\% + 10 = (x+10) \times 50\%$

能力四 應用問題

一 應用問題的解法與步驟



老師傳授

一元一次方程式的應用 I

學生習作

1. 有一口井不知其深度, 若以繩子折成兩折測量, 多出 $2\frac{1}{2}$ 公尺, 若折成三折測量, 不夠 1 公尺, 請問: 繩子全長為多少公尺? 生活題

2. 一只公仔玩偶以定價七五折售出, 賠本 80 元; 以定價九折售出, 可賺 220 元, 若假設定價為 x 元, 則成本為多少元? 生活題

解

$$1. \text{ 設繩長為 } x \text{ 公尺} \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} \times 6 = \underline{21 \text{ (公尺)}}$$

$$2. \text{ 定價 } x \text{ 元, 七五折售出售價為 } 0.75x$$

$$\because \text{ 賠本 } 80 \text{ 元} \therefore \text{ 成本為 } (0.75x + 80) \text{ 元,}$$

$$\text{九折售出賺 } 220 \text{ 元, 成本為 } 0.9x - 220$$

$$\Rightarrow 0.75x + 80 = 0.9x - 220,$$

$$-0.15x = -300 \therefore x = 2000 \text{ (元)}$$

$$\text{成本為 } 0.75 \times 2000 + 80 = \underline{1580 \text{ (元)}}$$

1. 建銘用身上所有錢的 $\frac{1}{3}$ 買了 2 只價格相同的手錶, 再用剩下錢數的 $\frac{1}{2}$ 買了 3 枝萬寶龍筆, 結果剩下 200000 元, 則建銘所買的手錶, 每只多少錢? 生活題

2. 學生分配宿舍, 若 8 人住一間, 則空下一間房間, 若 6 人住一間, 則有 8 人沒有房間可住, 則學生共有多少人? 生活題

解

$$1. \text{ 設建銘身上有 } x \text{ 元,}$$

$$\text{則 } x - \left[\frac{1}{3}x + \left(\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{2}\right)\right] = 200000$$

$$\Rightarrow x = 600000, 600000 \times \frac{1}{3} = 200000$$

$$\Rightarrow \text{買 2 只手錶的錢,}$$

$$\text{則 1 只錶} = 200000 \div 2 = \underline{100000 \text{ (元)}}$$

$$2. \text{ 設房間有 } x \text{ 間, 依題意列式:}$$

$$8(x-1) = 6x + 8, 8x - 8 = 6x + 8,$$

$$\text{得 } x = 8,$$

$$\text{則學生人數為 } 8 \times (8-1) = \underline{56 \text{ (人)}}$$

9 老師傳授

一元一次方程式的應用 II

學生寫作 9

1. 一個二位數的十位數字與個位數字的和為 17，若將此數的十位數字與個位數字互調後所得的新數比原數小 9，求原數為何？
2. 已知小明與小華共有風之谷的點數 1350 點，若小明給小華 25 點後，則小明所有的點數恰好是小華所有點數的 $\frac{4}{5}$ 倍，試問小華原有多少點數？

解

1. 設原數之個位數字為 x ，十位數字為 $17-x$

$$\begin{cases} \text{原數} = 10(17-x) + x \\ \text{新數} = 10x + (17-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10x + (17-x) + 9 = 10(17-x) + x$$

$$\Rightarrow 18x = 144 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \text{原數} = 10(17-8) + 8 = 98$$
2. 設小明原有 x 點，小華原有 $1350-x$ 點
後來小明有 $x-25$ 點，小華有 $1350-x+25$ 點

$$x-25 = \frac{4}{5}(1350-x+25),$$

$$x-25 = 1100 - \frac{4}{5}x, \frac{9}{5}x = 1125$$

$$\Rightarrow x = 625, \text{小華} = 1350 - 625 = 725 \text{ (點)}$$

1. 臺北與嘉義兩地相距 280 公里，小熊開車從嘉義到臺北，他先以時速 60 公里前進了 $\frac{3}{7}$ 的路程，再以時速 80 公里完成剩下的路程，試問他開車的平均速度為何？ **生活題**
2. 某一個正整數與其本身相加、相減、相除所得的和、差、商，相加後為 2137，試問此正整數為何？

解

1.
$$\begin{cases} \frac{3}{7} \times 280 = 60t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \\ \frac{4}{7} \times 280 = 80t_2 \Rightarrow t_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{平均速度} = \frac{\text{距離}}{t_1 + t_2} = \frac{280}{2+2}$$

$$= 70 \text{ (公里/小時)}$$
2. 令此正整數為 a ，
$$a + a = 2a, a - a = 0, \frac{a}{a} = 1$$

$$\Rightarrow 2a + 0 + 1 = 2137, a = 1068$$

Let's Go! 同步評量 4

- (D) 1. 數學週考，一年級有 300 人，全一年級的平均分數為 55 分，及格者平均分數為 65 分，不及格者平均分數為 45 分，求及格者有多少人？
(A) 120 (B) 130 (C) 140 (D) 150
1. 設及格者有 x 人、不及格者有 $(300-x)$ 人

$$65x + 45(300-x) = 55 \times 300$$

$$65x + 13500 - 45x = 16500$$

$$20x = 3000, x = 150$$
- (C) 2. 當 x 值為多少時，才能使 $\frac{2x-1}{3}$ 的值比 $\frac{x+1}{6}$ 大 1 呢？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{6} = 1, 4x-2-x-1=6, 3x=9, x=3$
- (C) 3. 如果有 3 個連續的整數，它們的和比最大數的 2 倍多 20，則最小數為多少？
(A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 23
3. 設最小數為 x ，則 $x+(x+1)+(x+2)=2(x+2)+20$ ，

$$3x+3=2x+24, x=21$$
- (A) 4. 小明週末去看電影，拿了一張 30 元的折價卷和 200 元去買電影票，因小明是學生，故電影票打 8 折，最後售價員找了 30 元給小明，試問電影票定價為多少元？
(A) 250 (B) 260 (C) 280 (D) 300
4. 設電影票定價為 x 元

$$200 + 30 - 0.8x = 30, x = 250$$
- (B) 5. 一個二位數其數字和為 8，將十位數與個位數對調之後，所得的新數比原數大 18，則原數為何？
(A) 53 (B) 35 (C) 26 (D) 62
5. 設原數的個位數字為 x ，則十位數字為 $8-x$ ，

$$10(8-x) + x + 18 = 10x + 8 - x,$$

$$80 - 10x + x + 18 = 10x + 8 - x \Rightarrow x = 5, \text{故原數為 } 35$$

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

- ※(A) 1. 姊妹兩人相差 3 歲，若妹妹今年 a 歲，則姊姊今年幾歲？
 (A) $(a+3)$ (B) $(a-3)$ (C) $3a$ (D) $\frac{a}{3}$
 1. ∵ 姊姊比妹妹大 3 歲
 ∴ 姊姊今年 $(a+3)$ 歲
- ※(C) 2. 曉琪和小鼎都有 x 元，曉琪把所有錢的一半給小鼎，則小鼎就有多少元？
 (A) $2x$ (B) $\frac{1}{2}x$ (C) $\frac{3}{2}x$ (D) $\frac{5}{2}x$
 2. ∵ x 元的一半為 $\frac{1}{2}x$ 元，
 ∴ 小鼎有 $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ (元)
- ※(B) 3. 鋼筆一枝的價格是原子筆一枝價格的 15 倍，若原子筆一枝 x 元，則鋼筆一枝的價格是多少元？
 (A) $(x+15)$ (B) $15x$
 (C) $\frac{x}{15}$ (D) $(x-15)$
 3. 鋼筆的價格 = 原子筆的價格 $\times 15 = x \times 15 = 15x$ (元)
- ※(C) 4. 奇鼎公司有男生 x 人，若從惠菁 (女生) 眼中所見女生人數為男生人數的 8 倍，則該公司的總人數有多少人？
 (A) $8x+1$ (B) $9x-1$
 (C) $9x+1$ (D) $9x$
 4. $x + (8x+1) = 9x+1$
- (C) 5. 五個連續偶數的和比其最大數的 4 倍少 2，則其最小數為多少？
 (A) 14 (B) 12
 (C) 10 (D) 8
 5. 設五數中最小數為 x ，則最大數為 $x+8$ ，
 且 $x+x+2+x+4+x+6+x+8=4(x+8)-2$ ， $5x+20=4x+30$ ， $x=10$
- (D) 6. 化簡 $\frac{-4x+3}{3} - \frac{2-3x}{2} - 6$ 為下列何者？
 (A) $\frac{-17x-36}{6}$ (B) $\frac{-17x-6}{6}$
 (C) $\frac{x-6}{6}$ (D) $\frac{x-36}{6}$
 6. 原式 = $\frac{-8x+6-6+9x}{6} - 6 = \frac{x}{6} - 6 = \frac{x-36}{6}$
- (A) 7. 方程式 $0.95x + 1.1(800 - x) = 800 + 17$ ，求 $x = ?$
 (A) 420 (B) 240
 (C) 210 (D) 120
 7. 原式 $\Rightarrow 0.95x + 880 - 1.1x = 817$
 $\Rightarrow 0.15x = 63 \Rightarrow x = 420$
- ※(D) 8. 下列各選項的列式何者正確？
 (A) 四個連續偶數，最小數為 x ，則最大數為 $x+4$
 (B) 將一盒巧克力分給 x 個人，若每人分 5 個，則不足 4 個，所以這盒巧克力共有 $(5x+4)$ 個
 (C) 若 5 年前 x 歲的志中，他爸爸年齡為志中的 3 倍，則爸爸今年應為 $3x-5$ 歲
 (D) 大雄和 3 位同學逛書店，買鉛筆每人 x 元，買膠水共花了 45 元，則每人應平均分攤 $\frac{4x+45}{4}$
 8. (A) 最小數為 x ，最大數為 $x+6$
 (B) $(5x-4)$ 個
 (C) $(3x+5)$ 歲

- ※(D) 9. 便利商店以每組 x 元的成本價，買進招財公仔若干組，依照下列哪一種銷售方式，便利商店每賣一組公仔就可賺 $0.28x$ 元呢？
- (A) 成本加八成作定價，照定價打六折出售
 (B) 成本加六成作定價，照定價打六折出售
 (C) 成本加八成作定價，照定價打八折出售
 (D) 成本加六成作定價，照定價打八折出售

9.(D) $(1 + 0.6) \times 0.8x - x = 1.28x - x = 0.28x$

- (B) 10. 解一元一次方程式 $x + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}x - 3$ 的過程如下，在哪一個過程中開始發生錯誤呢？
- (A) $x - \frac{3}{2}x = -3 - \frac{2}{3}$ (B) $6x - 4x = -18 - 4$
 (C) $2x = -22$ (D) $x = -11$

10.(B) $6x - 9x = -18 - 4$

- (A) 11. 有一分數並不是最簡分數，分子與分母的和是 119，約成最簡分數為 $\frac{4}{13}$ ，則原分數為多少呢？

- (A) $\frac{28}{91}$ (B) $\frac{91}{28}$ (C) $\frac{11}{119}$ (D) $\frac{119}{11}$

11. 設此分數為 $\frac{4x}{13x}$ ，則 $4x + 13x = 119$ ，
 $17x = 119$ ， $x = 7 \Rightarrow$ 此分數為 $\frac{28}{91}$

- ※(C) 12. 仁鴻在考試時，考卷有一部份被同學撕破了，另一部分在印刷時被墨水弄髒而無法辨識題目，則下列何者正確？

- (A) 被撕破的數為 27
 (B) 被撕破的數為 22
 (C) 被污染的數為 -27
 (D) 被污染的數為 30

12. $\frac{x}{2} - 2 = 13$
 $\frac{x}{2} = 15$ ， $x = 30 \Rightarrow$ 被撕破的數
 被污染的數： $-30 + 3 = -27$

x	-5	
算式		
$\frac{x}{2} - 2$	$-\frac{9}{2}$	13
$-x + 3$	8	

- ※(C) 13. 父親生前有土地 800 坪，其遺囑交代要分給弟弟的土地為哥哥土地的 2 倍還多 50 坪，請問：哥哥有土地多少坪呢？
- (A) 150 (B) 200 (C) 250 (D) 300

13. 設哥哥有 x 坪，弟弟有 $2x + 50$ 坪，
 $x + (2x + 50) = 800$ ， $3x + 50 = 800$ ，
 $x = 250$ (坪)

- ※(D) 14. 距今四年前母親年齡的 2 倍為兒子年齡的 5 倍，距今四年後母親年齡為兒子年齡的 2 倍，若四年前母親 x 歲，則四年後兒子多少歲？
- (A) 16 (B) 20
 (C) 22 (D) 24

14. 母親四年前 x 歲，兒子為 $\frac{2}{5}x$ 歲， $x + 8 = 2(\frac{2}{5}x + 8)$ ，
 $\frac{x}{5} = 8$ ， $x = 40$ (歲)，四年後兒子 = $\frac{2}{5} \times 40 + 8 = 24$ (歲)

- #(D) 15. 奇鼎國中段考試卷有選擇題 25 題，答對一題得 4 分，答錯一題倒扣 1 分，不答不給分，若阿比僅做 20 題，得 60 分，則他答對多少題？
- (A) 23 (B) 21 (C) 18 (D) 16

15. 阿比一共做了 20 題，設答對 x 題，答錯 $20 - x$ 題，
 則由題目敘述可得 $4x + (-1) \times (20 - x) = 60$ ，
 $5x = 80$ ， $x = 16$ 。故阿比答對 16 題



- ※(B) 1. 有一丟銅板遊戲，其規則是丟出正面得 3 分，丟出反面得 2 分。小民參加此遊戲，共丟了 26 次，得 68 分，求小民共丟出幾次反面？
- (A) 6 (B) 10 (C) 13 (D) 20

1. 設小民共丟出 x 次的反面， $(26 - x)$ 次的正面
 依題意列式： $x \times 2 + (26 - x) \times 3 = 68$ ， $2x + 78 - 3x = 68$ ， $x = 10$

88 基測二

解題小幫手 第 15 題：僅做 20 題，其中有做對、也有做錯，才會得 60 分。

(B) 2. 解方程式 $x - 2 \div \frac{5}{6} = \frac{1}{30}$, 得 $x = ?$

- (A) $\frac{51}{25}$ (B) $\frac{73}{30}$ (C) $\frac{73}{36}$ (D) $\frac{60}{27}$

98 基測二

$$2. x - \frac{12}{5} = \frac{1}{30}, x = \frac{1}{30} + \frac{12}{5}, x = \frac{73}{30}$$

※(A) 3. 動物園的門票售價：成人票每張 50 元，兒童票每張 30 元。某日動物園售出門票 700 張，共得 29000 元。設兒童票售出 x 張，依題意可列出下列哪一個一元一次方程式？

- (A) $30x + 50(700 - x) = 29000$
 (B) $50x + 30(700 - x) = 29000$
 (C) $30x + 50(700 + x) = 29000$
 (D) $50x + 30(700 + x) = 29000$

3. 兒童票 x 張、成人票 $(700 - x)$ 張
 故可列式為 $30x + 50(700 - x) = 29000$

98 基測一

※(A) 4. 阿信帶 500 元去買每本 x 元的作業簿，買 $(x + 2)$ 本，並找回 17 元。依題意可列出下列哪一個方程式？

- (A) $x(x + 2) = 500 - 17$ (B) $x(x - 2) = 500 + 17$
 (C) $x(x + 2) = 500 + 17$ (D) $x(x - 2) = 500 - 17$

$$4. 500 - x(x + 2) = 17 \Rightarrow x(x + 2) = 500 - 17$$

97 基測二

#(B) 5. 甲、乙、丙三個袋子，各裝有相同數量的球。今從甲袋取出 3 球放入乙袋，再從乙袋取出 5 球放入丙袋，此時丙袋的球數為乙袋的 2 倍。求三袋中共裝多少球？

- (A) 15 (B) 27
 (C) 33 (D) 45

5. 已知甲 = 乙 = 丙 = x , 甲 - 3 = 乙 + 3
 $(乙 + 3) - 5 = 丙 + 5 \Rightarrow 2[(乙 + 3) - 5] = 丙 + 5 \Rightarrow 2乙 - 4 = 丙 + 5$
 $\Rightarrow 2x - 4 = x + 5, x = 9, 3x = 27$

97 基測二

(A) 6. 下列何者為一元一次方程式 $2x - \frac{9 - x}{3} = 11$ 的解？

- (A) $x = 6$ (B) $x = 14$
 (C) $x = \frac{20}{7}$ (D) $x = \frac{42}{5}$

$$6. 原式 \Rightarrow 6x - (9 - x) = 33 \\ \Rightarrow 6x - 9 + x = 33 \Rightarrow 7x = 42 \\ \Rightarrow x = 6$$

96 基測二

(D) 7. 解方程式 $(3x + 2) + 2[(x - 1) - (2x + 1)] = 6$, 得 $x = ?$

- (A) 2 (B) 4
 (C) 6 (D) 8

$$7. 原式 \Rightarrow 3x + 2 + 2[-x - 2] = 6, \\ 3x + 2 - 2x - 4 = 6, x = 8$$

96 基測一

※(D) 8. 已知甲、乙、丙三人各有一些錢，其中甲的錢是乙的 2 倍，乙比丙多 1 元，丙比甲少 11 元，求三人的錢共有多少元？

- (A) 30 (B) 33
 (C) 36 (D) 39

8. 設乙有 x 元，甲有 $2x$ 元，丙有 $(x - 1)$ 元，
 $(x - 1) - 2x = -11, -x - 1 = -11,$
 $x = 10$, 三人共有 $x + 2x + x - 1 = 4x - 1 = 39$ (元)

96 基測一



基測趨勢

(D) 1. 請化簡 $6 - \frac{3(x - 1)}{2} + \frac{2x - 3}{3} = ?$

- (A) $\frac{5x}{6} + 39$ (B) $-\frac{5}{6}x + 39$ (C) $\frac{5x + 39}{6}$

$$1. 原式 = \frac{36 - 9(x - 1) + 2(2x - 3)}{6} \\ = \frac{36 - 9x + 9 + 4x - 6}{6} = \frac{-5x + 39}{6}$$

(D) 2. 若 $(2\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4}) \times x \times \frac{1}{2} = 9\frac{2}{3}$, 求 $x = ?$

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$
 (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{8}{3}$

$$2. 原式 \Rightarrow (\frac{5}{2} + \frac{19}{4}) \times x \times \frac{1}{2} = \frac{29}{3} \\ \Rightarrow \frac{29}{4}x = \frac{29 \times 2}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

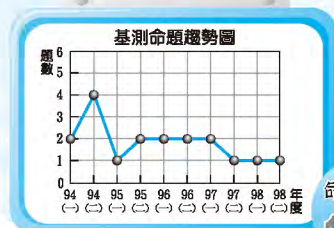
- (B) 3. 一角之補角為其餘角的3倍，則此角為幾度？
 (A) 35° (B) 45°
 (C) 55° (D) 65°
3. 設此角為 x° ，
 $180^\circ - x^\circ = 3(90^\circ - x^\circ)$ ， $x = 45$
- ※(C) 4. 設一線段 $\overline{AB} = a$ ，另有一藤條的長度為 x 公分，若將藤條4折後與 \overline{AB} 比較，則比 \overline{AB} 短1公分，若將藤條3折後與 \overline{AB} 比較，則比 \overline{AB} 長 $\frac{1}{2}$ 公分，則依題意可列出下列哪一個一元一次方程式？
 (A) $4x - a - 1 = 3x - a + \frac{1}{2}$ (B) $4x + 1 = 3x - \frac{1}{2}$
 (C) $\frac{x}{4} + 1 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$ (D) $\frac{x}{4} - 1 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$
4. $\begin{cases} \frac{x}{4} = a - 1 \\ \frac{x}{3} = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{4} + 1 \\ a = \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \end{cases}$
 故 $\frac{x}{4} + 1 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$
- ※(C) 5. 設父親現年是子年的5倍，6年後父年為子年的3倍，請問：父親現年幾歲呢？
 (A) 28 (B) 29
 (C) 30 (D) 31
5. 設子現年 x 歲，父現年 $5x$ 歲，
 $5x + 6 = 3(x + 6)$ ， $x = 6$ $\therefore 5x = 30$ (歲)
- ※(B) 6. 奇鼎國中數學學期成績的算法為：平時成績占40%，期中考成績占30%，期末考成績占30%，如果小嵐的平時成績是85分，期中考成績為50分，請問：小嵐期末考成績要多少分才能使其學期成績為70分呢？
 (A) 65 (B) 70
 (C) 76 (D) 80
6. 設小嵐期末考成績為 x 分，
 $85 \times 40\% + 50 \times 30\% + x \times 30\% = 70$ ， $x = 70$
- #(A) 7. 若方程式 $(a + 3)x + 2a - b + 7 = 0$ 為無解，請問：下列何者正確呢？
 (A) $a = -3$ (B) $a = -2$
 (C) $a = -1$ (D) $a = 0$
7. $\because (a + 3)x + 2a - b + 7 = 0$ 無解，
 $\therefore a + 3 = 0$ ， $a = -3$ ， $2a - b + 7 \neq 0$ ， $2(-3) - b + 7 \neq 0$ ，
 $-6 - b + 7 \neq 0$ ， $b \neq 1$ (其他數皆可)
- ※(B) 8. 一雙成本 x 元的皮鞋，照成本加四成作為定價，再依定價七五折售出，若想賺100元，則每雙定價應為多少元？
 (A) 3200 (B) 2800
 (C) 2400 (D) 2200
8. $x \times (1 + 40\%) \times \frac{75}{100} - x = 100$ ，
 $x \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{4} - x = 100$ ， $\frac{21}{20}x - x = 100$ ，
 $\therefore x = 2000$ ，故定價 = $2000 \times 1.4 = 2800$ (元)
- ※(B) 9. 小奇與小鼎在操場跑步，小奇30秒跑完一圈，若小奇與小鼎兩人同時同地依相反方向起跑，經過12秒相遇，則小鼎跑完一圈的所需秒數為何？
 (A) 18 (B) 20
 (C) 22 (D) 24
9. 設小鼎跑完一圈操場的時間為 x ，
 $\Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{60} - \frac{1}{20} \Rightarrow x = 20$
- #(D) 10. 洋基隊在已經比賽過的60場賽事中，贏了50%。試問該隊應該繼續連贏幾場，以便使它的成績變為贏60%？
 (A) 12 (B) 13
 (C) 14 (D) 15
10. 目前共勝 $60 \times 50\% = 30$ (場)，設需再勝 n 場，
 $\frac{30 + n}{60 + n} = 60\%$ $\therefore n = 15$ (場)

解題小幫手 第7題：一元一次方程式 $ax + b = 0$ 為無解時， $a = 0$ 、 $b \neq 0$ 。

第10題： $60\% = \frac{\text{已勝場次} + \text{未勝場次}}{\text{已賽場次} + \text{未賽場次}}$

第5單元

二元一次聯立方程式



命題率
100%

能力 — 二元一次方程式的列式

一 二元一次方程式

當 a 、 b 、 c 為已知數，且 $ab \neq 0$ ，則 $ax + by + c = 0$ ，亦即當一個等式含有兩個未知數（變數），而且他們的次數皆為一次，稱為二元一次方程式。

二 二元一次方程式的解

1. 一個二元一次方程式 $ax + by + c = 0$ 有無限多組解。

2. 若限制 x 、 y 的範圍，則解有三種的可能性

- 無限多組解
- 有限多組解
- 無解

若二元一次方程式 $x + 2y = 8$ ，當 x 、 y 有下列情形時，其解的情況：

(1) 若 $y > 3$ ，則為無限多組解。

(2) 若 x 、 y 皆為正整數，則僅有三組解： $(6, 1)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(4, 2)$ 。

(3) 若 x 、 y 皆為正整數，且 $y > 3$ ，則為無解。

三 二元一次方程式的圖形

1. 二元一次方程式又名為線性方程式，其圖形在平面坐標上為一直線。

2. 二元一次方程式的每一組解，即為直線圖形上的一個點。

老師傳授

方程式的列式

學生寫作

1. 1年28班共有29人，其中男生有 x 人，女生有 y 人；某次月考的數學成績，男生平均70分，女生平均65分，請列出全班平均分數的二元一次式。

生活題

解

$$1. \text{平均分數} = \frac{\text{總分}}{\text{總人數}} = \frac{70x + 65y}{29} \text{ (分)}$$

1. 嘉昌和幼軍到合作社購買同樣的優酪乳和麵包，嘉昌買3罐優酪乳及3個麵包，付款27元，幼軍買5罐優酪乳和2個麵包，付款30元。若優酪乳每罐 x 元，麵包每個 y 元，請列出二元一次聯立方程式。

生活題

解

$$1. \begin{cases} 3x + 3y = 27 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases}$$

2. 已知華氏度數 = $\frac{9}{5}$ × 攝氏度數 + 32，則當攝氏 x 度時，華氏是 y 度，且華氏度數比攝氏度數多 28 度，請列出二元一次聯立方程式。

生活題

解

$$2. \begin{cases} y = \frac{9}{5}x + 32 \\ y = x + 28 \end{cases}$$

2. 容韓有錢若干元，先用去一部分，剩餘的錢為用去的 3 倍，後來又用去 20 元，所剩餘的錢為原有的 $\frac{1}{2}$ 倍。假設容韓原有 x 元，先用去 y 元，請列出二元一次聯立方程式。

生活題

解

$$2. \begin{cases} x - y = 3y \\ x - y - 20 = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

2 老師傳授

二元一次式的化簡

學生實作 2

請化簡下列各式：

- (1) $4(-x + y) - 2(2x - y) = ?$
- (2) $7(3x + 2y) - 3(7x + y) = ?$
- (3) $\frac{3}{12}(2x - 3y - 4) - \frac{2}{45}(5x - y - 18) = ?$

解

- (1) 原式 = $-4x + 4y - 4x + 2y = -8x + 6y$
- (2) 原式 = $21x + 14y - 21x - 3y = 11y$
- (3) 原式 = $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 1 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{45}y + \frac{4}{5}$
 $= \frac{5}{18}x - \frac{127}{180}y - \frac{1}{5}$

請化簡下列各式：

- (1) $5(x - 2y + 3) - 3(x - 3y) = ?$
- (2) $3(\frac{4}{9}x - \frac{5}{18}y - 4) - 0.4(x - 3y + 1) = ?$
- (3) $0.2(3x + 2y - 14) - 0.6(x - 2y + 8) = ?$

解

- (1) 原式 = $5x - 10y + 15 - 3x + 9y$
 $= 2x - y + 15$
- (2) 原式 = $\frac{4}{3}x - \frac{5}{6}y - 12 - \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{2}{5}$
 $= \frac{14}{15}x + \frac{11}{30}y - \frac{62}{5}$
- (3) 原式 = $0.6x + 0.4y - 2.8 - 0.6x + 1.2y - 4.8$
 $= 1.6y - 7.6$

Let's Go! 同步評量 1

- (D) 1. 化簡二元一次式 $\frac{2x-1}{6} - \frac{5y-7}{2}$ ，下列何者為最適當之答案？
 (A) $\frac{2x-30y+41}{6}$ (B) $\frac{2x-15y-22}{6}$ (C) $\frac{2x+30y+20}{6}$ (D) $\frac{2x-15y+20}{6}$
- (A) 2. 成凱和他的父母、一個弟弟、一個妹妹到你家牛排餐廳吃牛排；大人每人 x 元，小孩每人 y 元，除了父母外，其他都是小孩，另外餐廳又加收 10% 的服務費；則這一餐成凱全家共花了多少錢呢？
 (A) $(2x + 3y) \times 1.1$ (B) $(3x + 2y) \times 1.1$ (C) $(2x + 3y) \times 0.1$ (D) $(3x + 2y) \times 0.1$
- (B) 3. 已知 2GB 與 1GB 的 MP3 隨身碟每個的價格比為 4 : 3，今天花了 1200 元買回四個 2GB 及三個 1GB 的 MP3 隨身碟，若 2GB 每個 x 元，而 1GB 每個 y 元，則下列哪一組聯立方程式符合題意？
 (A) $\begin{cases} 4x = 3y \\ 4x + 3y = 1200 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x = 4y \\ 4x + 3y = 1200 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ x + y = 1200 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 4y + 3x = 1200 \end{cases}$

(D) 4. 甲原有 x 元，乙原有 y 元，若甲、乙兩人各自將原有錢數的 $\frac{1}{4}$ 交換，則甲的錢數就為乙錢數的 2 倍。依題意可列出二元一次方程式為何？

- (A) $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)$ (B) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y\right)$
 (C) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y = 2\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y\right)$ (D) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y = 2\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right)$

(C) 5. 有一個二位數的十位數字為 x 、個位數字為 y ，若把數字 9 放在原二位數的最右邊，形成一個三位數，則此數與原二位數相差多少？

- (A) $10x + y + 9$ (B) $100x + 10y + 9$ 5. $100x + 10y + 9 - (10x + y) = 90x + 9y + 9$
 (C) $90x + 9y + 9$ (D) $99x + 9y + 9$

能力二 代入消去法與加減消去法

一 二元一次聯立方程式

若有兩個並列在一起的二元一次方程式，稱為二元一次聯立方程式或二元一次聯立方程組。

其標準式如右所示：
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

二 代入消去法求解

由任一方程式中化簡出 $y = ax + b$ 或 $x = ay + b$ 的形式，再代入另一式消去 y 或 x ，即可解出 x 或 y 。

例 1：
$$\begin{cases} x - y = 2 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$
，由 $\textcircled{1}$ 得 $y = x - 2$ 將其代入 $\textcircled{2}$ 得 $2x + (x - 2) = 1$
 $\Rightarrow x = 1; y = -1$

三 加減消去法求解

將兩個方程式乘以適當的倍數之後，再相加或相減，消去某一未知數，即可解出另一未知數。

例 2：
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x - 2y = 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$
， $\textcircled{1} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 2 \cdots \textcircled{3} \\ x - 2y = 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ $\textcircled{3} + \textcircled{2} \Rightarrow 7x = 7$
 $\Rightarrow x = 1$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $y = -2$

四 二元一次聯立方程式解的判別法

聯立方程式	判別法	解的種類	直線關係
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	(1) 若 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	有唯一解	兩相異直線交於一點
	(2) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	有無限多解組	兩相異直線重合
	(3) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	無解	兩相異直線平行

五 特殊型的聯立方程式求解方法

若方程式以 A 、 B 、 C 表示，則有下列情形時的處理方式：

$A = B = C$ 型	$\begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A = C \\ A = B \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases}$
$ A + B = 0$ 或 $A^2 + B^2 = 0$ 型	$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
係數較大且成對型	$\begin{cases} 63x + 37y = 263 \cdots \textcircled{1} \\ 37x + 63y = 237 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ \Rightarrow 可先將 $\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 100x + 100y = 500$ $\Rightarrow x + y = 5, x = 5 - y \Rightarrow$ 再代入 $\textcircled{1}$ 或 $\textcircled{2} \Rightarrow$ 求解

3

老師

傳授

代入消去法

學生

習作

3

利用代入消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

解

$$(1) \begin{cases} 3x - y = 6 \cdots \textcircled{1} \\ y = -2x + 4 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將} \textcircled{2} \text{式代入} \textcircled{1} \text{式}$$

$$\Rightarrow 3x - (-2x + 4) = 6, 3x + 2x - 4 = 6,$$

$$5x = 10, x = 2 \text{ 代入} \textcircled{1},$$

$$3 \times 2 - y = 6, y = 0 \Rightarrow \underline{x = 2, y = 0}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{6} \cdots \textcircled{1} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將} \textcircled{2} \text{式代入} \textcircled{1} \text{式}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ 代入} \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}, y = 0}$$

利用代入消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 3x - 2y = 32 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = 1 \\ 2x - y + \frac{1}{7} = 0 \end{cases}$$

解

$$(1) \begin{cases} x = 5y + 2 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 2y = 32 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將} \textcircled{1} \text{式代入} \textcircled{2} \text{式}$$

$$\Rightarrow 3(5y + 2) - 2y = 32,$$

$$15y + 6 - 2y = 32, 13y = 26,$$

$$y = 2 \text{ 代入} \textcircled{1} \text{式}, x = 5 \times 2 + 2 = 12$$

$$\Rightarrow \underline{x = 12, y = 2}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y + \frac{1}{7} = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \text{將} \textcircled{2} \text{式代入} \textcircled{1} \text{式}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + 7(2x + \frac{1}{7}) = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + 14x = 0,$$

$$x = 0, \text{ 代入} \textcircled{1} \text{式} \Rightarrow y = \frac{1}{7} \Rightarrow \underline{x = 0, y = \frac{1}{7}}$$

解題小偏方

老師 3-2 與學生 3-2：先別急著將分母的數用同乘某數的方法去掉，可用帶入消去法計算。

4

老師傳授

加減消去法

學生習作

4

利用加減消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 5x + 7y = 29 \\ 8x - 7y = 10 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 13x + 31y = 8 \\ 31x + 13y = 80 \end{cases}$$

解

$$(1) \begin{cases} 5x + 7y = 29 \dots ① \\ 8x - 7y = 10 \dots ② \end{cases} \Rightarrow ① + ② \\ \Rightarrow 13x = 39, x = 3, \text{代入} ② \\ 8 \times 3 - 7y = 10, y = 2 \Rightarrow \underline{x = 3, y = 2}$$

$$(2) \begin{cases} 13x + 31y = 8 \dots ① \\ 31x + 13y = 80 \dots ② \end{cases} \\ ① + ② \text{得 } 44x + 44y = 88 \Rightarrow x + y = 2 \dots ③ \\ ① - ② \text{得 } -18x + 18y = -72 \\ \Rightarrow -x + y = -4 \dots ④ \\ ③ + ④ \text{得 } 2y = -2 \Rightarrow y = -1 \text{ 代入 } ③ \text{得 } x = 3 \\ \Rightarrow \underline{x = 3, y = -1}$$

利用加減消去法，解下列二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -4x + 5y = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{1}{9}x - 9y = -78 \\ 9x - \frac{1}{9}y = 242 \end{cases}$$

解

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \dots ① \\ -4x + 5y = 7 \dots ② \end{cases} \Rightarrow ① + ② \Rightarrow y = 1, \\ \text{代入} ① \text{得 } 4x + 3 = 1, x = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}, y = 1}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{9}x - 9y = -78 \dots ① \\ 9x - \frac{1}{9}y = 242 \dots ② \end{cases} \\ ① + ② \text{得 } \frac{82}{9}x - \frac{82}{9}y = 164 \Rightarrow x - y = 18 \dots ③ \\ ② - ① \text{得 } \frac{80}{9}x + \frac{80}{9}y = 320 \Rightarrow x + y = 36 \dots ④ \\ ③ + ④ \text{得 } 2x = 54, x = 27 \\ ④ - ③ \text{得 } 2y = 18, y = 9 \Rightarrow \underline{x = 27, y = 9}$$

5

老師傳授

特殊型的求解

學生習作

5

1. 若 $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} ax + by = 9 \\ 2ax - by = 0 \end{cases}$ 有相同的解，則 $a + b = ?$

解

$$1. \begin{cases} x - 2y = -5 \dots ① \\ 2x - y = -1 \dots ② \end{cases} \Rightarrow ② \text{代入} ① \text{得} \\ x - 2(2x + 1) = -5 \Rightarrow -3x = -3 \\ \Rightarrow x = 1, \text{代入} ② \text{得 } 2 - y = -1, y = 3, \\ \text{將 } x = 1 \text{ 與 } y = 3 \text{ 代入下式,} \\ \begin{cases} ax + by = 9 \\ 2ax - by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 9 \dots ③ \\ 2a - 3b = 0 \dots ④ \end{cases} \\ \Rightarrow ③ + ④ \Rightarrow 3a = 9, a = 3, \\ \text{代入} ③ \text{得 } 3 + 3b = 9, b = 2 \\ \Rightarrow \underline{a + b = 3 + 2 = 5}$$

1. 解方程組 $\frac{x+1}{20} = \frac{x+y}{17} = \frac{y+1}{21}$ 的 $x, y = ?$

解

$$1. \frac{x+1}{20} = \frac{x+y}{17} \Rightarrow 17x + 17 = 20x + 20y \\ \Rightarrow 3x + 20y = 17 \dots ① \\ \frac{x+y}{17} = \frac{y+1}{21} \Rightarrow 21x + 21y = 17y + 17 \\ \Rightarrow 21x + 4y = 17 \dots ② \\ ② \times 5 - ① \text{得 } 102x = 68, x = \frac{2}{3} \text{ 代入 } ① \\ \Rightarrow 3 \times \frac{2}{3} + 20y = 17, y = \frac{3}{4}$$

解題小偏方 學生 5: $\frac{x+1}{20} = \frac{x+y}{17} = \frac{y+1}{21} \Rightarrow$ 兩兩一組交叉相乘後拆開，再形成聯立方程式。

2. 若 $(2x - 5y + 2)^2 + |6x + 3y - 3| = 0$ ，
試求 $4x + 2y = ?$

解

$$2. (2x - 5y + 2)^2 + |6x + 3y - 3| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 2 = 0 \\ 6x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -2 \dots \textcircled{1} \\ 6x + 3y = 3 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 3 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 15y = -6 \dots \textcircled{3} \\ 6x + 3y = 3 \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \textcircled{2} - \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow 18y = 9, y = \frac{1}{2} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } x = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 4x + 2y = 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \underline{2}$$

2. 若 $|3x - 4y + 14| + (-2x - 3y + 2)^2 = 0$ ，
試求 $y - x = ?$

解

$$2. \therefore |3x - 4y + 14| + (-2x - 3y + 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 14 = 0 \\ -2x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -14 \dots \textcircled{1} \\ -2x - 3y = -2 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \times 3$$

$$\Rightarrow -17y = -34, y = 2 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } x = -2$$

$$\therefore y - x = 2 - (-2) = \underline{4}$$



同步評量 2

(B) 1. 何者為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ 的解?

- (A) $x = 1, y = 1$ (B) $x = 1, y = -1$ 1. $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \dots \textcircled{1} \\ 3x + 2y = 1 \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 9 \dots \textcircled{1} \\ 6x + 4y = 2 \dots \textcircled{3} \end{cases}$
 (C) $x = -1, y = 1$ (D) $x = -1, y = -1$ $\textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow 11x = 11, x = 1, \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } y = -1$

(C) 2. 兩組聯立方程式 $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ ax - 2by = 2 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3ax + by = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ 有相同的解，求 $a, b = ?$

- (A) $a = 2, b = 0$ 2. $\begin{cases} 3x - y = -2 \dots \textcircled{1} \\ x - 3y = 2 \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{2} \times 3 \Rightarrow 3x - 9y = 6 \dots \textcircled{3} \\ \textcircled{1} - \textcircled{3} \Rightarrow 8y = -8, y = -1 \dots \text{代入 } \textcircled{2} \end{cases}$
 (B) $a = 0, b = 2$ 得 $x = 2 - 3 = -1$
 (C) $a = -2, b = 0$ $\begin{cases} -a + 2b = 2 \dots \textcircled{1} \\ -3a - b = 6 \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow -6a - 2b = 12 \dots \textcircled{3} \\ \textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow -7a = 14, a = -2 \dots \text{代入 } \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow 6 - b = 6, b = 0$
 (D) $a = 0, b = -2$

(B) 3. 解聯立方程式 $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 3(2x - y + 2) \\ 2(4x + 2y + 3) = 7x + y + 9 \end{cases}$ ，則 $3x - 2y$ 之值為何?

- (A) -21 (B) -13 3. $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 3(2x - y + 2) \\ 2(4x + 2y + 3) = 7x + y + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - y = 7 \dots \textcircled{1} \\ x + 3y = 3 \dots \textcircled{2} \end{cases}$
 (C) 0 (D) 13 $\Rightarrow \textcircled{2} \times 3 \Rightarrow \begin{cases} -3x - y = 7 \dots \textcircled{1} \\ 3x + 9y = 9 \dots \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow 8y = 16, y = 2 \text{ 代入 } \textcircled{2}$

(D) 4. 設 x, y 的聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = 5 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ 的解為 $x = 4, y = 1$ ，則 $|a - b|$ 為何?

- (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ 4. $\begin{cases} ax + by = 5 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \dots \textcircled{1} \\ a + 4b = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 5a + 5b = 5 \Rightarrow a + b = 1, \text{ 同乘以 } 4$
 (C) $-\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ $\Rightarrow 4a + 4b = 4 \dots \textcircled{3}, \textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ 得 } 3b = -1, b = -\frac{1}{3} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } 4a - \frac{1}{3} = 5, a = \frac{4}{3},$
 $|a - b| = \left| \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right| = \frac{5}{3}$

(B) 5. 若 $(x + 3y + 3)^2 + (x + 7y + 11)^2 = 0$ ，則 x, y 之值為下列哪一個選項?

- (A) $x = -3, y = 2$ (B) $x = 3, y = -2$ 5. $(x + 3y + 3)^2 + (x + 7y + 11)^2 = 0$
 (C) $x = 2, y = -3$ (D) $x = -2, y = -3$ $\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x + 7y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -3 \dots \textcircled{1} \\ x + 7y = -11 \dots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 4y = -8, y = -2, \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } x = 3$

(C) 6. 解聯立方程式 $\begin{cases} \frac{1}{7}x - 7y = -46 \\ 7x - \frac{1}{7}y = 146 \end{cases}$ ，求 $x + y = ?$

- (A) 14 (B) 21 6. $\begin{cases} \frac{1}{7}x - 7y = -46 \dots \textcircled{1} \\ 7x - \frac{1}{7}y = 146 \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{50}{7}x - \frac{50}{7}y = 100, x - y = 14 \dots \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } \frac{48}{7}x + \frac{48}{7}y = 192, x + y = 28 \dots \textcircled{4} \end{cases}$
 (C) 28 (D) 42 $\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 得 } 2x = 42, x = 21, y = 7, x + y = 28$



二元一次聯立方程式的應用

一 解應用問題的流程

看清楚題意，設
 x 、 y 為未知數

找出條件式，列出
二元一次方程式

解方程式

驗算、作答

二 各種應用問題的型態

1. 賺賠問題

(1) 售價 = 定價 \times 折扣 (2) 賺(賠) = 售價 - 成本 = 利潤

(3) 賺率 = (利潤 \div 成本) \times 100 %

2. 速度問題

(1) 距離 = 速度 \times 時間 ($s = v \times t$)

(2)

單位	距離 (s)	速度 (v)	時間 (t)
	公里 (km)	公里/小時 (km/hr)	小時 (hr)
	公尺 (m)	公尺/分 (m/min)	分鐘 (min)
	公尺 (m)	公尺/秒 (m/s)	秒 (s)

(3) 平均速度 = 總路程 \div 總時間

3. 水流問題

(1) 順流速度 = 船速 + 水速

(2) 逆流速度 = 船速 - 水速

4. 濃度問題

濃度 = $\frac{\text{溶質}}{\text{溶液}} \times 100\%$

ps. 溶液 = 溶質 + 溶劑

6

老師 傳授

算人數的應用問題

學生 實作

6

奇鼎國中 3 年 5 班男女學生共有 50 人，在上次段考中，全班的平均分數是 80 分；男生的平均分數是 75 分，女生的平均分數是 85 分，求男生有多少人？女生有多少人？ 生活題

解

設男生有 x 人，女生有 y 人，

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 75x + 85y = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 15x + 17y = 800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 25, y = 25$$

男生有 25 人，女生有 25 人

奇鼎國中 2 年 18 班有男女生各若干人，從其中一個男生眼中所見，男生人數比女生人數的 2 倍多 6 人；從其中一個女生眼中所見，男生人數是女生人數的 3 倍；請問：全班共有多少人？ 生活題

解

設男生 x 人，女生 y 人，由題意可設聯立方程組為

$$\begin{cases} x - 1 = 2y + 6 \\ x = 3(y - 1) \end{cases} \Rightarrow x = 27, y = 10$$

$$27 + 10 = 37 \text{ (人)}$$

7 老師傳授

速度的應用問題

學生寫作

小鼎和小奇一起參加路跑，若總路程 10 公里，小奇的速度是小鼎的 2 倍，且小奇比小鼎早 30 分鐘回到終點，試問小奇和小鼎的時速各為幾公里？

生活題

解

設小奇時速 x (km/hr)，小鼎時速 y (km/hr)，

$$\text{根據速度公式 } t = \frac{s}{v}, \begin{cases} x = 2y \\ \frac{10}{y} - \frac{10}{x} = 0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 20, y = 10$$

小奇時速 20 km/hr，小鼎時速 10 km/hr

已知基隆河長度 20 公里，救生艇順流而下需 2 小時，逆流而上需 5 小時，試問水速和船速為幾公里？

生活題

解

設船速為 x (km/hr)，水速為 y (km/hr)，

$$\text{根據速度公式 } s = v \times t, \begin{cases} (x + y) \times 2 = 20 \\ (x - y) \times 5 = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 3$$

船速 7 km/hr，水速 3 km/hr

8 老師傳授

分配的應用問題

學生寫作

小奇班上有 40 位同學，他想在生日時請客，因此到你家便利商店花了 175 元買果凍和巧克力共 40 個。若果凍每 2 個 15 元，巧克力每 3 個 10 元，則他共買了多少個果凍？

生活題

解

設小奇買 x 個果凍、 y 個巧克力，則

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \frac{15}{2}x + \frac{10}{3}y = 175 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 40 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 9x + 4y = 210 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 4 \text{ 得 } 4x + 4y = 160 \cdots \cdots \textcircled{3}, \textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ 得 } 5x = 50$$

$\therefore x = 10$ ，共買了 10 個果凍

史努比買了一大瓶保特瓶裝的可口可樂請查理布朗喝，已知未開前的重量為 1850 公克，打開之後喝掉 $\frac{1}{3}$ 時，再測量只剩 1250 公克，請問：可口可樂不含瓶子共重多少公克呢？

生活題

解

設保特瓶重 x 公克，可樂重 y 公克，

$$\text{則依題意列聯立方程式 } \begin{cases} x + y = 1850 \\ x + \frac{2}{3}y = 1250 \end{cases}$$

利用加減消去法解得 $x = 50, y = 1800$

\therefore 可樂重 1800 公克

9 老師傳授

濃度問題

學生寫作

將濃度 5% 的咖啡 x 公克與濃度 8% 的紅茶 y 公克，混合成濃度 6.8% 的咖啡紅茶 1000 公克，則 x 、 y 分別為多少？

生活題

解

$$\begin{cases} x + y = 1000 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 0.05x + 0.08y = 1000 \times 0.068 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 5000 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 5x + 8y = 6800 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3} \text{ 得 } 3y = 1800, y = 600, x = 400$$

$$\therefore 5\% \text{ 的咖啡 } 400 \text{ 公克, } 8\% \text{ 的紅茶 } 600 \text{ 公克}$$

\therefore 5% 的咖啡 400 公克，8% 的紅茶 600 公克

老師說「我的咖啡要加 21% 的奶精 60 公克。」，桌上有 10% 及 30% 的奶精兩種，試問你必須各取多少公克才能混合成老師所要的奶精呢？

生活題

解

設取 10% 的奶精 x 公克，30% 的奶精 y 公克

$$\begin{cases} x + y = 60 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 0.1x + 0.3y = 0.21 \times 60 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ 整理後得 } x + 3y = 126 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ 得 } 2y = 66, y = 33 \text{ 代入 } \textcircled{1}, x = 27$$

\therefore 10% 的奶精 27 公克，30% 的奶精 33 公克



(D) 1. 有一個相框周長為 34 公分，且長比寬的 2 倍多 2 公分，求此相框的面積為多少平方公分？

- (A) 54 (B) 56
(C) 58 (D) 60

1. 設寬為 x 公分，長為 y 公分，

$$\begin{cases} 2(x+y) = 34 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 17 \\ 2x-y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 5, y = 12, \text{面積} = x \times y = 60$$

(B) 2. 阿嬤給安安 1800 元的壓歲錢，剛好可以買 4 臺小汽車及 3 組樂高，但安安卻買 3 臺小汽車及 4 組樂高及 100 元的玩偶，請問：小汽車一臺多少元？

- (A) 400 (B) 300
(C) 250 (D) 200

2. 設小汽車一臺 x 元，樂高一組 y 元

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1800 \cdots \text{①} \\ 3x + 4y + 100 = 1800 \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{①} - \text{②} \text{得 } x - y = 100 \text{ 代入 ① 得 } x = 300, \text{小汽車一臺 } 300 \text{ 元}$$

(A) 3. 有一個二位數，十位數字的 2 倍與個位數字的和是 15，它的個位數字與十位數字對調後所得的新數比原數大 27，則原二位數為多少？

- (A) 47 (B) 57
(C) 63 (D) 74

3. 設十位數字是 x ，個位數字是 y ，
 則
$$\begin{cases} 2x + y = 15 \\ 10y + x = (10x + y) + 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 15 \\ x - y = -3 \end{cases}$$
 解得 $x = 4, y = 7, \therefore$ 原二位數為 47

(A) 4. 小平與小安各有零用錢若干元，若小平給小安 80 元後，則小平的錢恰好是小安的 3 倍；若小安給小平 40 元後，則小平的錢恰好是小安的 9 倍，請問：小平與小安的零用錢共多少元？

- (A) 800 (B) 700
(C) 600 (D) 500

4. 設小平原有 x 元，小安原有 y 元

$$\begin{cases} x - 80 = 3(y + 80) \cdots \text{①} \\ x + 40 = 9(y - 40) \cdots \text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 320 \\ x - 9y = -400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 680 \\ y = 120 \end{cases} \Rightarrow x + y = 800$$

(C) 5. 設 A 、 B 、 C 、 D 是數線上由左而右相異四點，它們的坐標依次為 x 、 -3 、 y 、 5 ，如果 \overline{AB} 比 \overline{CD} 的 2 倍少 1， \overline{AC} 比 \overline{BD} 多 2，則下列何者正確？

- (A) $\overline{AB} = 11$ (B) $x + y = 6$
(C) $\overline{CD} = 3$ (D) $\overline{AC} = 6$

5. $\overline{AB} = -3 - x, \overline{CD} = 5 - y, \overline{AC} = y - x, \overline{BD} = 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 - x = 2(5 - y) - 1 \\ y - x = 8 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -12 \\ x - y = -10 \end{cases}$$
 解得 $x = -8, y = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 5, \overline{CD} = 3, \overline{AC} = 10$

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#



(B) 1. 若聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 6y = 11 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$ ；則 $a + 3b = ?$

- (A) -4 (B) 4
(C) 3 (D) 5

1.
$$\begin{cases} 3x + 6y = 11 \cdots \text{①} \\ 4x - 3y = 11 \cdots \text{②} \end{cases} \Rightarrow \text{②} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 11 \cdots \text{①} \\ 8x - 6y = 22 \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{①} + \text{③} \Rightarrow 11x = 33, x = 3,$$

$$y = \frac{1}{3} \Rightarrow a + 3b = 4$$

(C) 2. 聯立方程式 $\begin{cases} 0.3x = 0.2y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \end{cases}$ 的解以數對 (x, y) 表示為何？

- (A) (4, 3) (B) (-2, -3)
(C) (4, 6) (D) (8, 12)

2.
$$\begin{cases} 0.3x = 0.2y \cdots \text{①} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \cdots \text{②} \end{cases} \Rightarrow \text{①} \times \frac{10}{9} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y = 0 \cdots \text{③} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{3} \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{②} - \text{③} \text{得 } \frac{1}{2}y + \frac{2}{9}y = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{9}{18}y + \frac{4}{18}y = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{13}{18}y = \frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow y = 6, x = 4$$

(B) 3. 解聯立方程式 $\begin{cases} 3x - y = 1 \cdots ① \\ x + 2y = 4 \cdots ② \end{cases}$ 的解法中下列何者正確？

(A) 由①式得 $y = -3x + 1$ ，代入②式，可得 $x = -\frac{2}{5}$

(B) 由①式 $\times 2 +$ ②式，可得 $x = \frac{6}{7}$

(C) 由①式 $-$ ②式 $\times 3$ ，可得 $y = \frac{11}{5}$

(D) 由②式得 $x = 4 - 2y$ ，代入①式，可得 $y = \frac{11}{5}$

$$3. \begin{cases} 3x - y = 1 \cdots ① \\ x + 2y = 4 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ① \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 2 \cdots ③ \\ x + 2y = 4 \cdots ② \end{cases} \\ \Rightarrow ③ + ② \Rightarrow 7x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$$

(A) 4. 解下列二元一次聯立方程式 $2x + y - 7 = -1 = 3x - 2y - 10$ 的 x 、 y 各為多少？

(A) $x = 3$ 、 $y = 0$ (B) $x = 0$ 、 $y = 3$

(C) $x = 2$ 、 $y = 1$ (D) $x = 1$ 、 $y = 2$

$$4. \begin{cases} 3x - 2y - 10 = -1 \cdots ① \\ 2x + y - 7 = -1 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 9 \cdots ③ \\ 2x + y = 6 \cdots ④ \end{cases} \\ ③ + ④ \times 2 \Rightarrow 7x = 21, x = 3, \text{代入} ④, y = 0$$

※(C) 5. 一中街夜市某攤位，賣一塊香雞排可賺 15 元，賣一份炸薯條可賺 10 元，已知賣出的炸薯條份數是香雞排塊數的兩倍，而且一個晚上共賺 3850 元，下列哪一個式子與題意不符合？

(A) 假設香雞排賣了 x 塊，則 $15x + 20x = 3850$

(B) 假設炸薯條賣了 x 份，則 $\frac{15}{2}x + 10x = 3850$

(C) 假設香雞排賣了 x 塊，炸薯條賣了 y 份，則 $\begin{cases} x = 2y \\ 15x + 10y = 3850 \end{cases}$

(D) 假設炸薯條賣了 x 份，香雞排賣了 y 塊，則 $\begin{cases} x = 2y \\ 15y + 10x = 3850 \end{cases}$

※(B) 6. 50 元、10 元硬幣共 44 枚，恰好可換一張 1000 元紙鈔，則 50 元硬幣共有幾枚？

(A) 8 (B) 14

(C) 16 (D) 20

$$6. \text{設 } 50 \text{ 元硬幣有 } x \text{ 枚，} 10 \text{ 元硬幣有 } y \text{ 枚，} \begin{cases} x + y = 44 \cdots \cdots ① \\ 50x + 10y = 1000 \cdots ② \end{cases} \\ \Rightarrow ② - ① \times 10 \Rightarrow 40x = 560, x = 14$$

(B) 7. 設有甲、乙兩數，甲數除以乙數得商為 7，餘數為 4，甲的 3 倍除以乙的 2 倍得商為 11，餘數為 4，試求甲、乙兩數之和？

(A) 58 (B) 68

(C) 52 (D) 62

$$7. \text{設甲為 } x, \text{乙為 } y, \begin{cases} x = 7y + 4 \cdots \cdots ① \\ 3x = 22y + 4 \cdots ② \end{cases} \\ \Rightarrow ② - ① \times 3 \Rightarrow y = 8, x = 60, x + y = 68$$

※(D) 8. 九二一大地震時，救難隊搬了 5 箱泡麵，準備分給 y 位民眾，已知每箱泡麵有 x 包，第一次分發 2 箱，平均每人分得 3 包泡麵，最後剩 6 包，第二次再拿剩下的 3 箱來發，結果每人共分得 8 包泡麵，最後還是剩 6 包，則一箱泡麵有多少包？

(A) 20 (B) 28

(C) 46 (D) 30

$$8. \begin{cases} 2x = 3y + 6 \cdots ① \\ 5x = 8y + 6 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \times 5 \\ ② \times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = 15y + 30 \cdots ③ \\ 10x = 16y + 12 \cdots ④ \end{cases} \\ \Rightarrow ④ - ③ \Rightarrow y = 18, x = 30$$

※(D) 9. 學生分配宿舍，如果 6 人住一間，則有 2 人無宿舍可住；如果 7 人住一間，則剩餘宿舍 2 間，請問：學生共有幾個人？

(A) 38 (B) 58

(C) 78 (D) 98

$$9. \text{設有宿舍 } y \text{ 間，學生 } x \text{ 人，} \begin{cases} 6y + 2 = x \\ 7(y - 2) = x \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x - 6y = 2 \cdots \cdots ① \\ x - 7y = -14 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow y = 16, x = 98$$

※(D) 10. 奇鼎國中實施紙類資源回收。去年 12 月分一、二年級共回收 38 公斤；今年元月分二年級比一年級多回收 6 公斤，只知與 12 月分比較，一年級增加 50%，二年級減少 25%，試問下列何者正確？

- (A) 12 月分二年級比一年級多回收 6 公斤
 (B) 元月分二年級回收 28 公斤
 (C) 元月分一年級回收 18 公斤
 (D) 12 月分一年級回收 10 公斤

10. 設 12 月分一年級回收 x 公斤，二年級回收 y 公斤，
 則 $\begin{cases} x + y = 38 \\ 1.5x - 0.75y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 38 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ ，解得 $x = 10, y = 28$ ，
 元月分： $1.5x = 15$ (公斤)， $0.75y = 21$ (公斤)

(D) 11. 下列式子的化簡，何者正確？

- (A) $3x - 7y = -4xy$ (B) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{7}y = 21x + 20y$
 (C) $2x \cdot (\frac{1}{3}y) = 2\frac{1}{3}xy$ (D) $\frac{3x+2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9x+2}{6}$

11. (A) $3x - 7y \Rightarrow$ 無須化簡
 (B) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{7}y \Rightarrow$ 無須化簡
 (C) $2x(\frac{1}{3}y) = \frac{2}{3}xy$
 (D) $\frac{3x+2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9x+2}{6}$

(B) 12. 若 $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ bx - ay = 4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ ax - by = 5 \end{cases}$ 有相同的解，求 $a - b = ?$

- (A) 0 (B) 1
 (C) 2 (D) 3

12. $\begin{cases} x + 3y = -1 \dots ① \\ 3x + 4y = 2 \dots ② \end{cases}$ ， $① \times 3 \Rightarrow 3x + 9y = -3 \dots ③$ ， $③ - ② \Rightarrow 5y = -5$ ，
 $y = -1, x = 2$ 代入下式 $\begin{cases} bx - ay = 4 \\ ax - by = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + a = 4 \dots ④ \\ 2a + b = 5 \dots ⑤ \end{cases}$ ， $④ \times 2$
 $\Rightarrow 4b + 2a = 8 \dots ⑥$ ， $⑥ - ⑤ \Rightarrow 3b = 3, b = 1, a = 2, \therefore a - b = 1$

(D) 13. 已知 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 都是 $ax + by = 12$ 的解，求 $a - b = ?$

- (A) -12 (B) 12
 (C) -24 (D) 24

13. $\begin{cases} 5a + 4b = 12 \dots ① \\ 3a + 2b = 12 \dots ② \end{cases}$ ， $② \times 2 - ①$ 得 $a = 12$ 代入 $②$
 得 $b = -12 \Rightarrow a - b = 12 - (-12) = 24$

※(B) 14. 瑞觀班上共有 36 人，數學平時考全班平均 63 分，若男生平均 70 分，女生平均 56 分，則該班男生有多少人？

- (A) 14 (B) 18
 (C) 22 (D) 26

14. 令男生 x 人，女生 y 人
 $\begin{cases} x + y = 36 \dots ① \\ 70x + 56y = 63 \times 36 \dots ② \end{cases}$ ， $① \times 56 \Rightarrow 56x + 56y = 2016 \dots ③$
 $② - ③ \Rightarrow 14x = 252, x = 18$ ，男生有 18 人

(A) 15. 若聯立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \\ ax = 3y + a \end{cases}$ ，其 x, y 之值的和為 1，求 $a = ?$

- (A) -3 (B) 3 (C) $\frac{99}{34}$ (D) $-\frac{99}{34}$

15. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 36 \dots ① \\ 2x + 2y = 2 \dots ② \end{cases}$
 $\Rightarrow ① - ②$ 得 $x = 34, y = -33$
 $34a = -99 + a, 33a = -99, a = -3$



(C) 1. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} \frac{2x - 3y}{6} = 4 \\ \frac{15x + 15y - 5}{3} = 0 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$ ，則 $a - b = ?$

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{9}{5}$
 (C) $\frac{29}{3}$ (D) $-\frac{139}{3}$

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 24 \dots ① \\ 3x + 3y = 1 \dots ② \end{cases}$ \therefore 由 $① + ②$ 得 $5x = 25, x = 5$ ，代回 $①$ 得 $y = -\frac{14}{3}$
 故 $a - b = 5 - (-\frac{14}{3}) = \frac{29}{3}$

(C) 2. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + \frac{5}{6}y = 7 \\ y = 18 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$, 則 $a + b = ?$ 97 基測二

(A) 0 (B) 7
(C) 14 (D) 22

2. $\begin{cases} 2x + \frac{5}{6}y = 7 \cdots ① \\ y = 18 \cdots \cdots \cdots ② \end{cases} \Rightarrow y = 18 = b \text{ 代入 } ①$
 $2x + \frac{5}{6}(18) = 7, 2x = -8, x = -4 = a,$
 $\therefore a + b = (-4) + 18 = 14$

(D) 3. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$, 則 $a + b = ?$ 97 基測一

(A) 1 (B) 6
(C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{12}{5}$

3. $\begin{cases} 2x - y = 3 \cdots ① \\ 3x - 4y = 3 \cdots ② \end{cases} \Rightarrow ① \times 3 - ② \times 2 \Rightarrow 5y = 3, y = \frac{3}{5} = b$
 $x = \frac{9}{5} = a, \therefore a + b = \frac{9}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

※(C) 4. 若大軍買了數支 10 元及 15 元的原子筆, 共花費 90 元, 則這兩種原子筆的數量可能相差幾支?
 (A) 2 (B) 3
 (C) 4 (D) 5

4. 設 10 元買 x 支, 15 元買 y 支
 $\Rightarrow 10x + 15y = 90 \Rightarrow 2x + 3y = 18$

x	3	6
y	4	2
$ x - y $	1	4

97 基測一

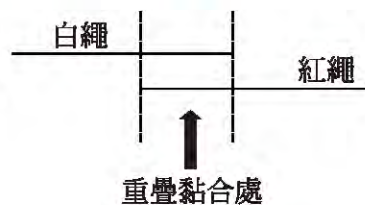
※(D) 5. 某水果店販賣西瓜、梨子及蘋果, 已知一個西瓜的價錢比 6 個梨子多 6 元, 一個蘋果的價錢比 2 個梨子少 2 元。判斷下列敘述何者正確?
 (A) 一個西瓜的價錢是一個蘋果的 3 倍
 (B) 若一個西瓜降價 4 元, 則其價錢是一個蘋果的 3 倍
 (C) 若一個西瓜降價 8 元, 則其價錢是一個蘋果的 3 倍
 (D) 若一個西瓜降價 12 元, 則其價錢是一個蘋果的 3 倍

5. 設梨子一個賣 x 元,
 西瓜一個賣 $(6x + 6)$ 元,
 蘋果一個賣 $(2x - 2)$ 元
 $3(2x - 2) = 6x - 6 = (6x + 6) - 12$
 \therefore 一個蘋果價錢的 3 倍
 $=$ 一個西瓜降價 12 元

97 基測一

#(B) 6. 如右圖, 將一白繩的 $\frac{3}{8}$ 與一紅繩的 $\frac{1}{3}$ 重疊並以膠帶黏合, 形成一條長為 238 公分的繩子。求未黏合前, 兩繩長度相差多少公分?
 (A) 14
 (B) 17
 (C) 28
 (D) 34

6. 設白繩、紅繩長分別為 $x, y, \therefore \frac{3}{8}x = \frac{1}{3}y$
 $\Rightarrow y = \frac{9}{8}x, x + \frac{2}{3}y = 238, \therefore x + \frac{2}{3} \times \frac{9}{8}x = 238,$
 $\frac{7}{4}x = 238, x = 136, y = \frac{9}{8} \times 136 = 153$
 $\therefore y - x = 153 - 136 = 17$



94 基測一

基測題

(D) 1. 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 6y - 4x = 9 \end{cases}$ 的解為何呢?
 (A) $x = 4, y = 0$ (B) $x = 0, y = 0$
 (C) $x = 0, y = 4$ (D) 無解

1. 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 2x - 3y = \frac{-9}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{8}{\frac{-9}{2}} \Rightarrow$ 無解

(C) 2. 解 $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{y - 3x}{5} = 1 \\ \frac{7x + y}{5} - y = -1 \end{cases}$, 則 $x^2 + y^2 = ?$
 (A) 105 (B) 115
 (C) 125 (D) 135

2. 化簡得 $\begin{cases} 19x - 8y = 15 \cdots ① \\ 7x - 4y = -5 \cdots ② \end{cases}$
 $② \times 2 : 14x - 8y = -10 \cdots ③$
 $① - ③ : 5x = 25 \therefore x = 5$
 代入 $② : 35 - 4y = -5, 4y = 40, y = 10$
 $\therefore x^2 + y^2 = 25 + 100 = 125$

(B) 3. 二元一次方程式 $x + 3y = 12$ 共有幾個正整數解呢？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

$$3. x = 12 - 3y$$

x	9	6	3
y	1	2	3

(D) 4. 小鼎解一聯立方程式 $\begin{cases} y - 2x = -7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$ ，結果他看錯式中的 -7 ，解得 $y = -10$ ，請問：

小鼎是將 -7 誤看成多少呢？

- (A) 4 (B) 5
(C) 6 (D) 7

$$4. \text{將 } y = -10 \text{ 代入 } 2x - 3y = 13 \text{ 式中得 } x = -\frac{17}{2},$$

$$\text{將 } y = -10, x = -\frac{17}{2} \text{ 代入 } y - 2x = -7$$

$$\text{得 } -10 + 17 = 7, \text{ 故誤看成 } 7$$

※(A) 5. 家榮和媽媽到銀行去提領 3000 元的美金共有 45 張鈔票，其中含有 50 元及 100 元面額的鈔票，請問：50 元的鈔票有幾張呢？

- (A) 30 (B) 25
(C) 20 (D) 15

$$5. \text{設 } 50 \text{ 元有 } x \text{ 張, } 100 \text{ 元有 } y \text{ 張, } \begin{cases} x + y = 45 \cdots \textcircled{1} \\ 50x + 100y = 3000 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \times 100 - \textcircled{2} \Rightarrow 50x = 1500 \Rightarrow x = 30$$

※(C) 6. 家億到麥當勞買餐點，他發現若點 4 杯可樂及 3 份薯條則不夠 27 元；若點 3 杯可樂及 2 份薯條，則剩下 16 元，已知一份薯條比一杯可樂多 7 元，則一杯可樂多少元？

- (A) 16 (B) 17
(C) 18 (D) 19

6. 設一杯可樂 x 元，一份薯條 y 元，

$$\text{則 } \begin{cases} y = x + 7 \\ 4x + 3y - 27 = 3x + 2y + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 7 \\ x + y = 43 \end{cases} \Rightarrow x = 18, y = 25$$

※(A) 7. 奇鼎大學招收數學碩士班，錄取人數是到考人數的 $\frac{1}{3}$ ，而且比缺考人數多 5 人，已知有 $\frac{1}{5}$ 的人數缺考，請問：報名的人數是多少人呢？

- (A) 75 (B) 73
(C) 65 (D) 63

$$7. \text{設到考人數 } x \text{ 人, 缺考人數 } y \text{ 人, 報名人數 } x + y \text{ 人,}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 5 \\ y = \frac{1}{5}(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow x + y = 75 \text{ (人)}$$

※(D) 8. 有一條鮪魚將其分成魚頭、魚身及魚尾三個部分，如果魚尾重 3 公斤，魚頭重量等於魚尾加上魚身一半的重量，魚身重量等於魚尾加上魚頭的重量，請問：此條鮪魚有多少公斤呢？

- (A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24

$$8. \text{設魚頭 } x \text{ 公斤, 魚身 } y \text{ 公斤} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{y}{2} \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y + 3 = 9 + 12 + 3 = 24$$

#(A) 9. 飆速網咖的收費標準為：基本費用每次 30 元（可使用 x 分鐘），超過 x 分鐘後，超過的部分每分鐘收費 y 元，啓倫第一次到此店上網 40 分鐘花費 50 元，第二次到同一家店上網 1 小時花費 70 元，則 $x = ?$

- (A) 20 (B) 40
(C) 30 (D) 50

$$9. \begin{cases} 30 + (40 - x)y = 50 \\ 30 + (60 - x)y = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (40 - x)y = 20 \cdots \textcircled{1} \\ (60 - x)y = 40 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} : \frac{40 - x}{60 - x} = \frac{1}{2}, 80 - 2x = 60 - x, x = 20$$

◎(B) 10. 有一群大陸客到新竹科學園區參觀太陽能機車，今有太陽能機車若干臺且試車場有 40 公尺長，但由於太陽能機車少於人數，所以採取輪流騎乘，則每人可騎 30 公尺；若人數增加 4 名，機車減少 3 輛，則每人可騎 20 公尺，請問：原來有太陽能機車多少輛呢？

- (A) 10 (B) 15
(C) 20 (D) 25

10. 設原有大陸客 x 人，太陽能機車 y 輛

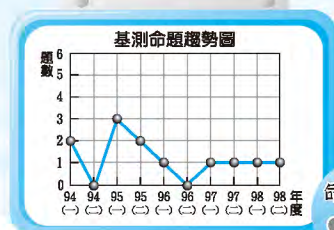
$$\Rightarrow \begin{cases} 30x = 40y \\ 20(x + 4) = 40(y - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x = 40y \cdots \textcircled{1} \\ 20x + 80 = 40y - 120 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } 20x + 80 = 30x - 120 \Rightarrow 10x = 200, x = 20, y = \frac{30 \times 20}{40} = 15$$

解題小秘方 第 9 題：不要忘記基本費要加上，且要記得要用總時間減去超過的時間。

第 6 單元

二元一次方程式的圖形



命題率
80%

能力 — 直角平面坐標

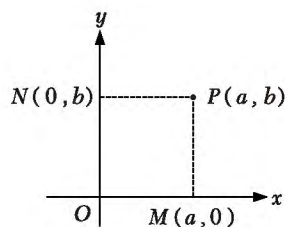
一 直角坐標

平面上兩條互相垂直的數線，以原點為交點，所構成的平面稱為**坐標平面**，亦稱為**直角坐標平面**。

水平的數線	橫軸	x 軸	往右為正
垂直的數線	縱軸	y 軸	往上為正

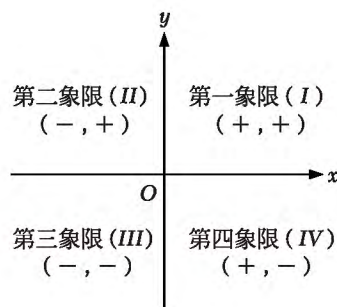
二 點坐標

過坐標平面上任一點 P ，分別做垂直於 x 軸與 y 軸的直線，分別交於 $M(a, 0)$ 與 $N(0, b)$ ，則 P 點可用數對 (a, b) 表示位置，亦即 (a, b) 為 P 點之坐標。



三 象限

- 兩條坐標軸可將坐標平面分成六部分： x 軸、 y 軸、**第一象限**、**第二象限**、**第三象限**、**第四象限**。象限根據坐標位置關係有正、負性質的差異。
- 象限的命名：由逆時針方向分別取名為第一、第二、第三、第四象限，或者用羅馬數字代表，如： I 、 II 、 III 、 IV 亦可（如右圖所示）。



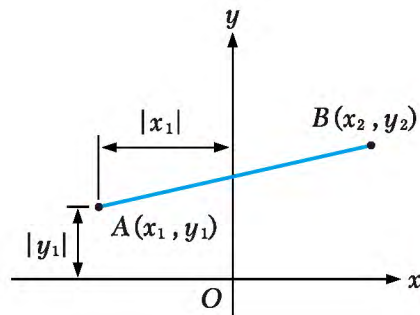
小叮嚀

坐標軸上的點不屬於任何一象限。亦即當 x 或 y 坐標為 0 的點，不屬於任一象限，例如： $(5, 0)$ 或 $(0, 13)$ 皆不屬於任何一象限。

四 坐標上兩點距離與中點坐標

假設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 為平面上相異兩點：

- A 點到 x 軸距離 $\Rightarrow |y_1|$ 。
- A 點到 y 軸距離 $\Rightarrow |x_1|$ 。
- A 點到原點 $O(0, 0)$ 的距離 $\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ 。
- $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。
- \overline{AB} 中點坐標 $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ 。

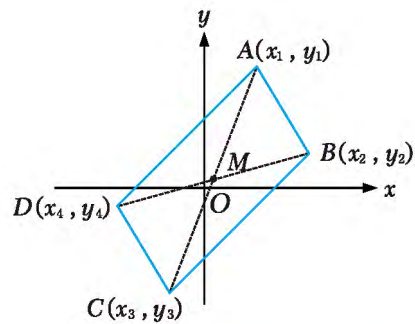


五 平行四邊形坐標關係

若平行四邊形 $ABCD$ 其四頂點坐標分別為

$A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $D(x_4, y_4)$ ，

則有下列性質： $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ， $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ 。



老師傳授

坐標與象限的關係

學生寫作

已知坐標 $A(3, a)$ 在 x 軸上， $B(d-2, -7)$ 在 y 軸上，且點 $(b+c, c+2)$ 是原點。請問：

- (1) a 、 b 、 c 、 d 為何？
- (2) 點 $(a+b, c+d)$ 在第幾象限呢？

解

- (1) $A(3, a)$ 在 x 軸上 $\Rightarrow a = 0$
 $B(d-2, -7)$ 在 y 軸上 $\Rightarrow d-2 = 0, d = 2$
 $C(b+c, c+2)$ 是原點
 $\Rightarrow b+c = 0, c+2 = 0 \Rightarrow c = -2, b = 2$
 $\Rightarrow a = 0, b = 2, c = -2, d = 2$
- (2) $\therefore a+b = 2, c+d = 0$
 \Rightarrow 在 x 軸上 (不在任何象限)

1. 假設 $a > 0, b < 0$ ，則下列各點 $A(a, b)$ 、 $B(-a, b)$ 、 $C(a, -b)$ 分別在第幾象限？
2. 已知 $A(a, b)$ 在坐標平面上的第二象限，則 $(\frac{b}{a}, b^2)$ 在第幾象限呢？

解

1. $A(+, -)$ 在第四象限， $B(-, -)$ 在第三象限， $C(+, +)$ 在第一象限
2. $\therefore A(a, b)$ 在第二象限
 $\Rightarrow a < 0, b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0, b^2 > 0$
 $\therefore (\frac{b}{a}, b^2)$ 在第二象限

老師傳授

直角坐標

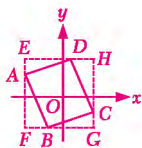
學生寫作

已知 $ABCD$ 為平行四邊形，其坐標分別為 $B(-2, -4)$ 、 $C(4, -2)$ 、 $D(1, 5)$ 。請問：

- (1) A 點坐標為何？在第幾象限呢？
- (2) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積？

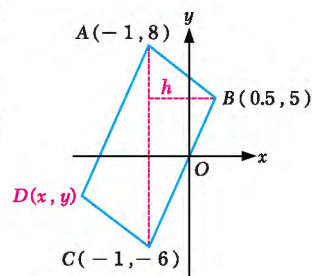
解

- (1) 設 A 點坐標 (x, y) ，
 $\frac{x+4}{2} = \frac{-2+1}{2} \Rightarrow x = -5$ ，
 $\frac{y-2}{2} = \frac{-4+5}{2} \Rightarrow y = 3$ ，
 $A(-5, 3)$ 在第二象限
- (2) $\triangle AED$ 面積 = $\triangle CGB$ 面積
 $= 2 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$
 $\triangle DHC$ 面積 = $\triangle BFA$ 面積 = $3 \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$
 平行四邊形 $ABCD$ 面積
 $= EFGH$ 面積 - $2(\triangle AED$ 面積 + $\triangle DHC$ 面積)
 $= 9^2 - 2(6 + \frac{21}{2}) = 48$ (平方單位)



如圖，已知 $ABCD$ 為平行四邊形，其坐標分別為 $A(-1, 8)$ 、 $B(0.5, 5)$ 、 $C(-1, -6)$ 。請問：

- (1) D 點坐標為何？
- (2) 平行四邊形 $ABCD$ 面積為何？



解

- (1) $\begin{cases} (-1) + (-1) = x + 0.5 \\ 8 + (-6) = y + 5 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = -2.5 \\ y = -3 \end{cases}$
 $\Rightarrow D$ 點坐標 $(-2.5, -3)$
- (2) $AC = |8 - (-6)| = 14$ ，
 $h = |0.5 - (-1)| = 1.5$ ，
 面積 = $(14 \times 1.5 \times \frac{1}{2}) \times 2 = 21$ (平方單位)

3 老師 傳授

兩點距離與中點坐標

學生 實作

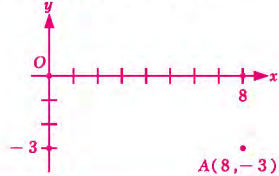
1. 在直角坐標平面上有一點 $A(3, -4)$ ，若 A 到 x 軸的距離是 m ，到 y 軸的距離是 n ，則 $m^2 - n^2 = ?$
2. 在直角坐標平面上，有兩點 $A(3, -5)$ 、 $B(-2, -6)$ ，其距離為何呢？
3. 坐標平面上， $A(2, 3)$ 、 $B(x, y)$ 的中點坐標為 $(-1, 2)$ ，則 $x + y = ?$

解

1. $m = |-4| = 4$
 $n = |3| = 3$
 $\Rightarrow m^2 - n^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$
2. $\overline{AB} = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [-5 - (-6)]^2}$
 $= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
3. $\frac{2+x}{2} = -1 \Rightarrow x = -4$ ， $\frac{3+y}{2} = 2 \Rightarrow y = 1$
故 $x + y = -3$

1. 在直角坐標平面上， A 點位於第四象限，且與 x 軸距離 3 個單位，與 y 軸距離 8 個單位，則 A 點的坐標為何？
2. 有一個三角形的花園，其三點坐標分別為 $A(-5, 2)$ 、 $B(7, -3)$ 、 $C(-3, 6)$ ，請問：此花園的周長為何呢？
3. 坐標平面上有兩點 $A(2, -3)$ 、 $B(-4, -5)$ ，請問： \overline{AB} 的中點坐標為何呢？

解

1. 如圖，
 A 點 $(8, -3)$

2. $\overline{AB} = \sqrt{[7 - (-5)]^2 + [(-3) - 2]^2} = 13$
 $\overline{BC} = \sqrt{[7 - (-3)]^2 + [(-3) - 6]^2} = \sqrt{181}$
 $\overline{AC} = \sqrt{[(-3) - (-5)]^2 + (6 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$
 $\triangle ABC$ 周長 $= 13 + \sqrt{181} + 2\sqrt{5}$ (單位)
3. $(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{(-3)+(-5)}{2}) = (-1, -4)$

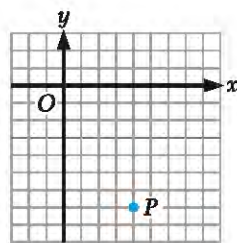
Let's Go! 同步 評量 1

- (B) 1. 設 $r + s = 0$ 且 $rs \neq 0$ ，則 (r, s) 在第幾象限？
(A) 一、三 (B) 二、四 (C) x 軸 (D) y 軸
1. $(+, -)$ 或 $(-, +)$
 \therefore 在第二、四象限
- (D) 2. 下列哪一點與 y 軸距離比到 x 軸的距離小？
(A) $(-2, 1)$ (B) $(3, -1)$ (C) $(-2, -2)$ (D) $(-1, 2)$
2. (D) $(-1, 2) \Rightarrow$ 到 y 軸距離 $= |-1| = 1$
到 x 軸距離 $= |2| = 2$
- (D) 3. 若 $a - b = 1$ ，且 $ab < 0$ ，則點 (a, b) 在坐標平面上第幾象限？
(A) 一 (B) 二
(C) 三 (D) 四
3. $\because ab < 0$ ， $\begin{cases} a < 0, b > 0 \\ a > 0, b < 0 \end{cases}$ ，又 $a - b = 1$ ，
 $\therefore a > 0, b < 0 \Rightarrow$ 第四象限
- (D) 4. 設 $r > s$ 且 $|r| = |s|$ ，則點 $(r + s, r - s)$ 在位於何處？
(A) 第一象限 (B) 第四象限 (C) x 軸上 (D) y 軸上
4. $r + s = 0 \therefore$ 在 y 軸上
- (A) 5. 滿足 $|x + 2y - 3| + |2x - y - 1| = 0$ 之 (x, y) 在第幾象限？
(A) 一 (B) 二
(C) 三 (D) 四
5. 令 $\begin{cases} x + 2y = 3 \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ ， $\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 \Rightarrow -5y = -5, y = 1$ ，
代入 $\textcircled{1}$ ， $x + 2 = 3, x = 1, \therefore (x, y) = (1, 1)$ 在第一象限

(B) 6. 右圖的坐標平面中，若 O 為原點，且每個方格的邊長為 0.5 個單位長，則 P 點的坐標該如何表示？

- (A) $(1, -1.75)$
 (B) $(2, -3.5)$
 (C) $(2, 3.5)$
 (D) $(1, 1.75)$

6. 1 單位長為 2 個方格邊長
 $\Rightarrow (\frac{4 \text{ 格}}{2}, -\frac{7 \text{ 格}}{2}) = (2, -3.5)$



(D) 7. 若 $a, b \neq 0$ ，且 $|a - b| = a - b$ ， $|a| = -a$ ，則 $(-a, b)$ 在第幾象限內呢？

- (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四

7. $\because |a| = -a > 0, \therefore a < 0$
 又 $|a - b| = a - b > 0, \therefore a > b$
 故 $b < a < 0, \therefore (-a, b) \Rightarrow (+, -)$ 在第四象限

能力 二元一次方程式的圖形 (一)

一 二元一次方程式圖形的重點

1. 二元一次方程式的一般式： $ax + by = c, (a \neq 0, b \neq 0)$

與 x 軸的交點坐標	與 y 軸的交點坐標	x 軸的方程式	y 軸的方程式
$(\frac{c}{a}, 0)$	$(0, \frac{c}{b})$	$y = 0$	$x = 0$
●形垂直 y 軸	●形垂直 x 軸	●形通過原點	
$y = c (c \neq 0)$	$x = c (c \neq 0)$	$ax + by = 0$	

2. 若二元一次方程式為一般式： $ax + by + c = 0$ ，則先移項整理為標準式： $y = ax + b$ 再依下表判斷。

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

$\left(-\frac{c}{b} : \text{判斷圖形的上下}\right)$
 $\left(-\frac{a}{b} : \text{判斷圖形的傾斜方向與角度}\right)$

二 二元一次方程式圖形快速判斷法則

1. 二元一次方程式通過： $y = ax + b$

\uparrow (判斷圖形上下)
 \uparrow (判斷圖形的傾斜方向與角度)

條件	圖形	條件	圖形
1. $a > 0$	由左下向右上傾斜 ↗	5. $b > 0$	圖形與 y 軸交點在原點上方
2. $a < 0$	由左上向右下傾斜 ↘	6. $b = 0$	圖形與 y 軸交點在原點
3. $ a $ 愈大	愈靠近 y 軸 (傾斜角度大) 陡	7. $b < 0$	圖形與 y 軸交點在原點下方
4. $ a $ 愈小	愈遠離 y 軸 (傾斜角度小) 平		

2. 快速解法範例說明

1. $y = 3x$	2. $y = -3x$	3. $y = \frac{3}{2}x$	4. $y = -\frac{3}{2}x$
①通過原點 ②方向 ↗ ③比圖 3 陡	①通過原點 ②方向 ↘ ③比圖 4 陡	①通過原點 ②方向 ↗ ③比圖 1 平	①通過原點 ②方向 ↘ ③比圖 2 平
5. $y = 3x + 1$	6. $y = -3x - 1$	7. $y = \frac{3}{2}x + 1$	8. $y = -\frac{3}{2}x - 1$
①與 y 軸交點 $(0, 1)$ ②方向 ↗ ③比圖 3 陡	①與 y 軸交點 $(0, -1)$ ②方向 ↘ ③比圖 4 陡	①與 y 軸交點 $(0, 1)$ ②方向 ↗ ③比圖 1 平	①與 y 軸交點 $(0, -1)$ ②方向 ↘ ③比圖 2 平

4

老師傳授

求二元一次方程式

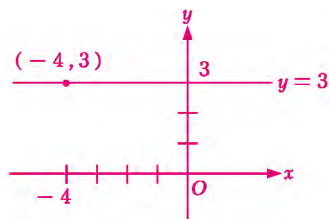
學生

習作

4

- 通過 $(-4, 3)$ 且與 x 軸平行的直線方程式為何?
- 已知一直線平行 $L: 3x - 4y + 6 = 0$ ，且通過點 $P(-1, 2)$ ，請問：此直線方程式為何?

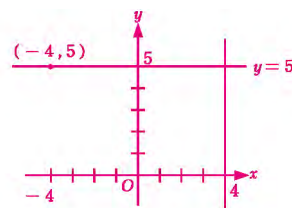
解

1. 如圖， $y = 3$ 

- 假設平行線之方程式為 $3x - 4y + k = 0$ ，將 $(-1, 2)$ 代入，得 $k = 11$
 $\Rightarrow 3x - 4y + 11 = 0$

- 通過 $(-4, 5)$ 且與 $x = 4$ 垂直的直線方程式為何?
- 若一直線通過原點與兩直線 $3x + 2y = -1$ ， $x - y = 3$ 之交點，則此直線方程式為何呢?

解

1. 如圖， $y = 5$ 

- 兩直線之交點 $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \cdots ① \\ x - y = 3 \cdots \cdots ② \end{cases}$
 \Rightarrow 得 $x = 1, y = -2 \Rightarrow$ 交點 $(1, -2)$
 \Rightarrow 所求直線通過 $(0, 0), (1, -2)$
 $\Rightarrow \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} \Rightarrow y = -2x$

5

老師

傳授

直線與象限的判斷

學生

習作

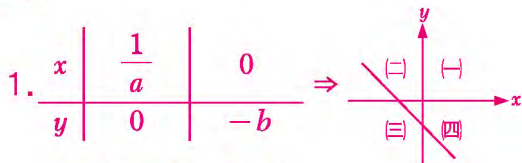
5

1. 已知 $a < 0$ 、 $b > 0$ ，請問方程式 $ax - \frac{y}{b} = 1$

的圖形不通過哪一個象限？

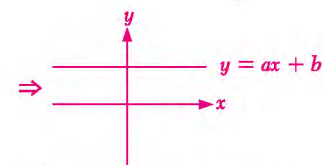
2. 已知直線 $y = ax + b$ 只通過第一、二象限，則點 (a, b) 在坐標平面的哪一個部分？

解



\Rightarrow 不經過第一象限

2. 僅通過第一、二象限

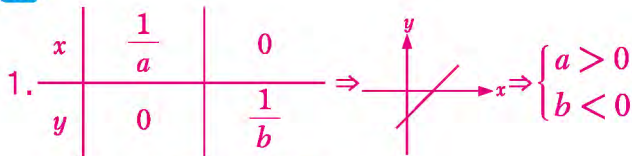


$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow$ 點 (a, b) 在 y 軸上

1. 已知直線 $ax + by = 1$ 不通過第二象限，若 $ab \neq 0$ ，則 (b, a) 在哪一個象限？

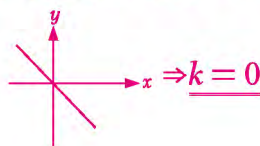
2. 直線 $2x - 3y = k$ 的圖形只通過二、四象限，請判斷 k 的值為何？

解



$\Rightarrow (b, a)$ 在第二象限

2. 斜直線只通過二、四象限 \Rightarrow 故經過原點



6

老師

傳授

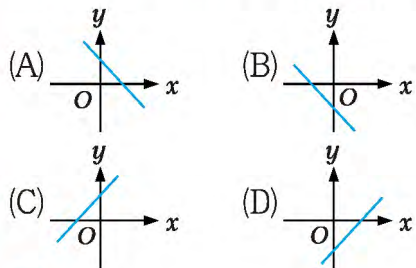
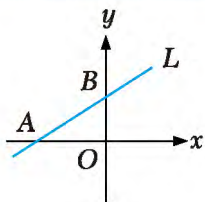
判別二元一次方程式的圖形

學生

習作

6

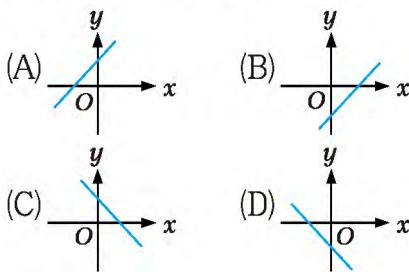
如圖，若直線 L 為方程式 $y = -x + a$ 的圖形，且 L 交 x 軸、 y 軸於 A 、 B 兩點，則下列何者可能是 $y = -ax - 1$ 的圖形？



解

$y = -x + a$ 與 y 軸的交點為正數，故 $a > 0$ ，則 $y = -ax - 1$ 的圖形，當 $x = 0$ 時， $y = -1$ ；當 $y = 0$ 時， $x = \frac{1}{-a} < 0$ ，故應選(B)

若 $a > 0$ ， $ab < 0$ ，則下列哪一個圖形可能是直線 $ax + by = 3$ 的圖形？



解

$\because a > 0$ 且 $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

(1) 將 $y = 0$ 代入 $ax + by = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{a} > 0$

則 $ax + by = 3$ 與 x 軸交點 $(\frac{3}{a}, 0)$ 在 x 軸的正向

(2) 將 $x = 0$ 代入 $ax + by = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{b} < 0$

則 $ax + by = 3$ 與 y 軸交點 $(0, \frac{3}{b})$ 在 y 軸的負向

故應選(B)



同步 評量 2

(C) 1. 坐標平面上，下列哪一直線通過點 $(-1, 1)$?

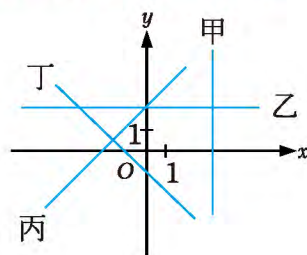
- (A) $3x - y + 5 = 0$ (B) $-x - 4y + 5 = 0$
 (C) $x - y + 2 = 0$ (D) $x + y - 2 = 0$

1. (A) $3 \times (-1) - 1 + 5 = 1 \neq 0$
 (B) $-(-1) - 4 \times 1 + 5 = 2 \neq 0$
 (C) $(-1) - 1 + 2 = 0$
 (D) $(-1) + 1 - 2 = -2 \neq 0$

(D) 2. 右圖四條直線中哪一個是 $x + y + 1 = 0$ 的圖形?

- (A) 甲
 (B) 乙
 (C) 丙
 (D) 丁

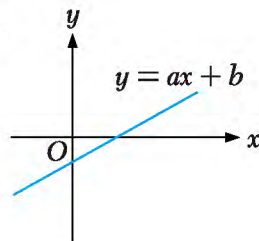
$$2. x + y + 1 = 0, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{取丁}$$



(B) 3. 如右圖，直線 $y = ax + b$ 通過一、三、四象限，則下列何者正確?

- (A) $b - 2a > 0$
 (B) $a - b > 0$
 (C) $b > 0, a < 0$
 (D) $b < 0, a < 0$

$$3. y = ax + b, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -b \\ \hline y & b & 0 \end{array} \Rightarrow b < 0, a > 0$$

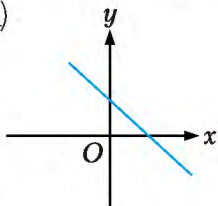
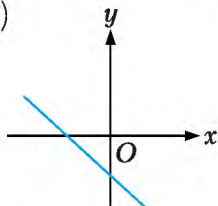
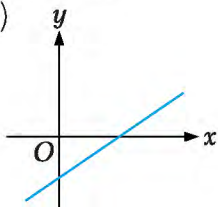
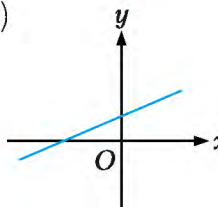


(D) 4. 將點 $A(3, -7)$ 向下平移 a 單位，再向左平移 4 單位後，會落在直線 $3y = 2x + 5$ 上，試求 $a = ?$

- (A) 8 (B) 3 (C) -3 (D) -8

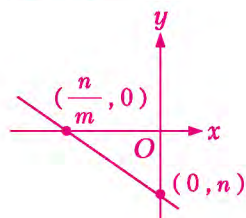
4. $A(3, -7)$ 向下平移 a 單位，向左 4 單位
 $(-1, -7-a)$ 代入 $3y = 2x + 5$
 $\Rightarrow 3(-7-a) = 2(-1) + 5, -21 - 3a = 3, a = -8$

(B) 5. $mx + y = n$ 且 $n < 0, m > 0$ ，則下列哪一個選項可能是正確的圖形?

- (A)  (B) 
 (C)  (D) 

5. $n < 0, m > 0, mx + y = n$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{n}{m} \\ \hline y & n & 0 \end{array}$$



二元一次方程式的圖形 (二)

一 二元一次聯立方程式圖形的性質

- 二元一次聯立方程式的圖形：在坐標平面上兩個二元一次方程式的圖形為兩條直線。
- 解與交點的關係：當兩條直線相交於一點時，則此交點的坐標即為這兩個二元一次方程式聯立後的解。反之，兩個二元一次方程式聯立後的解，亦即為這兩個二元一次方程式在坐標平面上兩直線的交點坐標。

3. 兩直線交點的分類：二元一次聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的圖形在坐標平面上可分為三類：

(1) 交於一點 \Rightarrow 兩方程式有一解。

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

例 1 $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

(2) 重合 \Rightarrow 兩方程式有無限多組解。

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

例 2 $\begin{cases} 3x + 3y = 2 \\ 6x + 6y = 4 \end{cases}$

(3) 平行 \Rightarrow 兩方程式無解。

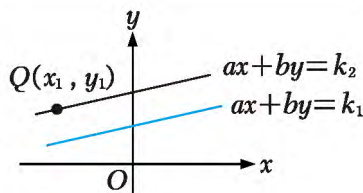
$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

例 3 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$

4. 兩平行線的求法

過點 $Q(x_1, y_1)$ 且平行
 $ax + by = k_1$ 的直線方程式

可假設為 $ax + by = k_2 (k_1 \neq k_2)$ ，
將 $Q(x_1, y_1)$ 代入得 $k_2 = ax_1 + by_1$



7

老師 傳授

二元一次聯立方程式圖形的繪製

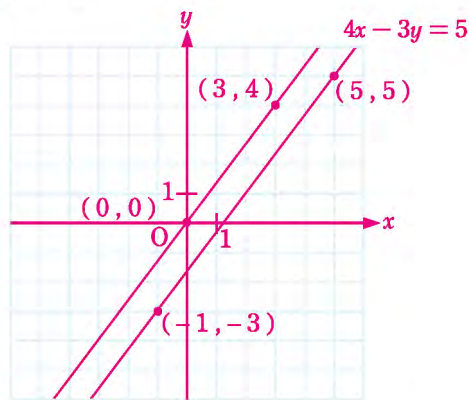
學生 實作

7

畫出下列二元一次聯立方程式的圖形，試判斷其解為何？並說明二直線的關係為何？

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 8x - 6y = 0 \end{cases}$$

解



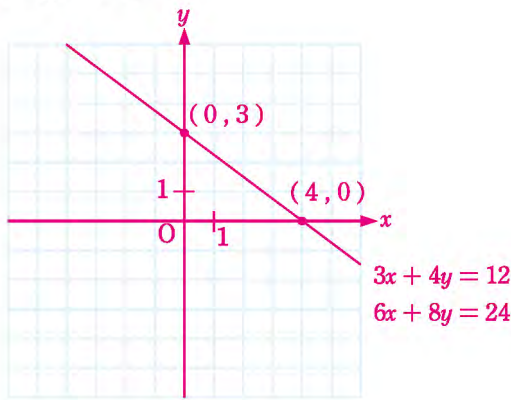
$$8x - 6y = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 5 & -1 \\ y & 5 & -3 \end{array}, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ y & 0 & 4 \end{array} \quad \therefore \text{兩條直線平行}$$

請畫出下列二元一次聯立方程式的圖形，試判斷其解為何？並說明二直線的關係為何？

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$$

解



$$\begin{array}{c|c|c} x & 4 & 0 \\ y & 0 & 3 \end{array}, \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 0 \\ y & 0 & 3 \end{array}$$

\therefore 兩條直線共線 (重合)

8

老師 傳授

直線圖形的平移與平行

學生 實作

8

將直線 $4x + 3y = 12$ 向右平移 5 個單位後，可得新的直線，試求此直線方程式。

解

$4x + 3y = 12$ 與 x 軸交點為 $(3, 0)$ ，

向右平移 5 個單位後

與 x 軸的交點坐標為 $(8, 0)$ 代入 $4x + 3y = k$ ，

$$\text{得 } k = 32 \Rightarrow \underline{4x + 3y = 32}$$

將直線 $5x + 7y = 21$ 向下平移 7 個單位後，可得新的直線，試求此直線方程式。

解

$5x + 7y = 21$ 與 y 軸交點為 $(0, 3)$

向下平移 7 個單位後

與 y 軸的交點坐標為 $(0, -4)$ 代入 $5x + 7y = k$ ，

$$\text{得 } k = -28 \Rightarrow \underline{5x + 7y = -28}$$

9 老師傳授

直線方程式的應用

學生習作 9

一直線 $L: x - y - 3 = 0$ 與直線 $M: x + y + 3 = 0$ 互相垂直，並交於一點 P ，請問：直線 L 、 M 與 x 軸圍成的面積為何？

解

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \cdots ① \\ x + y + 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \cdots ① \\ x + y + 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

$$① + ② \text{ 得 } x = 0$$

代入①得 $y = -3$ ，

故 P 點坐標為 $(0, -3)$

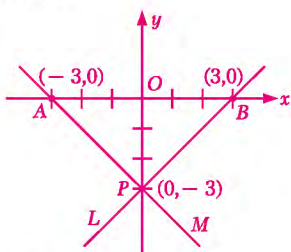
$$x - y - 3 = 0 \qquad x + y + 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -3 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array}$$

由圖，

$$\begin{aligned} \triangle ABP \text{ 面積} &= \overline{AB} \times \overline{OP} \times \frac{1}{2} = 6 \times 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 9 \text{ (平方單位)} \end{aligned}$$



下列二元一次聯立方程式中，請分別說明兩直線方程式的關係。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$$

解

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{2}{1}$$

\Rightarrow 此二直線互相平行

$$(2) \begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$$

\Rightarrow 此二直線相交於一點

$$(3) \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$$

\Rightarrow 此二直線重合



同步評量

3

(C) 1. 若公園的位置在坐標平面上的 $(2, 11)$ ，而大賣場的坐標位置在 $(4, 7)$ ，今小熏騎腳踏車走下列哪一條路線可同時經過公園和大賣場？

- (A) $y = 2x + 3$ (B) $y = 2x - 3$
(C) $y = -2x + 15$ (D) $y = -2x - 15$

1. 將 $(2, 11)$ 和 $(4, 7)$ 分別代入直線 $y = ax + b$ 中，

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + b \\ 7 = 4a + b \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 15,$$

故直線方程式為 $y = -2x + 15$

(B) 2. 如右圖，直線 $3x + y + 8 = 0$ 通過 A 點與 B 點，如果 $\overline{CD} \perp y$ 軸且 $\overline{CD} = 2$ ，求梯形 $ADCO$ 面積為何？

- (A) 4
(B) $\frac{14}{3}$
(C) 5
(D) $\frac{16}{3}$

2. D 點之 x 坐標 (-2) 代入 $3x + y + 8 = 0$ ，

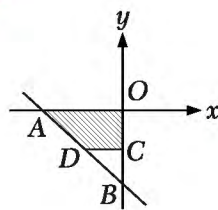
得 $y = -2$ ， $D(-2, -2)$ ，則 $C(0, -2)$

令 A 點 $(a, 0)$ 代入 $3x + y + 8 = 0$ ，

$$\text{得 } a = \frac{-8}{3}, A\left(\frac{-8}{3}, 0\right)$$

$$\text{梯形 } ADCO \text{ 面積} = \frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{DC}) \times \overline{CO}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{3} + 2\right) \times 2 = \frac{14}{3} \text{ (平方單位)}$$



(D) 3. 坐標平面上，已知兩相異直線 $3x - 4y = 7$ 與 $ax - by = -3$ 不相交，則 $a : b = ?$

- (A) $(-3) : 7$ (B) $(-3) : 4$
(C) $3 : (-4)$ (D) $3 : 4$

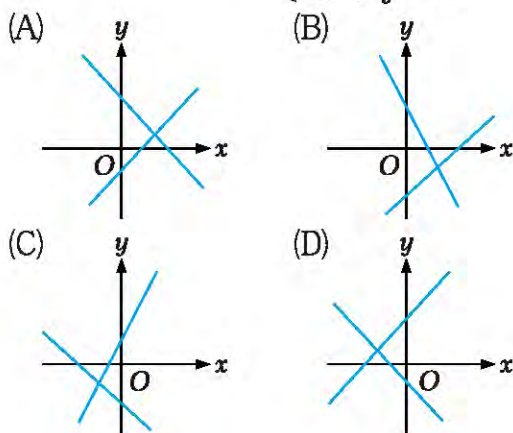
$$3. \because \text{平行}, \therefore \frac{3}{a} = \frac{-4}{-b} \neq \frac{7}{-3} \Rightarrow a : b = 3 : 4$$

(A) 4. 已知三直線 $x + 2y = 6$ 、 $2x + y = 9$ 、 $11y = ax + 3$ 相交於一點，求 $a = ?$

- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5

$$4. \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 11(1) = 4a + 3, a = 2$$

(B) 5. 下列何者最可能是 $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ 在坐標平面上的圖形？



$$5. \begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

交點落在第四象限

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(C) 1. 若 $ab < 0$, $a > 0$, 則 $(b - a, -a^2)$ 在第幾象限？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

$$1. ab < 0 \text{ 且 } a > 0, \therefore b < 0 \\ \Rightarrow (b - a, -a^2) \Rightarrow (-, -) \\ \Rightarrow \text{在第三象限}$$

(D) 2. 設 $a, b \neq 0$, 坐標平面上點 $A(a - 3, b + 2)$ 在第二象限, 則點 $B(b + 3, a - 4)$ 在第幾象限？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

$$2. \because \begin{cases} a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 < 4 \\ b + 2 > 0 \Rightarrow b > -2 > -3 \end{cases} \therefore \begin{cases} b + 3 > 0 \\ a - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{第四象限}$$

(C) 3. $|m + 8| + |n - 4| = 0$, 則 $(-n, m)$ 必在第幾象限呢？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

$$3. m + 8 = 0 \text{ 且 } n - 4 = 0, m = -8, n = 4, \\ (-n, m) = (-4, -8) \text{ 在第三象限}$$

(B) 4. 圓周上有 P, Q 二點, $P(7, 4), Q(-5, -12)$ 連接 \overline{PQ} 通過圓心 O 點, 則 O 點坐標為何？

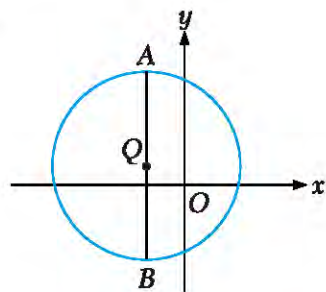
- (A) $(2, -4)$ (B) $(1, -4)$ (C) $(2, 4)$ (D) $(1, 4)$

$$4. O \text{ 點 } \left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-12+4}{2} \right) = (1, -4)$$

◎(D) 5. 如右圖, 圓心 $Q(-4, 2)$, 且直徑 \overline{AB} 垂直 x 軸, 半徑為 10, 則 B 點坐標為何？

- (A) $(-4, 12)$
(B) $(-4, -12)$
(C) $(-4, 8)$
(D) $(-4, -8)$

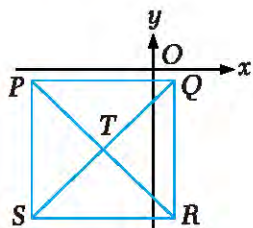
$$5. 2 - 10 = -8 \Rightarrow B \text{ 點坐標 } (-4, -8)$$



(A) 6. 如右圖, 麒仲在坐標平面上畫一個正方形 $PQRS$, 對角線 \overline{PR} 、 \overline{SQ} 交於 T 點, 且 $T(-4, -8)$, $\overline{PQ} = 14$, 則 P 點坐標為何呢？

- (A) $(-11, -1)$ (B) $(11, -1)$

$$(C) (-3, -1) (D) (3, 1) \quad 6. (-4-7, -8+7) = (-11, -1)$$



(C) 7. 在坐標平面上，直線 $L: y = ax + b$ 通過 $(-1, -5)$ 、 $(3, 3)$ 兩點，則 L 與 x 軸的交點坐標是下列哪一個選項？

- (A) $(\frac{2}{3}, 0)$ (B) $(0, \frac{2}{3})$
 (C) $(\frac{3}{2}, 0)$ (D) $(0, 1\frac{1}{2})$

$$7. \begin{cases} -5 = -a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3 \\ \Rightarrow y = 2x - 3, \text{ 令 } y = 0 \text{ 代入得 } x = \frac{3}{2}$$

(B) 8. 設兩直線 $L: y = 3x - 24$ ， $M: ax = y + 4$ 的圖形交點在 x 軸上，則 $a = ?$

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 4

$$8. y = 3x - 24, \text{ 令 } y = 0, \text{ 則 } x = 8, \text{ 代入 } y + 4 = ax, \\ \Rightarrow 0 + 4 = 8a, a = \frac{1}{2}$$

(A) 9. 下列何者與直線 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 不是相互平行的？

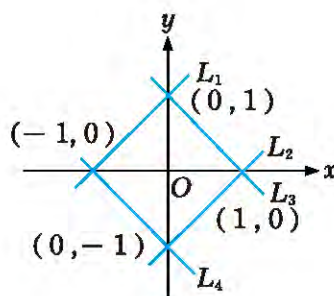
- (A) $y = 2x - 2$ (B) $y = \frac{1}{2}x + 2$
 (C) $2y = x + 1$ (D) $2y = x - 2$

$$9. (A) \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{2}x = -2 \\ y - 2x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{比較係數} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-\frac{1}{2}}{-2} \\ \Rightarrow \text{相交於一點}$$

◎(B) 10. 如右圖，哪一條直線為 $y = x - 1$ 的圖形？

- (A) L_1
 (B) L_2
 (C) L_3
 (D) L_4

$$10. y = x - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 0 \\ \hline y & 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \text{取 } L_2$$



(C) 11. $16x + 8y = 56$ 與兩軸所圍成的三角形面積是多少呢？

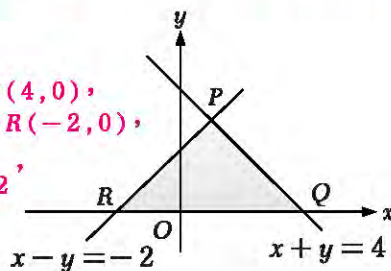
- (A) $\frac{49}{2}$ (B) $\frac{2}{49}$ (C) $\frac{49}{4}$ (D) $\frac{4}{49}$

$$11. \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{7}{2} \\ \hline y & 7 & 0 \end{array}, \text{面積} = 7 \times \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{4}$$

#(D) 12. 如右圖，請問： P 、 Q 、 R 三點的坐標為何？

- (A) $P(3, 1)$ 、 $Q(0, 4)$ 、 $R(-2, 0)$
 (B) $P(1, 3)$ 、 $Q(-4, 0)$ 、 $R(2, 0)$
 (C) $P(-1, 3)$ 、 $Q(4, 0)$ 、 $R(2, 0)$
 (D) $P(1, 3)$ 、 $Q(4, 0)$ 、 $R(-2, 0)$

$$12. \text{由 } x + y = 4 \text{ 得 } Q(4, 0), \\ \text{由 } x - y = -2 \text{ 得 } R(-2, 0), \\ \text{再由 } \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \\ \text{得 } x = 1, y = 3 \\ \therefore P(1, 3)$$



(A) 13. 在坐標平面上，將直線 $x + 2y = 0$ 往右平行移動兩個單位後，該直線方程式為何？

- (A) $x + 2y - 2 = 0$ (B) $x + 2y = -2$
 (C) $(x + 2) + 2y = 0$ (D) $y = \frac{x - 2}{2}$

$$13. \because (x - 2) + 2y = 0, \therefore x + 2y - 2 = 0$$

(C) 14. 若 $\begin{cases} 2x + ny = 1 \\ mx - 6y - m = -2 \end{cases}$ 有無限多組解，則 $\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}n = ?$

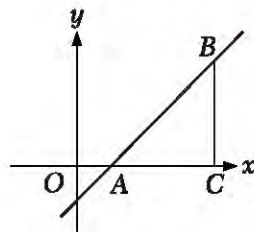
- (A) 1 (B) 2
 (C) 3 (D) 4

$$14. \frac{2}{m} = \frac{n}{-6} = \frac{1}{m-2} \Rightarrow 2(m-2) = m, m = 4 \text{ 代入 } \frac{2}{m} = \frac{n}{-6} \\ \Rightarrow n = -3 \Rightarrow \frac{1}{2}m - \frac{1}{3}n = 2 + 1 = 3$$

(D) 15. 如右圖， \overline{AB} 的方程式為 $y = 2x - 21$ ， $A(3, 0)$ 、 $C(15, 0)$ ， $\overline{BC} \perp x$ 軸於 C ，求 $\triangle ABC$ 的面積為多少平方單位？

- (A) 35 (B) 53
 (C) 45 (D) 54

$$15. \overline{AC} = 15 - 3 = 12 \\ B \text{ 點 } y \text{ 坐標} = 2(15) - 21 = 9 \\ \triangle ABC \text{ 面積} = 12 \times 9 \times \frac{1}{2} = 54$$



歷屆 基測題

(C) 1. 已知座標平面上有一點 A，座標為 (1, 2)。若有一點 B 在第二象限，且 B 點到 x 軸的距離與 A 點到 x 軸的距離相等，則直線 AB 的方程式為何？ 86 基測一

- (A) $x = 1$ (B) $x = 2$
 (C) $y = 2$ (D) $x + y = 2$

1. B 點到 x 軸的距離與 A 點到 x 軸的距離相等 \Rightarrow B 點坐標為 $(\square, 2)$ ，
 通過 A、B 兩點的直線方程式為 $y = 2$ ，故選(C)

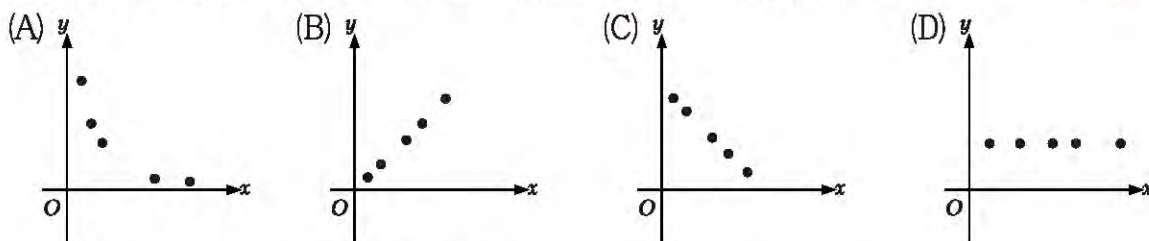
(A) 2. 坐標平面上，點 P(2, 3) 在直線 L 上，其中直線 L 的方程式為 $2x + by = 7$ ，求 $b = ?$

- (A) 1 (B) 3
 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. (2, 3) 在 L 上， $\therefore (2, 3)$ 代入 L，得 $2 \times 2 + b \times 3 = 7, b = 1$

3. 袋中原有 a 球 (不變) 若每次取出 x 球 (自變數)；則袋中剩 y 球 (應變數)，則 a, x, y 的函數關係為 $y = f(x) = a - x$ (x 愈大, y 愈小) 88 基測一
 \Rightarrow 故為線型函數，圖形為一直線

(C) 3. 阿美自一袋中取球，以每次取出數球且取後放回的方式，任取 5 次。若某次取出的球數以 x 表示；該次取球未放回前，袋內所剩的球數以 y 表示，且將每次的取球情況寫成數對 (x, y) 並畫在坐標平面上，則此圖可能是下列哪一圖形？ 87 基測二

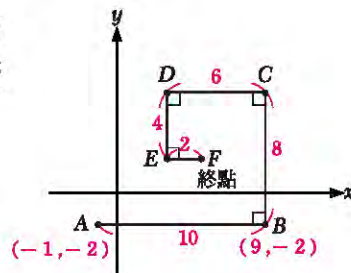


(B) 4. 小華從右圖的 A 點出發，沿 ABCDEF 路線行走。已知 A、B 兩點坐標分別為 $(-1, -2)$ 、 $(9, -2)$ ，且 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{DE} = 4$ ， $\overline{EF} = 2$ ，則終點 F 坐標為何？

- (A) (6, 4) (B) (5, 2)
 (C) (4, 1) (D) (2, 1)

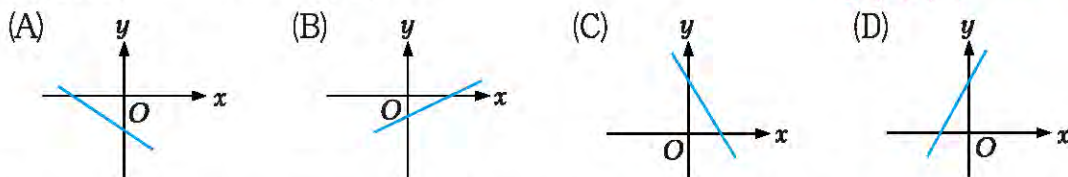
4. $C(9, -2 + 8) \Rightarrow C(9, 6)$
 $D(9 - 6, 6) \Rightarrow D(3, 6)$
 $E(3, 6 - 4) \Rightarrow E(3, 2)$
 $F(3 + 2, 2) \Rightarrow F(5, 2)$

97 基測二



基測 趨勢題

(C) 1. 何者是 $y = -2x + 8$ 的圖形？



1. $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \hline 8 & 0 \end{array} \right.$ ，通過一、二、四象限

(D) 2. 若 (a, b) 為 $y = -2x + 4$ 與 $y = 5x - 15$ 兩函數圖形的交點，則 (a, b) 表示的點應為何？又其位於第幾象限呢？

- (A) $(\frac{19}{7}, \frac{10}{7})$ ，第一象限
 (B) $(-\frac{19}{7}, \frac{10}{7})$ ，第二象限
 (C) $(-\frac{19}{7}, -\frac{10}{7})$ ，第三象限
 (D) $(\frac{19}{7}, -\frac{10}{7})$ ，第四象限

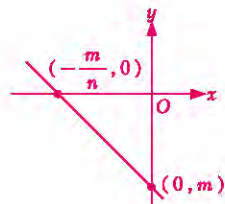
2. $\begin{cases} y = -2x + 4 \dots \textcircled{1} \\ y = 5x - 15 \dots \textcircled{2} \end{cases}$ ②代入①， $5x - 15 = -2x + 4$
 $7x = 19, x = \frac{19}{7}$ ，代入② $y = 5x - 15 = 5 \times \frac{19}{7} - 15 = -\frac{10}{7}$ ，
 \therefore 交點 $(\frac{19}{7}, -\frac{10}{7})$ ，第四象限

(D) 3. 函數 $y = nx + m$ 的圖形通過二、三、四象限，則下列何者正確？

- (A) $m > 0, n > 0$
 (B) $m > 0, n < 0$
 (C) $m < 0, n > 0$
 (D) $m < 0, n < 0$

$$3. \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -\frac{m}{n} \\ \hline y & m & 0 \end{array}$$

$$m < 0, -\frac{m}{n} < 0 \Rightarrow n < 0$$



(A) 4. 在同一坐標平面上，有兩函數 $y = -6x + 8$ 與 $y = -6x + 4$ ，請問：此兩直線方程式有何關係呢？

- (A) 平行 (B) 垂直
 (C) 相交於一點 (D) 相交於兩點

$$4. \begin{cases} y = -6x + 8 \\ y = -6x + 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-6}{-6} \neq \frac{8}{4}, \text{兩直線平行}$$

(D) 5. 假設 $A(a, a + 18)$ 、 $B(-2, 6)$ 、 $C(7, 5)$ 三點共線，請問： a 值為何呢？

- (A) 9 (B) -9
 (C) 11 (D) -11

$$5. \text{令直線方程式 } y = ax + b, \text{ 將 } (7, 5), (-2, 6) \text{ 代入 } \Rightarrow \begin{cases} 5 = 7a + b \\ 6 = -2a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{得 } a = \frac{-1}{9}, b = \frac{52}{9}, \text{ 將 } (a, a + 18) \text{ 代入 } y = \frac{-1}{9}x + \frac{52}{9}$$

$$\Rightarrow 9(a + 18) = -a + 52 \Rightarrow \text{得 } a = -11$$

(C) 6. 設 a, b 為實數，且 $ab \neq 0$ ，若方程式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 所表示的圖形不通過第四象限，請問： $(a - b, ab)$ 在第幾象限呢？

- (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四

$$6. \because \text{圖形不通過第四象限} \therefore a < 0, b > 0$$

$$\Rightarrow a - b < 0, ab < 0 \Rightarrow \text{在第三象限}$$

(C) 7. 直角坐標平面上有三條直線 $L_1: y = 2x - 4$ ， $L_2: x = 3$ ， $L_3: ax + 2y = 16$ 有共同的交點，則 $a = ?$

- (A) 2 (B) -2
 (C) 4 (D) -4

$$7. \text{因為 } L_1, L_2 \text{ 有共同的交點，即聯立方程式 } \begin{cases} y = 2x - 4 \cdots \text{①} \\ x = 3 \cdots \text{②} \end{cases} \text{ 有共同的解}$$

$$\text{將②式代入①式得：} y = 2 \times 3 - 4 = 2, \text{ 故 } L_1, L_2 \text{ 的交點為 } (3, 2),$$

$$\text{又 } L_3 \text{ 亦通過該點，即 } (3, 2) \text{ 亦為方程式 } ax + 2y = 16 \text{ 的解，}$$

$$\text{所以 } 3a + 2 \times 2 = 16, 3a = 12, a = 4$$

(A) 8. 假設 $\begin{cases} (m-3)x - 3y = 8 \\ 4x + (n-1)y = 16 \end{cases}$ 兩直線方程式圖形重合，請問： $m - n = ?$

- (A) 10 (B) -10
 (C) 5 (D) -5

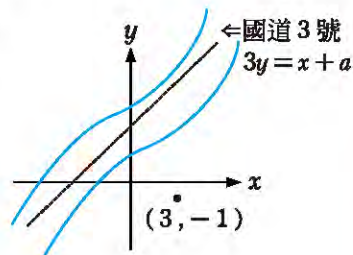
$$8. \frac{m-3}{4} = \frac{-3}{n-1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 5, n = -5, m - n = 10$$

* (B) 9. 如右圖，小華所在位置為 $(3, -1)$ ，已知小華往上平移 6 個單位後，會到達國道 3 號，且國道 3 號的直線方程式為 $3y = x + a$ ，則 $a = ?$

- (A) -12
 (B) 12
 (C) -18
 (D) 18

$$9. (3, -1) \text{ 向上平移 6 個單位到 } (3, 5),$$

$$\text{代入 } 3y = x + a, 15 = 3 + a, a = 12$$



(C) 10. 已知一直線上任一點的坐標為 $(1 + a, 3a - 2)$ ，則下列何者為此直線方程式呢？

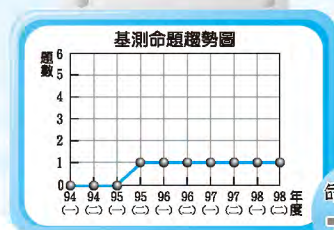
- (A) $y = 3x + 5$ (B) $3y = x - 5$
 (C) $3x - y = 5$ (D) $3x + y = 5$

$$10. \text{令 } x = 1 + a, a = x - 1 \text{ 代入 } y = 3a - 2$$

$$\Rightarrow y = 3(x - 1) - 2 = 3x - 3 - 2 = 3x - 5$$

第7單元

比例與線型函數



命題率
70%

能力 — 比例式

一 比的定義

假設 a 、 b 為同類量 (相同單位) 的任意兩實數，將 a 、 b 的比寫成 $a:b$ ，「 a 」為比的前項；「 b 」為比的後項且後項不可為 0 ($b \neq 0$)。

二 比的性質

1. 比的乘、除性質

比的前項與後項「同乘」或「同除」一個不為 0 的數，其值不變。

例 1 $\rightarrow a:b = a \times m : b \times m = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} \quad (m, n \neq 0)$

2. 比值

比的前項 (a) 除以後項 (b) 所得的商即為「比值 ($\frac{a}{b}$)」；比值常用分數型式表示 (且要以最簡分數或整數表示)，另外比值是同類量相除的結果，故比值沒有單位。

3. 比與比值的迷思概念

(1) 「比」是除法概念的延伸，所以僅在前項與後項「同乘」或「同除」一個不為 0 的數時，其值不變；但是，比的前項與後項「同加」或「同減」一個不為 0 的數時，其值會改變！

(2) 假設 $a:b$ 且 $b \neq 0$ 時，請注意下列情形：

① $a:b = a \times b : b \times b = ab : b^2$

例如： $2:7 = 2 \times 7 : 7 \times 7 = 14:49$

② $a:b = a \times a : b \times a = a^2 : ab$ (不一定成立！當 $a = 0$ 時，不成立)

例如： $2:7 = 2 \times 2 : 2 \times 7 = 4:14$ (成立)

$0:7 = 0 \times 0 : 0 \times 7 = 0:0$ (不成立， $\because 0:0 = \frac{0}{0}$ 無意義)

③ $a:b = a \times a : b \times b = a^2 : b^2$ (僅在 $a = b$ 時才成立)

三 比例式的意義

若 $a:b = c:d$ ($b \neq 0, d \neq 0$) 成立，則稱 $a:b$ 及 $c:d$ 的比相等或比值相同；同時我們稱 a 和 d 為外項， b 和 c 為內項，這樣的式子稱為比例式。

例 2 $\rightarrow 1:2$ 的比值為 $\frac{1}{2}$ ， $5:10$ 的比值為 $\frac{1}{2} \Rightarrow 1:2 = 5:10$

四 比例式的運算

1. 內項乘積 = 外項乘積

$$\begin{array}{c}
 b \times c \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a : b = c : d \Rightarrow a \times d = b \times c \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a \times d
 \end{array}$$

2. 等號兩邊交叉相乘

$$\begin{array}{c}
 a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \\
 \Rightarrow a \times d = b \times c
 \end{array}$$

老師傳授

比與比值

學生習作

- 若 $a = 2$ 、 $b = 5$ ，則 $\frac{(a-b)^2}{ab} : \frac{ab}{(a+b)^2}$ 的比為何？又比值為何呢？
- 設 a 、 b 、 c 、 d 四數中， $3a = 4b$ ， $5c = 6d$ ，試求 $\frac{ac+bc}{ad-bd} = ?$
- 一圓與一正方形的周長均相等，則其面積比為何？

解

- $$\frac{(2-5)^2}{2 \times 5} : \frac{2 \times 5}{(2+5)^2} \Rightarrow \frac{9}{10} : \frac{10}{49}$$

$$\Rightarrow 441 : 100 \Rightarrow \text{比值} = \frac{441}{100}$$
- 令 $a = 4r$ ， $b = 3r$ ， $c = 6k$ ， $d = 5k$ ，

$$\frac{ac+bc}{ad-bd} = \frac{(a+b)c}{(a-b)d} = \frac{(4r+3r)6k}{(4r-3r)5k} = \frac{42}{5}$$
- 令正方形邊長為 a

$$4a = 2\pi r, r = \frac{2a}{\pi}$$

$$a^2 : \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \pi = a^2 : \frac{4a^2}{\pi} = \underline{\underline{\pi : 4}}$$

- 若 $(x-7) : (y+5) = \frac{1}{4}$ ，且 $x \neq 0$ ，求 $(2y+66) : 6x$ 的比為何？
- 設 a 、 b 、 c 、 d 四數中， $7a = 8b$ ， $9c = 5d$ ，試求 $(ac-bc) : (ad+bd) = ?$
- 將兩塊相同的圓形 *pizza* 平均分成 10 塊與 8 塊，然後各取一塊，則這 2 小塊的面積比為何？

生活題

解

- $$\frac{(x-7)}{(y+5)} = \frac{1}{4}$$

$$4x - 28 = y + 5, 4x = y + 33,$$

$$2y + 66 : 6x = 2(y + 33) : 6x = 2(4x) : 6x$$

$$= \underline{\underline{4 : 3}}$$
- 令 $a = 8r$ ， $b = 7r$ ， $c = 5k$ ， $d = 9k$ ，

$$(ac-bc) : (ad+bd) = (a-b)c : (a+b)d$$

$$= (8r-7r)5k : (8r+7r)9k = 5 : 135 = \underline{\underline{1 : 27}}$$
- $\frac{1}{10} : \frac{1}{8} = \underline{\underline{4 : 5}}$

老師傳授

比例式

學生習作

- 若 $(x-3) : 6 = (x+7) : 7$ ，請問 $x = ?$

解

$$\begin{array}{l}
 1. (x-3) : 6 = (x+7) : 7 \\
 \Rightarrow 6(x+7) = 7(x-3) \\
 \Rightarrow 6x + 42 = 7x - 21 \\
 \Rightarrow 42 + 21 = x, \underline{\underline{x = 63}}
 \end{array}$$

- 若 $(x-6) : (y+3)$ 的比值為 $\frac{2}{5}$ ，且 $y \neq -3$ ，試求 $(5x-36) : 6y$ 的比與比值為何呢？

解

$$\begin{array}{l}
 1. (x-6) : (y+3) = 2 : 5 \\
 \Rightarrow 2(y+3) = 5(x-6) \\
 \Rightarrow 2y + 6 = 5x - 30 \Rightarrow 2y = 5x - 36 \\
 \Rightarrow (5x-36) : 6y = 2y : 6y = \underline{\underline{1 : 3}} \\
 \Rightarrow \text{比值} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}
 \end{array}$$

2. $5 : 7 = a : 14 = 15 : b$ ，請問： $a + b = ?$

3. $(x + 2) : (y + 3) = 2 : 3$ ，且 $x + y = 30$ ，
試求 x 、 y 為何？

解

$$2. 5 : 7 = a : 14 \Rightarrow a = 10$$

$$5 : 7 = 15 : b \Rightarrow b = 21$$

$$\Rightarrow a + b = 10 + 21 = \underline{31}$$

$$3. (x + 2) : (y + 3) = 2 : 3$$

$$\Rightarrow 3x + 6 = 2y + 6$$

$$\Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x : y = 2 : 3$$

$$\text{設 } x = 2r, y = 3r, x + y = 5r = 30 \Rightarrow r = 6$$

$$\therefore \underline{x = 12, y = 18}$$

2. 若 $\frac{3}{14} : \frac{|2x|}{5} = 6 : 7$ ，請問： $x = ?$

3. 若 $(4y - 7x) : (3x + y) = 1 : 2$ ，請問：
 $x^2 : y^2 = ?$

解

$$2. \frac{3}{14} : \frac{|2x|}{5} = 6 : 7 \Rightarrow 6 \times \frac{|2x|}{5} = 7 \times \frac{3}{14}$$

$$\Rightarrow |2x| = \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = \pm \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{8}$$

$$3. (4y - 7x) : (3x + y) = 1 : 2$$

$$\Rightarrow 8y - 14x = 3x + y \Rightarrow 7y = 17x$$

$$x : y = 7 : 17 \Rightarrow \underline{x^2 : y^2 = 49 : 289}$$

Let's Go!

同步 評量

1

(B) 1. 試求 2 分鐘 : 50 秒的比值為何呢？

- (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{5}$ (C) $\frac{1}{25}$ (D) $\frac{13}{5}$

$$1. 2 \text{ 分鐘} : 50 \text{ 秒} = 2 \times 60 \text{ 秒} : 50 \text{ 秒} = 120 : 50 = 12 : 5$$

$$\therefore \text{ 比值為 } \frac{12}{5}$$

(B) 2. 請問 $m^2n^3 : mn$ ($m, n \neq 0$) 的比值為下列何者？

- (A) mn (B) mn^2 (C) m^2n (D) m^2n^2

$$2. \text{ 比值} = \frac{m^2n^3}{mn} = mn^2$$

(D) 3. 一食鹽水溶液有 600 公克，如果食鹽重量與水重量比是 3 : 197，請問食鹽有幾公克？
水有幾公克呢？

- (A) 鹽 6 公克；水 594 公克
(B) 鹽 7 公克；水 593 公克
(C) 鹽 8 公克；水 592 公克
(D) 鹽 9 公克；水 591 公克

$$3. \frac{\text{食鹽}}{\text{食鹽水}} = \frac{3}{200} \Rightarrow \frac{\text{食鹽}}{600} = \frac{3}{200} \Rightarrow \text{食鹽} = \frac{3 \times 600}{200} = 9 \text{ (克)}$$

$$\text{水} = 600 - 9 = 591 \text{ (克)}$$

(C) 4. 若 a 、 b 都是正數，且 $5a = 2b$ ，下列各敘述何者正確？

- (A) $a > b$ (B) $a : b = 5 : 2$ (C) $a : b = 2 : 5$ (D) $\frac{a}{5} = \frac{b}{2}$

$$4. 5a = 2b \Rightarrow a : b = 2 : 5$$

$$\Rightarrow a < b$$

(B) 5. 若 $(2x + 3) : 5 = (3x - 15) : 6$ ，試求 x 的值為何呢？

- (A) 21 (B) 31 (C) 69 (D) 96

$$5. (2x + 3) : 5 = (3x - 15) : 6 \Rightarrow 15x - 75 = 12x + 18$$

$$\Rightarrow 3x = 93, x = 31$$

能力 = 連比例

一 連比例式的意義

若 $xyz \neq 0$ 、 $abc \neq 0$ 則 $x : y : z = a : b : c$ 或 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 稱為連比例式。

二 連比例式的運算

1. 見「比」設 r

$$\begin{array}{l} x : y : z = a : b : c \\ x : y : z = ar : br : cr \end{array} \quad \begin{cases} x = ar \\ y = br \\ z = cr \end{cases}$$

2. 見「=」設 k

$$\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \end{array} \quad \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$$

3. 連比的合併

已知 $a : b$ 及 $b : c$ 時，要合併為連比，先找出相同的「項」，並求其最小公倍數，再擴分後合併，請見以下說明：

例3：假設 $a : b = 3 : 5$ 且 $b : c = 4 : 7$ ，求 $a : b : c = ?$

$$\left. \begin{array}{l} a : b = 3 : 5 \\ b : c = 4 : 7 \end{array} \right\} \Rightarrow [5, 4] = 20 \Rightarrow \begin{array}{l} a : b : c \\ 3 \times 4 : 5 \times 4 \\ 4 \times 5 : 7 \times 5 \\ 12 : 20 : 35 \end{array}$$

$$\Rightarrow a : b : c = 12 : 20 : 35$$

三 比例分配

若 $a : b = m : n$ 且 $a + b = p$ ，則 $a = \frac{m}{m+n} \times p$ ， $b = \frac{n}{m+n} \times p$ 。

3

老師傳授

連比例

學生習作

3

1. 若 $x : y = 3 : 2$ ， $y : z = 7 : 5$ ，請問：
 $x : y : z = ?$

2. 若 $a : b = 1 : 5$ ， $b : c = 4 : 3$ ，請問：
(1) $a : b : c = ?$ (2) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = ?$

解

$$\begin{array}{l} 1. \quad x : y : z \\ \quad 3 : 2 \\ \quad \quad 7 : 5 \\ \hline 3 \times 7 : 7 \times 2 : 5 \times 2 \Rightarrow 21 : 14 : 10 \\ \Rightarrow x : y : z = 21 : 14 : 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. (1) \quad a : b : c \\ \quad 1 : 5 \\ \quad \quad 4 : 3 \\ \hline 1 \times 4 : 5 \times 4 : 5 \times 3 \Rightarrow 4 : 20 : 15 \\ \Rightarrow a : b : c = 4 : 20 : 15 \end{array}$$

$$(2) \quad \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{4} : \frac{1}{20} : \frac{1}{15} = 15 : 3 : 4$$

1. 若 $a : b = \frac{3}{2} : \frac{2}{3}$ ， $b : c = 5\frac{1}{4} : 4\frac{1}{5}$ ，請問：
 $a : b : c = ?$

2. 若 $a : b = 0.7 : 0.9$ ， $b : c = 0.3 : 0.8$ ，請問：
 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = ?$

解

$$\begin{array}{l} 1. \quad a : b = 9 : 4, b : c = 5 : 4 \\ a : b : c = (9 \times 5) : (4 \times 5) : (4 \times 4) \\ \quad = 45 : 20 : 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \quad a : b = \frac{7}{10} : \frac{9}{10} = 7 : 9, \\ b : c = \frac{3}{10} : \frac{8}{10} = 3 : 8 \\ a : b : c = 7 : 9 : 24 \\ \Rightarrow \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{7} : \frac{1}{9} : \frac{1}{24} = 72 : 56 : 21 \end{array}$$

4

老師

傳授

連比例式

學生

實作

4

1. 若 $x:y:z=3:4:5$, 請問 $(x+2y+3z) : (x+2y-3z) = ?$

2. 若 $xyz \neq 0$, 且 $2x=3y=5z$, 則 $x:y:z = ?$

解

1. $x:y:z=3:4:5 \leftarrow$ [看到比設 r]

設 $x=3r, y=4r, z=5r$

$(x+2y+3z) : (x+2y-3z)$

$= (3r+8r+15r) : (3r+8r-15r)$

$= 26r : (-4r) = \underline{13 : (-2)}$

2. $2x=3y=5z \leftarrow$ [看到等號設 k]

設 $2x=3y=5z=k$

$\Rightarrow x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{5}$

$x:y:z = \frac{k}{2} : \frac{k}{3} : \frac{k}{5} = 15k : 10k : 6k$
 $= \underline{15 : 10 : 6}$

1. 若 $3x:4y:5z=6:7:8$, 請問 $(x+y) : (y+z) : (z+x) = ?$

2. 若 $xyz \neq 0$, 且 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z$, 請問 $(x+y) : (y+z) : (z+x) = ?$

解

1. $3x:4y:5z=6:7:8 \leftarrow$ [看到比設 r]

設 $3x:4y:5z=6r:7r:8r$

$\Rightarrow x:y:z = \frac{6}{3}r : \frac{7}{4}r : \frac{8}{5}r$

$= 120r : 105r : 96r = 40 : 35 : 32$

$x=40r, y=35r, z=32r$

$(x+y) : (y+z) : (z+x)$

$= (40r+35r) : (35r+32r) : (32r+40r)$

$= \underline{75 : 67 : 72}$

2. $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z \leftarrow$ [看到等號設 k]

設 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z = k$

$\Rightarrow x=4k, y=2k, z=3k$

$(x+y) : (y+z) : (z+x)$

$= (4k+2k) : (2k+3k) : (3k+4k)$

$= \underline{6 : 5 : 7}$

Let's Go!

同步評量

2

(B) 1. 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 2 : 5$, 則 $\triangle ABC$ 為哪一種三角形?

(A) 直角三角形 (B) 鈍角三角形 (C) 銳角三角形 (D) 正三角形

(C) 2. 若 $8(y+z) = 6(z+x) = 4(x+y)$, 則 $x:y:z = ?$

(A) 5:7:1

(B) 5:1:7

(C) 7:5:1

(D) 7:1:5

2. $(y+z) : (z+x) : (x+y) = \frac{1}{8} : \frac{1}{6} : \frac{1}{4} = 3 : 4 : 6$

$$\text{令 } \begin{cases} y+z=3r \\ z+x=4r \\ x+y=6r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2}r \\ y=\frac{5}{2}r \\ z=\frac{1}{2}r \end{cases} \Rightarrow x:y:z=7:5:1$$

(D) 3. 已知 $a:b=3:4, b:c=2:5$, 求連比 $a:b:c = ?$

(A) 46:52:71 (B) 23:24:20 (C) 13:14:10 (D) 3:4:10

3. $a:b=3:4, b:c=2:5$
 $\Rightarrow a:b:c=3:4:10$

(C) 4. 設 $x:y:z=2:5:6$, 且 $[x, y, z] = 60$, 則 $3x+y-z = ?$

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

4. 設 $x=2r, y=5r, z=6r, \therefore [2r, 5r, 6r] = 60$
 $\Rightarrow 30r = 60, r=2, \therefore x=4, y=10, z=12,$
故 $3x+y-z = 12+10-12 = 10$

(A) 5. 若甲的體重比乙的體重是 5:4, 丙的體重比乙的體重是 3:4, 丁的體重比乙的體重是 35:36, 請問四人中誰最重?

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁

5. 甲:乙=5:4, 丙:乙=3:4, 丁:乙=35:36
乙:甲=4:5=36:45, 乙:丙=4:3=36:27,
乙:丁=36:35, 所以甲最重

能力三 正比與反比

一 正比

1. 正比的意義：

若 x 、 y 值為變數，且當 x 值變為 n 倍， y 值也變為 n 倍，稱 y 與 x 成正比，其關係式為 $y = kx$ ($k \neq 0$)。

2. 正比性質 ($y = kx$ ，且 $k \neq 0$)

(1) $y : x$ 的比值 $\frac{y}{x}$ 是固定值 k 。

(2) 當 x 變為原來的 m 倍 ($m \neq 0$)，則 y 也變為 m 倍。

二 反比

1. 反比的意義：

若 x 、 y 值為變數，且當 x 值變為 n 倍， y 值也變為 $\frac{1}{n}$ 倍，稱 y 與 x 成反比，其關係式為 $xy = k$ ($k \neq 0$)。

2. 反比性質 (當 x 、 y 、 z 皆不為零時)

(1) $x : y$ 的反比為 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ 或 $y : x$ 。

(2) $x : y : z$ 的反比為 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$ 或 $yz : xz : xy$ ，而非 $z : y : x$ (請注意)。

3. 正、反比列式

正比	設 k 為定數，若 y 與 x 成正比	$y = kx$
反比	設 k 為定數，若 y 與 x 成反比	$xy = k$

小叮嚀

1. 若 x 、 y 成正比，則 x 值愈大， y 值不一定愈大。

例如： $y = -x$ 。

2. 若 x 、 y 成反比，則 x 值愈大， y 值不一定愈小。

例如： $xy = -1$ 。

5 老師傳授

正比與反比

學生寫作

1. 從 A 鎮到 B 鎮，甲 $3\frac{1}{3}$ 小時可到達，乙 $5\frac{1}{5}$ 小時可到達，則甲、乙兩人速率的比為何？

解

1. 距離相同，則速率與時間成反比，

$$\text{時間比} = 3\frac{1}{3} : 5\frac{1}{5} = 25 : 39,$$

$$\text{則速率比} = \underline{39 : 25}$$

1. 嘉愷走路經過一山坡，上坡時每分鐘 30 公尺，下坡每分鐘 45 公尺，上下坡共花費了 60 分鐘，請問：此山坡的路長為何呢？

解

1. 上、下坡所費的時間與速率成反比

$$\Rightarrow \frac{1}{30} : \frac{1}{45} = 3 : 2,$$

$$\text{山坡長} = 30 \times (60 \times \frac{3}{5}) = \underline{1080} \text{ (公尺)}$$

解題小備方 速度公式： $s = v \times t \Rightarrow s$ 固定時， v 與 t 成反比。
 v 固定時， s 與 t 成正比。
 t 固定時， s 與 v 成正比。

2. 若腳踏車速率一定，當騎行 S 公里時，費時 T 小時，若以 x 表示距離， y 表示時間，其關係式為何？

解

$$2. \text{時速} = \frac{S}{T}, x = \frac{S}{T}y$$

2. 已知圓面積與其半徑的平方成正比，今有一圓，半徑為 r ，其面積為 12 平方單位，若一圓半徑為 $2r$ 時，其圓面積為多少平方單位？

解

2. 圓面積為 A 、半徑為 x

$$\therefore A = kx^2 (k \neq 0) \Rightarrow 12 = kr^2 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{當 } x = 2r \text{ 時, } A = k(2r)^2 = 4kr^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} A = 4 \times 12 = \underline{48} \text{ 平方單位}$$

6

老師

傳授

正比與反比的變化

學生

寫作

6

1. 已知 y 與 x 成正比，若 x 值增加 10%，則 y 值如何變化？

2. 已知 y 與 x 成反比，若 x 值增加 10%，則 y 值如何變化？

解

1. 設 $y = kx (k \neq 0)$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{k(1 + 10\%)x_1}{kx_1} = 110\%,$$

$$110\% - 100\% = 10\%$$

y 值增加 10%

2. 設 $xy = k (k \neq 0)$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{k}{(1 + 10\%)x_1}}{\frac{k}{x_1}} = \frac{x_1}{110\%x_1} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$$

y 值變為原來的 $\frac{10}{11}$ 倍

1. 已知 y 與 x 成正比，且當 $x = 4$ 時， $y = 7$ ，試問當 $x = 8$ 時， $y = ?$

2. 已知 y 與 x 成反比，且當 $x = 99$ 時， $y = 399$ ，試問當 $x = 399$ 時， $y = ?$

解

1. 令 $y = kx$

$$7 = k(4), k = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{7}{4}x,$$

$$\text{當 } x = 8 \text{ 時, } y = \frac{7}{4}(8) = \underline{14}$$

2. 令 $xy = k$

$$99(399) = k \Rightarrow xy = 99(399)$$

$$\text{當 } x = 399 \Rightarrow (399)y = 99(399), \underline{y = 99}$$

Let's Go!

同步評量

3

(D) 1. 下列何式表示 x 與 y 成反比？

(A) $2x - 4y = 7$ (B) $x - 5y = 0$ (C) $\frac{y}{x} = 5$ (D) $3xy + 5 = 0$

1. $3xy + 5 = 0, 3xy = -5, xy = -\frac{5}{3}, \therefore x$ 與 y 成反比

(A) 2. 若 y 與 $(x + a)$ 成反比，當 $x = 2$ 時， $y = 3$ ，且當 $y = 2$ 時， $x = 1$ ，求 a 之值為何？

(A) -4 (B) -2
(C) 2 (D) 4

2. 設 $(x + a)y = k$

$$x = 2, y = 3 \text{ 代入, 得 } (2 + a) \times 3 = k$$

$$x = 1, y = 2 \text{ 代入, 得 } (1 + a) \times 2 = k$$

$$\Rightarrow 3(2 + a) = 2(1 + a) \Rightarrow 6 + 3a = 2 + 2a, a = -4$$

(D) 3. 下列各式何者是 x 、 y 成反比的關係式？

(A) $y = \frac{3}{2}x$ (B) $2x - 3y = 0$ (C) $2x + 3y = 2$ (D) $2xy - 3 = 0$

3. (D) $2xy - 3 = 0 \Rightarrow xy = \frac{3}{2}$ 符合反比關係式

(C) 4. 若 x 與 y 是兩個變數，且滿足 $y = 2x + 3$ ，則下列敘述何者正確？

(A) y 與 x 成正比 (B) y 與 x 成反比
(C) y 與 $(x + \frac{3}{2})$ 成正比 (D) y 與 $(x + 3)$ 成正比

4. $y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2(x + \frac{3}{2})$
 $\Rightarrow y$ 與 $(x + \frac{3}{2})$ 成正比

(B) 5. 高鐵列車從臺中烏日站出發，若時速 270 公里，則 45 分鐘可到達臺北站。但因列車延誤 15 分鐘出發，請問駕駛應將時速提升為多少公里，才能如期到達臺北站呢？(假設高鐵極速可達 450 公里)

- (A) 400 (B) 405 (C) 410 (D) 415

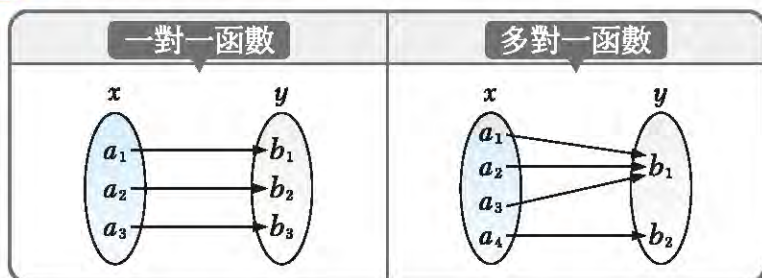
5. 設時速為 x ，時間為 y ，則 $xy = k (k \neq 0)$
 $270 \times 45 = k \Rightarrow xy = 270 \times 45 \Rightarrow x(45 - 15) = 270 \times 45$
 $\Rightarrow x = \frac{270 \times 45}{30} = 9 \times 45 = 405$ (公里)

能力四 函數與線型函數圖形

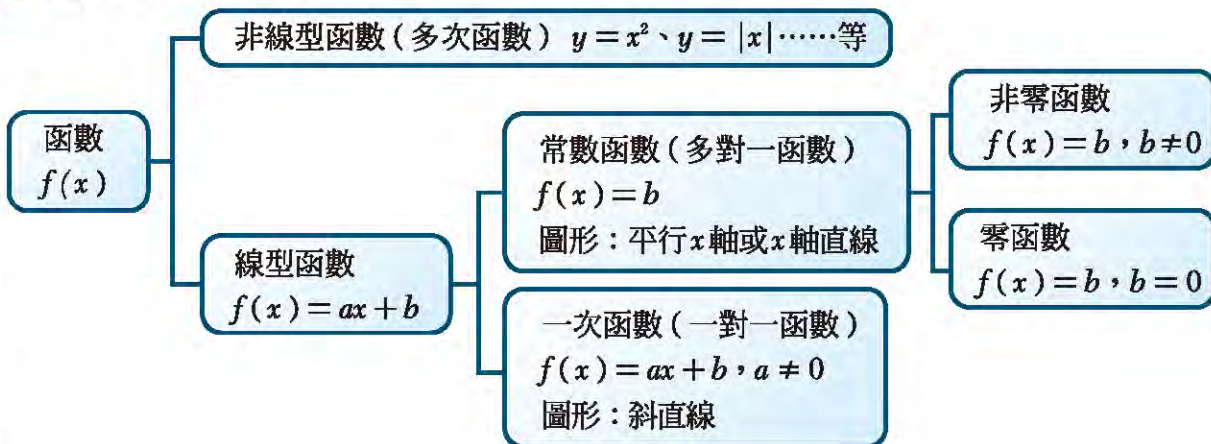
一 函數與變數

若 $y = f(x)$ 是 x 函數，給定自變數 x 一個值 a ，可從其對應關係中得到一個 y 值與它對應時，這個對應值稱為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 時的函數值，以 $f(a)$ 表示。

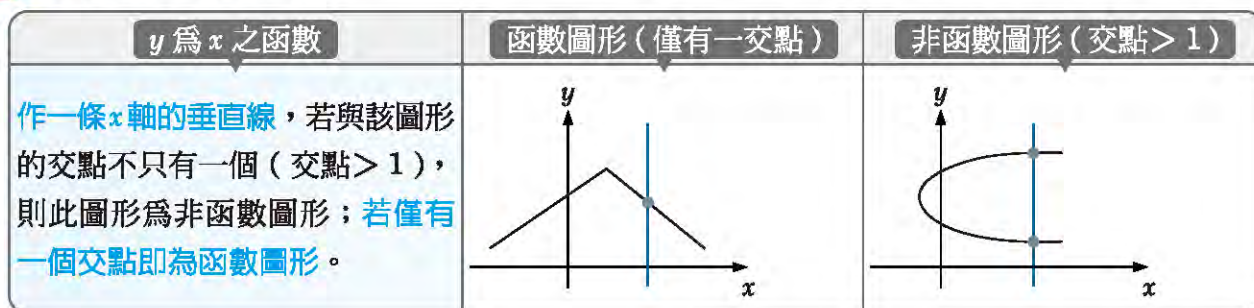
二 函數對應的種類



三 常見函數的類別



四 函數圖形的判別法



7

老師

傳授

函數的意義

學生

習作

7

已知函數 x 、 y 的關係如下表所示：請問：當 $x = 10$ 時， $y = b$ ，則 $b = ?$

x	1	2	3	4	5	10
y	8	11	14	17	20	b

解

觀察 x 與 y 的函數對應關係之後，可知每當 x 增加 1 時， y 則增加 3，因此， x 由 5 增加至 10 時， y 應增加 $5 \times 3 = 15$ ，故 $x = 10$ ， $y = 20 + 15 = 35$ ，則 $b = 35$

育偉原本有 5000 元的存款，因為想要買一臺 PS4，所以自 4 月 1 日起，每天存 50 元，設開始存款 x 天之後，他一共存有 y 元，請問：

- (1) x 與 y 的關係式為何呢？又 y 是否為 x 的函數呢？
- (2) 今年暑假 7 月 1 日（含）為止，共可存款多少元呢？

生活題

解

- (1) $y = 5000 + 50x$ ，對於每一個 x 值都僅有一個 y 值可對應，所以 y 是 x 的函數
- (2) $y = 5000 + 50 \times 92 = 9600$ (元) … [四月一日到七月一日共 $30 + 31 + 30 + 1 = 92$ 日]

解題小備方

x	1	2	3	...
y	1	3	5	...

⇒ 一對一函數 ⇒ x 增加 1， y 增加 2。

x	1	2	3	...
y	1	1	1	...

⇒ 多對一函數 ⇒ x 增加 1， y 值不變。

8

老師

傳授

函數的判別

學生

習作

8

下列各式中何者符合 y 是 x 的函數呢？

- (1) $2x + 3y = 5$
- (2) $xy = 3, x \neq 0$
- (3) $x^2 = y + 5$
- (4) $y^2 + 3x - 2 = 0$

解

$$(1) \because 2x + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$\therefore y$ 是 x 的函數

$$(2) xy = 3, x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad \therefore y \text{ 是 } x \text{ 的函數}$$

$$(3) x^2 = y + 5 \Rightarrow y = x^2 - 5 \quad \therefore y \text{ 是 } x \text{ 的函數}$$

$$(4) y^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = -3x + 2,$$

$$y = \pm \sqrt{-3x + 2}$$

$\therefore y$ 不是 x 的函數

(\because 每個 x 有兩個對應的 y 值)

下列 x 與 y 的關係式中，何者可以將 y 表示為 x 的函數呢？

- (1) $3|x| + y = 2$
- (2) $x^2 + y^2 = 2$
- (3) $y^2 = 5x$
- (4) $x^2 = 3y$

解

$$(1) 3|x| + y = 2 \Rightarrow y = -3|x| + 2$$

$\therefore y$ 是 x 的函數

$$(2) x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - x^2}$$

$\therefore y$ 不是 x 的函數

$$(3) y^2 = 5x \Rightarrow y = \pm \sqrt{5x} \quad \therefore y \text{ 不是 } x \text{ 的函數}$$

$$(4) x^2 = 3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2 \quad \therefore y \text{ 是 } x \text{ 的函數}$$

解題小備方

$y = f(x) = ax + b (a \neq 0) \Rightarrow$ 一對一函數。

$y = f(x) = b \Rightarrow$ 多對一函數。

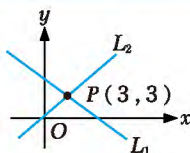
$y = f(x) = \pm \sqrt{ax + b} \Rightarrow$ 一對二(多) \Rightarrow 非函數。

9 老師傳授

函數圖形的判讀

學生寫作 9

如圖，在坐標平面上， L_1 為 $y = f(x)$ 的一次函數圖形， L_2 為 $y = g(x)$ 的一次函數圖形， L_1 、 L_2 相交於 $P(3, 3)$ ，若 $a > 3$ ，則下列敘述何者正確？



◎ 基測一

- (A) $f(a) - g(a) = a$ (B) $f(a) - g(a) = 3$
 (C) $f(a) = g(a)$ (D) $f(a) < g(a)$

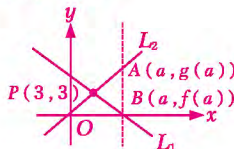
解

$\because a > 3$

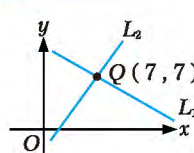
$\Rightarrow A(a, g(a))$ 在 $B(a, f(a))$ 的上方

$\Rightarrow g(a) > f(a)$

$\Rightarrow f(a) < g(a)$ 選(D)



如圖，在坐標平面上， L_1 為 $y = f(x)$ 的一次函數圖形， L_2 為 $y = g(x)$ 的一次函數圖形， L_1 、 L_2 相交於 $Q(7, 7)$ ，若 $n > 7$ ，則下列敘述何者正確？



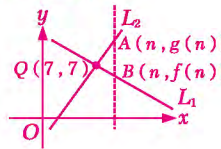
- (A) $f(n) = g(n)$ (B) $f(n) - n = g(n)$
 (C) $g(n) > f(n)$ (D) $f(n) - g(n) = 7$

解

$\because n > 7$

$\Rightarrow A(n, g(n))$ 在 $B(n, f(n))$ 的上方

$\Rightarrow g(n) > f(n)$ 選(C)

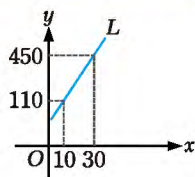


10 老師傳授

解讀線型函數圖形

學生寫作 10

如圖，設直線 L 為函數 $f(x) = ax + b$ 的圖形，試問 $f(4) = ?$

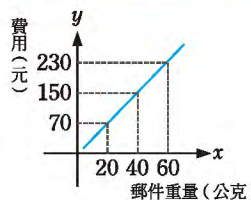


解

$$\begin{cases} 110 = 10a + b \\ 450 = 30a + b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 17, b = -60$
 $\Rightarrow f(x) = 17x - 60$,
 $f(4) = 17(4) - 60 = \underline{8}$

如圖，郵局快捷費用與郵件重量的關係為線型函數，由圖可知，郵件重量只要不超過多少公克就可免運？



解

生活題

令 $f(x) = y = ax + b$

$$\begin{cases} 70 = 20a + b \\ 150 = 40a + b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 4, b = -10$
 $\Rightarrow f(x) = y = 4x - 10$,
 令 $y = 0, x = \frac{10}{4} = \underline{2.5}$ (公克)

Let's Go! 同步評量 4

(C) 1. 下列哪一個式子不可用來表示 y 是 x 的函數呢？

- (A) $y = 5$ (B) $2x - 3 = y$ (C) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $y = 3x^2 - 1$

(A) 2. 下表是 1 年 18 班部分同學身高和體重的資料表，下列何者敘述錯誤？

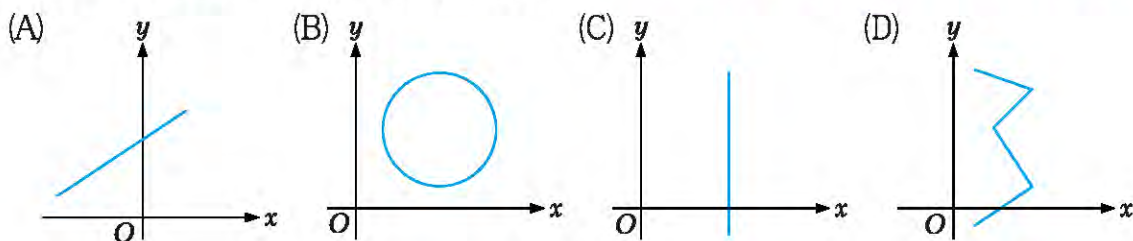
座號	15	16	17	18	19	20	21
體重 (kg)	54	49	54	51	48	48	54
身高 (cm)	149	152	160	153	160	152	156

- (A) 體重是身高的函數 (B) 體重是座號的函數
 (C) 身高是座號的函數 (D) 體重身高不成正比亦不成反比

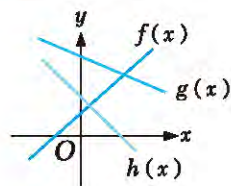
1. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{-4}{3}x^2 + 4 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{-4}{3}x^2 + 4}$

(A) 3. 請問：下列各圖中，何者為函數圖形？

3. 只有(A)，任作 x 軸的垂線，恰好均與圖形交於一點



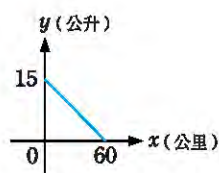
(D) 4. 右圖為坐標平面上函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的圖形，若 $f(x) = ax + b$ 、 $g(x) = cx + d$ 、 $h(x) = ex + k$ ，則 b 、 d 、 k 的大小關係為何？



- (A) $b > d > k$ (B) $b > k > d$ (C) $d > b > k$ (D) $d > k > b$

4. 由圖中三個線型函數與 y 軸交點可知， $d > k > b$

(C) 5. 若將機車加滿油後開始行駛，其行駛距離 x 公里，與剩餘油量 y 公升的關係為線型函數，如圖所示，則行駛 40 公里後，油量剩餘多少公升？



- (A) 3 (B) 4
(C) 5 (D) 6

5. 設 $y = f(x) = ax + b$
 $\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 15 \\ f(60) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 15 \\ 60a + b = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow 60a + 15 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = f(x) = -\frac{1}{4}x + 15$
 $\Rightarrow f(40) = -\frac{1}{4}(40) + 15 = 5$ (公升)

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(D) 1. 若 a 、 b 、 c 均不為 0。已知 $\frac{5}{a} = \frac{4}{b} = \frac{9}{c}$ ，求連比 $a : b : c$ 為何呢？

- (A) 2 : 5 : 9 (B) 4 : 5 : 9 (C) 9 : 4 : 5 (D) 5 : 4 : 9

1. $\therefore \frac{5}{a} = \frac{4}{b} = \frac{9}{c}$
 $\therefore a : b : c = 5 : 4 : 9$

(B) 2. 試求 $\frac{4}{3} : \frac{3x}{2} = 4 : 6$ 的 x 為何？

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $1\frac{1}{4}$ (D) $1\frac{2}{3}$

2. $\frac{4}{3} : \frac{3x}{2} = 4 : 6 \Rightarrow \frac{3x}{2} \times 4 = \frac{4}{3} \times 6$
 $\Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

(A) 3. 已知 $a : b : c = 2 : 5 : 7$ ，求 $(a + 3b - c) : (3a - b + c)$ 的比值為何呢？

- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{10}{3}$

3. $a : b : c = 2 : 5 : 7$ ，令 $a = 2r$ ， $b = 5r$ ， $c = 7r$
 $[2r + 3(5r) - 7r] : [3(2r) - 5r + 7r]$
 $= 10r : 8r$ ，其比值為 $\frac{5}{4}$

(C) 4. 若 x 與 y 不為零，且 $3x = 4y$ ，求 $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2)$ 之比值為何？

- (A) $\frac{7}{25}$ (B) $-\frac{7}{25}$
(C) $\frac{25}{7}$ (D) $-\frac{25}{7}$

4. $\therefore 3x = 4y \Rightarrow x : y = 4 : 3$ ，令 $x = 4r$ 、 $y = 3r$
 $\therefore (16r^2 + 9r^2) : (16r^2 - 9r^2) = 25r^2 : 7r^2 \Rightarrow$ 比值 $= \frac{25}{7}$

(D) 5. 假設 $3a = 2b$ ， $4b = 5c$ ，則 $a : b : c = ?$

- (A) 6 : 4 : 5 (B) 8 : 12 : 15 (C) 10 : 12 : 18 (D) 10 : 15 : 12

5. $a : b = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3$ ， $b : c = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 5 : 4$
 $\Rightarrow a : b : c = 10 : 15 : 12$

(D) 6. 若 $\frac{3x - 4}{y + 15} = k$ ，當 $x = 2$ 時，則 $y = 3$ ，若當 $y = 12$ ，則 x 為何？

- (A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{7}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{7}{3}$

6. $k = \frac{3 \times 2 - 4}{3 + 15} = \frac{1}{9}$ ，
 當 $y = 12$ 時， $\frac{3x - 4}{12 + 15} = \frac{1}{9}$ ， $x = \frac{7}{3}$

(B) 7. 已知 x 、 y 滿足表中關係：

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

，則當 $x=9$ 時， y 為

下列何者？

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{2}$

7. 已知 $xy=12$ ， $x=9$ 代入， $9y=12$ ， $y=\frac{4}{3}$

(C) 8. 設 a 、 b 兩數的差、和與積之比為 $1:4:15$ ，求此兩數之和為多少？

- (A) 12
(B) 14
(C) 16
(D) 18

8. $(a-b):(a+b):ab=1:4:15$

$$\begin{cases} a-b=r \dots ① \\ a+b=4r \dots ② \Rightarrow \text{由①, ②} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2}r \\ b=\frac{3}{2}r \end{cases} \Rightarrow \text{代入③} \Rightarrow \frac{15r^2}{4}=15r \\ ab=15r \dots ③ \end{cases}$$

$\therefore r \neq 0, \therefore r=4 \Rightarrow a=10, b=6, a+b=16$

(D) 9. 若 $10(b+c)=12(c+a)=15(a+b)$ ，求 $a:b:c$ 為？

- (A) 2:5:8
(B) 3:7:8
(C) 2:7:9
(D) 3:5:7

9. 令 $10(b+c)=12(c+a)=15(a+b)=120k$

$$\begin{cases} b+c=12k \dots ① \\ c+a=10k \dots ② \Rightarrow ①+②+③ \text{ 得 } 2(a+b+c)=30k \\ a+b=8k \dots ③ \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+c=15k \dots ④$

$\Rightarrow ④-① \Rightarrow a=3k, ④-② \Rightarrow b=5k, ④-③ \Rightarrow c=7k$

$\Rightarrow a:b:c=3:5:7$

※(C) 10. 將一瓶 3600c.c. 的奇異果汁依照 3:4:5 的比例分成三杯，則最大杯的奇異果汁有多少 c.c. 呢？

- (A) 900 (B) 1200
(C) 1500 (D) 1700

10. $3600 \times \frac{5}{3+4+5} = 1500$ (c.c.)

※(C) 11. 在 900 公克的水中，加入食鹽 100 公克，溶解成食鹽水溶液，請問：在此食鹽水溶液中再加入食鹽 200 公克，那麼此食鹽水溶液中「水」的重量所占的比率為多少%？

- (A) 20% (B) 25%
(C) 75% (D) 80%

11. 水所占比率 = $\frac{\text{水的重量}}{\text{食鹽水溶液的總重量}} = \frac{900}{900+(100+200)} \times 100\% = 75\%$

※(D) 12. 星巴克水果店準備一些裝有 5 個蘋果與 7 個水梨的水果禮盒，已知總共用了水梨 126 顆，請問：蘋果用了多少顆？

- (A) 176 (B) 167 (C) 160 (D) 90

12. $5:7 = \text{蘋果顆數}:126 \Rightarrow \text{蘋果顆數} = \frac{126 \times 5}{7} = 90$ (顆)

※(C) 13. 已知在地圖上，甲、乙兩地的距離為 1.7 公分，甲、丙兩地的距離為 2 公分。如果甲地與乙地的實際距離為 51 公里，那麼甲地與丙地的實際距離為多少公里？

- (A) 40 (B) 50
(C) 60 (D) 70

13. 設甲、丙兩地實際距離為 x ，則 $\frac{1.7}{2} = \frac{51}{x}$
 $\Rightarrow x = \frac{51 \times 2}{1.7} = 60$ (公里)

※(A) 14. 10 公斤的蘋果含鉀 1120 毫克，含鈉 7 毫克，則 10 磅的蘋果中，鉀和鈉的重量比值為何？(1 磅 = 0.45 公斤)

- (A) 160 (B) 72 (C) 356 (D) 270

14. 重量單位轉換不影響其比值，故 $\frac{\text{鉀}}{\text{鈉}} = \frac{1120}{7} = 160$

解題小

第 8 題： $x:y:z=a:b:c \Rightarrow$ 設 $x=ar$ 、 $y=br$ 、 $z=cr$ 。

第 9 題： $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \Rightarrow$ 設 $x=ak$ 、 $y=bk$ 、 $z=ck$ 。

- ※(A) 15. 過年時，爸媽要粉刷牆壁，爸爸用 9 罐白漆與 6 罐紅漆調和，媽媽用 14 罐白漆與 10 罐紅漆調和，試問誰調和的漆比較淺呢？
- (A) 爸爸 (B) 媽媽
(C) 一樣深淺 (D) 要實際調和才知，無法用算的

15. 爸爸：6 : 9 \Rightarrow 比值 $\frac{2}{3}$ ，
媽媽：10 : 14 \Rightarrow 比值 $\frac{5}{7}$
 $\Rightarrow \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$ ，爸爸調的比較淺



- (D) 1. 有甲、乙、丙三數，其中甲 \times 乙 = 108，甲 \times 丙 = 270，求 $2 \times$ 乙 : $5 \times$ 丙 = ?

- (A) 2 : 3 (B) 3 : 5
(C) 5 : 3 (D) 4 : 25

1. 乙 = $\frac{108}{甲}$ ，丙 = $\frac{270}{甲}$ ，
 $\therefore 2 \times$ 乙 : $5 \times$ 丙 = $\frac{2 \times 108}{甲} : \frac{5 \times 270}{甲} = 4 : 25$ ，故選(D)

98 基測二

- (A) 2. 某校一年級有 64 人，分成甲、乙、丙三隊，其人數比為 4 : 5 : 7。若由外校轉入 1 人加入乙隊，則後來乙與丙的人數比為何？

- (A) 3 : 4 (B) 4 : 5
(C) 5 : 6 (D) 6 : 7

2. 設甲隊有 $4r$ 人、乙隊有 $5r$ 人、丙隊有 $7r$ 人
則 $4r + 5r + 7r = 16r = 64$ ， $r = 4$
後來乙隊有 $4 \times 5 + 1 = 21$ 、丙隊有 $4 \times 7 = 28$
所求 = $21 : 28 = 3 : 4$

96 基測一

- (C) 3. 若 $a : b = 3 : 2$ ， $b : c = 5 : 4$ ，則 $a : b : c = ?$

- (A) 3 : 2 : 4 (B) 6 : 5 : 4
(C) 15 : 10 : 8 (D) 15 : 10 : 12

3. $a : b = 3 : 2$
 $b : c = 5 : 4$
 $a : b : c = 15 : 10 : 8$

97 基測一

- ※(A) 4. 二年級學生共有 540 人，某次露營有 81 人沒有參加，則沒參加露營人數和全部二年級學生人數的比值為何？

- (A) $\frac{3}{20}$ (B) $\frac{20}{17}$ (C) $\frac{17}{20}$ (D) $\frac{3}{17}$

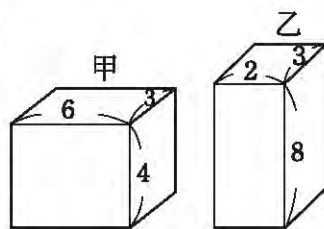
4. 比值 = $\frac{81}{540} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$

97 基測一

- (B) 5. 右圖為甲、乙兩個長方體，依圖中所給的邊長長度（單位：公分），計算甲體積與乙體積的比值為何？

- (A) 1
(B) 1.5
(C) 2
(D) 2.5

5. $\frac{甲體積}{乙體積} = \frac{6 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 8} = \frac{3}{2} = 1.5$



96 基測二

- (C) 6. 已知甲、乙、丙三人的錢數比為 3 : 5 : 6。若丙分別給甲、乙兩人各 30 元後，甲、乙、丙的錢數比變為 7 : 11 : 10，則此三人共有多少元？

- (A) 420 (B) 630
(C) 840 (D) 1260

6. 設甲原有 $3r$ 元，乙原有 $5r$ 元，丙原有 $6r$ 元。
 $(3r + 30) : (5r + 30) : (6r - 60) = 7 : 11 : 10$ ，
由 $(3r + 30) : (5r + 30) = 7 : 11$ 得 $r = 60$ ，
三人共有 $3r + 5r + 6r = 14r = 14 \times 60 = 840$

95 基測二

- ※(D) 7. 兩個罐子裝有相同重量的酒精溶液，其中水與酒精的重量比分別為 3 : 1 和 1 : 1，若將這兩罐溶液全倒入一個較大的容器中且沒有溢出，則後來所得的混合液中，水與酒精的重量比為何？

- (A) 2 : 1 (B) 3 : 2
(C) 4 : 1 (D) 5 : 3

7. 設第一罐的水為 $3r$ 、酒 r ，第二罐的水 s 、酒 s 。
混合後 \Rightarrow 水 : 酒 = $(3r + s) : (r + s) \dots \textcircled{1}$
 \therefore 兩罐重量相同， $\therefore 3r + r = s + s$ ， $s = 2r$ 代入 $\textcircled{1}$ ，
水 : 酒 = $(3r + 2r) : (r + 2r) = 5 : 3$

92 基測二

- ※(B) 8. 某校一年級與二年級的學生人數比為3:2, 已知一年級的學生中, 有40%視力良好, 二年級的學生中, 有30%視力良好。請問: 一、二年級所有學生中有多少比例的學生視力良好?

(A) 18% (B) 36%
(C) 57% (D) 70%

8. 設一年級有 $3x$ 人, 二年級有 $2x$ 人, 一年級視力良好的有 $3x \times 0.4 = 1.2x$, 二年級視力良好的有 $2x \times 0.3 = 0.6x$,
 \therefore 視力良好的有 $\frac{1.2x + 0.6x}{5x} = \frac{1.8x}{5x} = 0.36 \Rightarrow 36\%$

12 基測一



- (D) 1. 若 $xyz \neq 0$, 且 $2x = 3y = 5z$, 則 $x : y : z = ?$

(A) 3 : 5 : 2 (B) 5 : 3 : 2
(C) 5 : 6 : 10 (D) 15 : 10 : 6

$$1. x : y : z = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 15 : 10 : 6$$

- ◎(A) 2. 設 a, b, c 為整數, 且 $a : b = b : c$, 若 $a : (a + b) : c = 9 : x : 4$, 請問: $x = ?$

(A) 15 (B) 14
(C) 13 (D) 12

$$2. \text{設 } a = 9k, c = 4k \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{9k \times 4k} = 6k \\ a + b = 9k + 6k = 15k, x = 15$$

- (A) 3. 若 $a : b : c = 3 : 4 : 7$ 且 $xyz \neq 0$, $ax = by = cz$, 則 $x : y : z$ 與下列何者相同?

(A) 28 : 21 : 12 (B) 12 : 15 : 20
(C) 20 : 12 : 15 (D) 15 : 12 : 20

$$3. x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = 28 : 21 : 12$$

- (B) 4. 若 $x : y : z = 4 : 3 : 5$, 且 $2x + y + 3z = 312$, 則下列敘述何者正確?

(A) $x = 40$ (B) $y = 36$
(C) $z = 50$ (D) $x + y + z = 192$

$$4. \text{設 } x = 4r, y = 3r, z = 5r, \therefore 8r + 3r + 15r = 312, \\ r = 12, \therefore x = 48, y = 36, z = 60, \\ x + y + z = 12r = 144$$

- (B) 5. $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 18$, $\overline{AC} = 36$, 設 \overline{AB} 上的高為 p , \overline{BC} 上的高為 q , \overline{AC} 上的高為 r , 則 $p : q : r = ?$

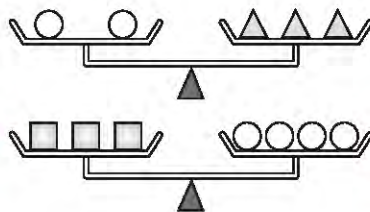
(A) 3 : 4 : 5 (B) 3 : 2 : 1
(C) 6 : 3 : 4 (D) 7 : 8 : 9

$$5. p : q : r = \frac{1}{12} : \frac{1}{18} : \frac{1}{36} = 3 : 2 : 1 \text{ (面積一定, 底邊長和高成反比)}$$

- ※(C) 6. 今有同規格但形狀有正方形、圓形、三角形三種積木, 置於等臂天平兩側, 呈平衡狀態, 如右圖, 請問: 三種積木的重量比 $\square : \bigcirc : \triangle = ?$

(A) 8 : 6 : 9 (B) 3 : 2 : 4
(C) 4 : 3 : 2 (D) 9 : 12 : 8

$$6. \text{設 } \square = x, \bigcirc = y, \triangle = z; \\ 2y = 3x \Rightarrow y : z = 3 : 2, \\ 3x = 4y \Rightarrow x : y = 4 : 3, \\ \therefore x : y : z = 4 : 3 : 2$$



- ※(B) 7. 吉米想要買一臺2250元的CD隨身聽, 取出存錢筒的錢後發現仍不夠, 於是他便計畫每天存 a 元, 若存了20天後, 仍不夠450元, 存了30天後還差300元, 請問: $a = ?$

(A) 10 (B) 15
(C) 20 (D) 25

$$7. \text{由題意可知 } 30 \text{ 天後比 } 20 \text{ 天後多存了 } 150 \text{ 元,} \\ \text{可得 } a : 150 = 1 : 10 \therefore 10a = 150 \Rightarrow a = 15$$

- #(B) 8. 已知圖中四塊長方形的面積分別是 $x, y, 5, 10$, 試求出 $\frac{y-x}{y+x}$ 為何呢?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

$$8. \text{如圖兩塊面積 } 5 \text{ 與 } 10 \text{ 之圖形上側兩塊面積比是 } 1 : 2 = x : y, \\ \text{所以 } \frac{y-x}{y+x} = \frac{2x-x}{2x+x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

x	y
5	10

(C) 9. 若 $xyz \neq 0$ ，且 $3xy = 5yz = 11xz$ ，則 $(x + y + z) : z$ 的比值為何？

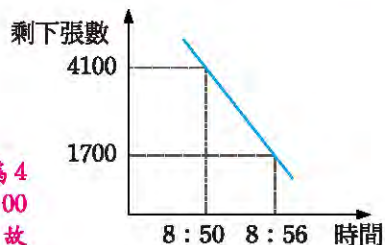
- (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{2}{15}$
 (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{3}{19}$

9. $3xy = 5yz = 11xz$ 同除以 $xyz \Rightarrow \frac{3}{z} = \frac{5}{x} = \frac{11}{y}$
 $\therefore (x + y + z) : z = (5 + 11 + 3) : 3 = 19 : 3 \Rightarrow$ 比值為 $\frac{19}{3}$

※(A) 10. 右圖為宇倫影印資料剩下張數和時間的關係圖。利用圖中所提供的數據，推估宇倫在 9:00 時影印的情形是下列哪一種？

- (A) 來不及印完
 (B) 剛好印完
 (C) 提前 1 分鐘印完
 (D) 提前半分鐘印完

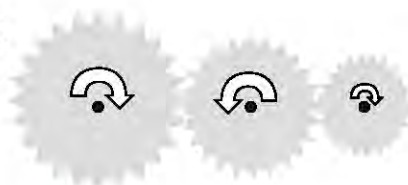
10. 印的張數與時間成正比，
 $\therefore 8:50 \sim 8:56$ 為 6 分鐘， $8:56 \sim 9:00$ 為 4 分鐘， $4100 - 1700 = 2400$ ，設 $8:56 \sim 9:00$ 可印 x 張， $\therefore 2400 : 6 = x : 4 \Rightarrow x = 1600$ ，故來不及印完



◎(D) 11. 如右圖，有三種齒輪，齒數分別為 186、78、24 齒，大齒輪順時針旋轉 16 圈，請問：小齒輪旋轉幾圈呢？（註：旋轉方向相同時，齒數與旋轉圈數成反比）

- (A) 118 (B) 120
 (C) 122 (D) 124

11. 旋轉方向相同，齒數與圈數成反比。
 設小齒輪旋轉圈數為 x ， $\frac{16}{x} = \frac{24}{186} \Rightarrow x = 124$

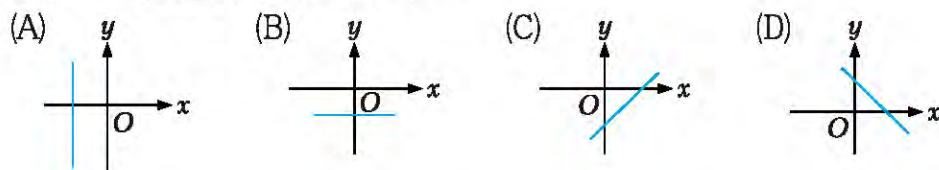


(C) 12. 甲： $y = \frac{500}{x}$ ，乙： $3x - 9y = 0$ ，丙： $y = x$ ，丁： $y = 2x^2$ ，戊： $y = 3x + 1$ ，上述五個函數中，函數圖形通過原點的有幾個？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 乙、丙、丁共 3 個，甲函數中的 x 不可為 0

(A) 13. 下列何者不是線型函數的圖形？



13. 鉛直線非函數圖形

※(B) 14. 根據自然課本所提到的溫度變化，由地面算起，每升高 100 公尺，氣溫下降 0.6°C ，若目前地面上的溫度是 26°C ，海拔 x 公尺的高山上是 $y^\circ\text{C}$ 。請根據題意寫出 y 與 x 的關係並求出在海拔 3000 公尺的高山上氣溫多少 $^\circ\text{C}$ ？

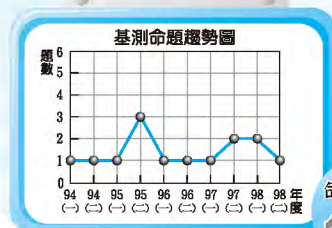
- (A) $y = 26 + 0.006x$ ， 18°C (B) $y = 26 - 0.006x$ ， 8°C
 (C) $y = 26 + 0.06x$ ， 18°C (D) $y = 26 - 0.06x$ ， 8°C

14. (1) $y = 26 - \frac{0.6}{100}x \Rightarrow y = 26 - 0.006x$
 (2) $y = 26 - 0.006x$ ，將 $x = 3000$ 代入
 $\Rightarrow y = 26 - 0.006 \times 3000 = 8 (^\circ\text{C})$

※(C) 15. 喜樂國中第二次段考數學成績低落，史老師利用線型函數 $y = ax + b$ 來提高全班的數學成績，小樂原本考 85 分，提高後變成 100 分，大宏原本考 51 分提高後成為 64 分，請問：詩涵提高後分數是 46 分，詩涵原本考幾分？

- (A) 32
 (B) 33
 (C) 34
 (D) 35

15. 原本考 x 分，調整後成為 y 分
 $y = ax + b$ 得 $\begin{cases} 85a + b = 100 \dots \textcircled{1} \\ 51a + b = 64 \dots \textcircled{2} \end{cases}$ ， $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得 $34a = 36$ ， $a = \frac{18}{17}$ 代入 $\textcircled{1}$ ，
 $90 + b = 100$ ， $b = 10 \Rightarrow y = \frac{18}{17}x + 10$
 提高後分數 $y = 46$ ， $46 = \frac{18}{17}x + 10$ ， $\frac{18}{17}x = 36$ ， $x = 36 \times \frac{17}{18} = 34$ (分)



命題率
100%

能力 — 一元一次不等式

一 不等式的符號介紹

凡在數學式中出现「 $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 、 \neq 」不等號的式子，即稱為不等式。

符號	$>$	$<$	\geq	\leq	\neq
語意	大於	小於	大於等於	小於等於	不等於
	超過	未滿	不小於	不大於	不是
	高於	低於	以上(含)	以下(含)	非

二 一元一次不等式

- 一元一次不等式係指含有一個未知數的不等式，而且未知數的最高次方為一次方，型如：
 $ax + b < 0$ 。
- 一元一次不等式的解，通常為一個區間或範圍，若未限定「解」的性質（如：正整數、負整數等等），此範圍內的數皆為一元一次不等式的解；其解的形式如下表：

(1) $a \leq x < b$		(2) $x < a$ 或 $x \geq b$	
(3) $x \leq a$		(4) $x \geq b$	

- 不等式的列式與一元一次方程式的列式意思相同，但須考慮相關已知條件與未知數之大小關係。**提醒同學們！不要忽略題目中「未提及的條件」，因為很有可能它們也是必要的條件之一。**

例 1：有一等腰三角形，已知其為鈍角三角形，求其底角的大小範圍為何呢？

解 設底角為 x° $\therefore x^\circ < 90^\circ \therefore 180^\circ - 2x^\circ > 90^\circ, -2x^\circ > -90^\circ, x^\circ < 45^\circ$ ，

別忘了！ $0^\circ < x^\circ < 45^\circ$

老師 傳授

滿足不等式的值

學生 實作

下列各數 -1 、 1 、 2 ，哪些數滿足不等式 $5x - 7 > 2$ 呢？

解

(1) $5 \times (-1) - 7 = -12, -12 < 2$

(2) $5 \times 1 - 7 = -2, -2 < 2$

(3) $5 \times 2 - 7 = 3, 3 > 2$

\therefore 只有 2 滿足 $5x - 7 > 2$

下列各數 -8 、 8 ，哪些數滿足不等式 $2(x - 3) + 3 > (x - 1) + 3$ 呢？

解

(1) $\begin{cases} 2[(-8) - 3] + 3 = -19 \\ [(-8) - 1] + 3 = -6 \end{cases}$
 $\Rightarrow -19 < -6$ ，不成立

(2) $\begin{cases} 2(8 - 3) + 3 = 13 \\ (8 - 1) + 3 = 10 \end{cases}$
 $\Rightarrow 13 > 10$ ，成立

\therefore 只有 8 滿足

2 老師 傳授

依題意列不等式

學生 實作

2

小華每天開車往返台北與新竹，全程共計 105 公里，若公路的速限規定在 $50 \sim 70 \text{ km/hr}$ (含 50、70) 之間 (不含等紅燈的時間)，若在速限之內走完全程，令共花費時間為 t ，則其不等式為何？

生活題

解

依據速度公式 $s = vt$ ， $t = \frac{s}{v}$ 可知，

$$\begin{cases} t_{\text{最短}} = \frac{105}{70} = 1.5 \text{ (小時)} \\ t_{\text{最長}} = \frac{105}{50} = 2.1 \text{ (小時)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1.5 \leq t \leq 2.1$$



1. 已知 $a + 3 < 0$ ， $b - 3 < 0$ ，則下列何者一定為正數呢？ (D)。

(A) $a + 1$ (B) $a + 4$ (C) $b - 2$ (D) $-b + 5$

2. 能夠滿足 $x \geq -3$ 且 $x < -2$ 的整數 x 有多少個呢？ 1。 2. 當 $x \geq -3$ 且 $x < -2$ 時， $-3 \leq x < -2$ ， $x = -3$ (1 個)

3. 在 0 ， $\frac{5}{4}$ ， $\frac{4}{3}$ 這三個數中，哪些是不等式 $-2 < 3x - 2$ 的解？ $\frac{5}{4}$ ， $\frac{4}{3}$ 。

4. 育杰的父親今年 x 歲，五年後父親還不到退休的年齡 65 歲，依敘述可列出 x 的不等式為 $x + 5 < 65$ 。

5. 啓倫買了一包洋芋片，其包裝標示重量為 30 ± 2 (克)，若以 x 表示洋芋片的實際重量的範圍，則可列出不等式為 $28 \leq x \leq 32$ 。

愛跑運動飲料，其營養成分的標示中，鈉離子的含量為每 1 公克有 2 ± 0.5 (毫克)，假設一罐愛跑運動飲料為 150 (公克)，令其鈉離子含量為 x (公克)，請以不等式表示。(1 公克 = 1000 毫克)

生活題

解

假設一罐飲料的鈉離子含量為 x 公克

$$\begin{cases} \text{鈉最多} = 150 \times (2 + 0.5) = 375 \text{ (毫克)} = 0.375 \text{ (公克)} \\ \text{鈉最少} = 150 \times (2 - 0.5) = 225 \text{ (毫克)} = 0.225 \text{ (公克)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.225 \leq x \leq 0.375 \text{ (公克)}$$

3. 0 代入 $3x - 2$ 得 $3(0) - 2 = -2$ ， -2 不在範圍內

$\frac{5}{4}$ 代入 $3x - 2$ 得 $3(\frac{5}{4}) - 2 = \frac{15 - 8}{4} = \frac{7}{4}$ ， $\frac{7}{4}$ 在範圍內

$\frac{4}{3}$ 代入 $3x - 2$ 得 $3(\frac{4}{3}) - 2 = 4 - 2 = 2$ ， 2 在範圍內

能力 一元一次不等式的性質

一 不等量的遞移性

假設有 a 、 b 、 c 三個實數，依據不等量的遞移性有下列情況：

條件	結果
(1) 當 $a > b$ 且 $b > c$	$a > c$
(2) 當 $a \geq b$ 且 $b \geq c$	$a \geq c$
(3) 當 $a \geq b$ 且 $b \geq a$	$a = b$
(4) 當 $a > b$ 且 $b > a$	矛盾 (不成立)

二 不等式的運算性質

假設 $a > b$ ，依據不等量公理，有下列情形：

(1) $a + c > b + c$

(2) $a - c > b - c$

(3) 當 $c > 0$ 時 $\Rightarrow \begin{cases} a \times c > b \times c \\ a \div c > b \div c \end{cases}$

(4) 當 $c < 0$ 時 $\Rightarrow \begin{cases} a \times c < b \times c \\ a \div c < b \div c \end{cases} \Rightarrow$ (乘除負數時「不等號」要變向)

三 一元一次不等式的圖解

不等式	(1) $x > k$	(2) $x \geq k$	(3) $x < k$	(4) $x \leq k$
圖例				
不等式	(5) $ x \geq k$ 且 $k \geq 0 \Leftrightarrow x \geq k$ 或 $x \leq -k$		(6) $ x \leq k$ 且 $k \geq 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$	
圖例				

3 老師傳授

不等量的遞移性

學生習作

假設有 a, b, c 三個正整數及 x, y, z 三個負整數，已知 b 大於 a ，而 c 不大於 a ，又 x 小於 y ，且 y 不大於 z ，請問： b, c 及 x, z 的大小關係。

解

(1) $\because b > a$ 且 $a \geq c \quad \therefore \underline{b > c}$

(2) $\because x < y$ 且 $y \leq z \quad \therefore \underline{x < z}$

假設 a, b, c 是三個正數，若 $a = \frac{1}{3}b, b = \frac{1}{2}c$ ，試比較此三數的大小關係。

解

$\because a = \frac{1}{3}b$ 且 $b > 0 \quad \therefore a < b,$

$\because b = \frac{1}{2}c$ 且 $c > 0 \quad \therefore b < c \quad \therefore \underline{a < b < c}$

4 老師傳授

不等式的運算

學生習作

假設不等式 $-3 < a < 5$ ，求下列各式的範圍為何？

(1) $-3a$ (2) $4a - 4$ (3) $7 - 2a$

解

(1) 將原式同乘 -3

$(-3) \times (-3) > (-3)a > 5 \times (-3),$
 $\underline{9 > -3a > -15}$

(2) $4 \times (-3) < 4a < 4 \times 5,$
 $-12 - 4 < 4a - 4 < 20 - 4,$
 $\underline{-16 < 4a - 4 < 16}$

(3) $(-3) \times (-2) > (-2)a > 5 \times (-2),$
 $6 + 7 > 7 - 2a > (-10) + 7,$
 $\underline{13 > 7 - 2a > -3}$

假設 $1 \leq a \leq 4$ ，試求 $-3a - 2$ 的最大與最小的整數值為何？

解

原式 $\Rightarrow 1 \times (-3) \geq -3a \geq 4 \times (-3)$

$\Rightarrow -3 \geq -3a \geq -12,$

$\Rightarrow -3 - 2 \geq -3a - 2 \geq -12 - 2$

$\Rightarrow -5 \geq -3a - 2 \geq -14$

$-3a - 2$ 的 最大整數值為 -5 ，最小整數值為 -14

5 老師 傳授

不等式的整數解與圖示


學生 實作 5

若要滿足 $-1 \leq x \leq k$ 的整數 x 共有 6 個，則不等式的解有哪些整數呢？若 k 為整數，試畫出不等式的圖示。

解


$$\because -1 \leq x \leq k$$

$\therefore -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 共有 6 個整數

x 介於 $-1 \sim 4$ ，圖示如右 

若 $a < x \leq b$ ，其中 a, b 為整數，且滿足 x 的所有整數解為 $-12, -11, -10, \dots, 0, 1, 2$ ，請寫出不等式及其圖示為何？

解

$-13 < x \leq 2$ ，圖示如右 



同步 評量 2

- 已知 $-2 < a < 1$ ，且 $P = 1 - 2a$ ，求 P 的範圍為 $-1 < P < 5$ 。
1. $-2 < a < 1, -2 < -2a < 4, -1 < 1 - 2a < 5$
- 已知 $3 < a < 8, 5 < b < 10$ ，試完成下列各式的範圍。
 - $8 < a + b < 18$ 。
2. (1) $3 + 5 < a + b < 8 + 10, 8 < a + b < 18$
 - $-7 < a - b < 3$ 。
(2) $-5 > -b > -10, -10 < -b < -5, 3 + (-10) < a + (-b) < 8 + (-5) \Rightarrow -7 < a - b < 3$
 - $19 < 3a + 2b < 44$ 。
(3) $9 < 3a < 24, 10 < 2b < 20 \Rightarrow 9 + 10 < 3a + 2b < 24 + 20 \Rightarrow 19 < 3a + 2b < 44$
 - $-3 < b - a < 7$ 。
(4) $-3 > -a > -8, -8 < -a < -3, 5 + (-8) < b + (-a) < 10 + (-3) \Rightarrow -3 < b - a < 7$
- 已知 $-9 \leq x \leq 5$ ，則 $|x|$ 的最大值為 9。
3. $\because |-9| = 9, |5| = 5, \therefore |x|$ 的最大值為 9
- 假設 $-1 < a < 0$ ，則 $a, -a, \frac{1}{a}, a^2$ 四數中，何者最大？ $-a$ 。
4. $-a > a^2 > 0 > a > \frac{1}{a}$
- 若 2、8、 x 為三角形的三邊長，且 x 為正整數，則 x 為 7、8、9。
5. $\because 8 - 2 < x < 8 + 2, 6 < x < 10, \therefore x = 7, 8, 9$



解一元一次不等式與應用

一 解一元一次不等式的步驟

- 認明不等式題型：若一數學式中含有兩個不等號時，就以聯立方程式處理。若單純僅有一個不等號，即以一元一次方程式處理。
- 分數型之不等式：若遇到有分數時，將全式乘以分母之最小公倍數。
- 小數型之不等式：若遇小數時，將全式乘以 10^n 。
- 化簡之步驟：執行步驟 2、3。將相關係數化為整數後，再按照去括號法則或分配律進行化簡。
- 移項整理之步驟：以移項性質，將含有未知數的項移到不等號的任何一邊後，再合併或化簡。

小叮嚀

需注意未知數前的係數，若為負數時，移項時需將不等號變向。

- 以不等量公理驗證：最後再次檢驗「不等號的方向」是否正確。

二 一元一次不等式解的情況

假設有一元一次不等式 $ax \geq b$ ，其解有下列情況：

1. 當 $a > 0 \Rightarrow x \geq \frac{b}{a}$
2. 當 $a < 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{a} \Rightarrow$ (不等號要變向)
3. 當 $a = 0, b \leq 0 \Rightarrow x$ 為任意實數
4. 當 $a = 0, b > 0 \Rightarrow x$ 無解

6

老師

傳授

解一元一次不等式

學生

寫作

6

解下列一元一次不等式：

- (1) $8(x-1) \leq 3(2x-3) + 4$
- (2) $3 - (2x-1) \geq \frac{1}{2}(22x - \frac{2}{3})$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow 8x - 8 \leq 6x - 9 + 4 \Rightarrow 2x \leq -5 + 8$
 $\Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$
- (2) 原式 $\Rightarrow 3 - 2x + 1 \geq 11x - \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow 3 + 1 + \frac{1}{3} \geq 13x$
 $\Rightarrow \frac{13}{3} \geq 13x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

解下列一元一次不等式：

- (1) $2(x-3) < 3(x+2)$
- (2) $\frac{2}{3}x - 1 > \frac{6}{7}x - 2$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow 2x - 6 < 3x + 6$
 $\Rightarrow -6 - 6 < 3x - 2x \Rightarrow x > -12$
- (2) 原式 $\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{6}{7}x > -1 \Rightarrow \frac{14-18}{21}x > -1$
 $\Rightarrow x < -1 \times (\frac{21}{-4}) \Rightarrow x < \frac{21}{4}$

7

老師

傳授

解一元一次聯立不等式

學生

寫作

7

解下列一元一次聯立不等式：

- (1) $-20 < -4x + 6 < 20$
- (2) $7 - x < 14 + 2x \leq 4x + 22$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow -26 < -4x < 14$
 $\Rightarrow \frac{-26}{-4} > x > \frac{14}{-4} \Rightarrow \frac{13}{2} > x > -\frac{7}{2}$
- (2) 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 7 - x < 14 + 2x \\ 14 + 2x \leq 4x + 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 < 3x \\ -8 \leq 2x \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} < x \\ -4 \leq x \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{3} < x$

解下列一元一次聯立不等式：

- (1) $7x - 10 \leq 3(-x - 2) < 10$
- (2) $2 - x < 8 < 7 - 9x$

解

- (1) 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 7x - 10 \leq -3x - 6 \\ -3x - 6 < 10 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} 10x \leq 4 \\ -3x < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{5} \\ x > -\frac{16}{3} \end{cases}$
 $\Rightarrow -\frac{16}{3} < x \leq \frac{2}{5}$
- (2) 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 2 - x < 8 \\ 7 - 9x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ -9x > 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x < -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow -6 < x < -\frac{1}{9}$

$$(3) 2 < \frac{2x-3}{5} \leq 8$$

解

$$\begin{aligned} (3) \text{原式同乘以 } 5 &\Rightarrow 10 < 2x-3 \leq 40 \\ &\Rightarrow 13 < 2x \leq 43 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{13}{2} < x \leq \frac{43}{2}}} \end{aligned}$$

$$(3) m = 2x + 8, \text{ 且 } -1 < 2-x < 8, \text{ 求 } m = ?$$

解

$$\begin{aligned} (3) m = 2x + 8 &\Rightarrow x = \frac{m-8}{2}, \\ -1 < 2 - \frac{m-8}{2} &< 8 \\ \Rightarrow -1 < \frac{4-m+8}{2} < 8 &\Rightarrow -2 < 12-m < 16 \\ \Rightarrow -14 < -m < 4 &\Rightarrow \underline{\underline{14 > m > -4}} \end{aligned}$$

8 老師傳授

一元一次不等式應用問題 I

學生寫作

若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，且已知三內角的關係為 $\angle A = \angle C < \angle B$ ，請問： $\angle A$ 的範圍為何？

解

$$\begin{aligned} \because \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ, \\ \therefore \angle A + \angle C > 90^\circ &\Rightarrow \angle A + \angle A > 90^\circ, \\ \Rightarrow \angle A > 45^\circ \\ \because \angle A + \angle C + (\angle A) &< 180^\circ, \\ \therefore \angle A + \angle A + \angle A &< 180^\circ, 3\angle A < 180^\circ, \\ \Rightarrow \angle A < 60^\circ &\Rightarrow \underline{\underline{45^\circ < \angle A < 60^\circ}} \end{aligned}$$

已知 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，且 $\angle A < \angle B < \angle C$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle C$ 的範圍？

解

$$\begin{aligned} \because \angle A < \angle B < \angle C \\ \therefore \begin{cases} 3\angle A < \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \\ 3\angle C > \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \end{cases} \\ \therefore \angle A < 60^\circ, \angle C > 60^\circ, \\ \text{且 } \angle A > 0^\circ, \angle C < 90^\circ \\ \Rightarrow \underline{\underline{0^\circ < \angle A < 60^\circ, 60^\circ < \angle C < 90^\circ}} \end{aligned}$$

9 老師傳授

一元一次不等式應用問題 II

學生寫作

櫻怡全家及親戚一起到日月潭露營，傍晚分配帳篷時出現狀況。如果每頂帳篷睡 5 個人，則有 7 個人沒得睡；如果每頂帳篷睡 6 個人，則有 1 頂帳篷沒睡滿，請問：他們最多及最少帶了幾頂帳篷呢？

生活題

解

$$\begin{aligned} \text{設有 } x \text{ 頂帳篷，全部的人數為 } (5x+7) \text{ 人} \\ 1 \leq (5x+7) - 6(x-1) < 6, \\ 1 \leq 5x+7-6x+6 < 6 &\Rightarrow 1 \leq -x+13 < 6 \\ -12 \leq -x < -7, 12 \geq x > 7 \\ \therefore \underline{\underline{\text{最多帶了 } 12 \text{ 頂帳篷，最少帶了 } 8 \text{ 頂帳篷}}} \end{aligned}$$

一年十八班辦班級慶生會，老師帶了柳橙汁 1000 毫升，其濃度為 15%，因為濃度太濃，所以加入了礦泉水 x 毫升之後，濃度低於 10%，請問：加入礦泉水 x 的範圍為何？

生活題

解

$$\begin{aligned} \frac{1000 \times 15\%}{1000+x} < 10\% \\ 1000 \times 15\% < (1000+x) \times 10\% \\ 150 < 100 + 0.1x, 50 < 0.1x, \underline{\underline{500 < x}} \end{aligned}$$

Let's Go! 同步評量 3

1. 滿足 $-2 < \frac{1}{3}(x+3) - 1 < 6$ 的最大整數 x 為何？ 17。

2. 若 a 是正整數，且 $\frac{1}{3} < \frac{6}{a} < \frac{3}{4}$ ，則 a 的個數有 9 個。

3. 因為油價上漲，良宜的父親挑選優惠最多的 Lexus 加油站加油，每次加油滿 600 元，可獲贈面紙一盒，若良宜的父親加油花了 x 元，獲得 5 盒面紙，則 x 的範圍 $3000 \leq x < 3600$ 。

$$3. 600 \times 5 \leq x < 600 \times 6, 3000 \leq x < 3600$$

4. 若 $a+5, a, a-5$, 為三角形的三邊長, 求 a 的範圍 $a > 10$ 。
4. $\because a-5 > 0, a+5 < a+(a-5) \Rightarrow a > 5$ or $10 < a \Rightarrow$ 取 $a > 10$
5. 本學期數學週考有 4 次, 雅姿前 3 次的成績為 65、76、83, 若想要平均成績達到 80 分(含)以上, 請問: 第 4 次成績的範圍? (設第 4 次成績為 x , 總分為 100 分)
- $96 \leq x \leq 100$ 。
5. $\because (65+76+83+x) \div 4 \geq 80, 224+x \geq 320,$
 $x \geq 96$ 且 $x \leq 100 \therefore 96 \leq x \leq 100$

實力評量

基本觀念題

1. $2x-3 > 7 > 13-6x \Rightarrow \begin{cases} 2x > 10 \\ 7 > 13-6x \end{cases}$ 生活應用題※, 本書特有題◎, 難題#

$\Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ -6 > -6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 1 < x \end{cases} \Rightarrow$ 取 $x > 5$

(B) 1. 一元一次不等式 $2x-3 > 7 > 13-6x$ 的解為 x , 其圖示為下列何者?



(D) 2. 若 $-3 < x < 5$, 則 $|x+4| - |x-6| - |2x+7| = ?$

- (A) $2x-3$ (B) $3x-2$ (C) 9 (D) -9
2. 原式 $= (x+4) - (6-x) - (2x+7) = 4-6-7 = -9$

(B) 3. 解不等式 $1 < \frac{3x-1}{2} \leq 2$, 求 x 的範圍?

- (A) $1 < x \leq \frac{5}{2}$ (B) $1 < x \leq \frac{5}{3}$ (C) $1 < x \leq \frac{2}{5}$ (D) $1 < x \leq \frac{3}{5}$
3. $2 < 3x-1 \leq 4, 3 < 3x \leq 5, \therefore 1 < x \leq \frac{5}{3}$

(A) 4. 假設有不等式 $-2 < a < 7, -7 < b < 4$, 試求 $2a-3b$ 的範圍為何?

- (A) $-16 < 2a-3b < 35$ (B) $8 < 2a-3b < -7$ (C) $-16 > 2a-3b > 35$ (D) $8 > 2a-3b > -7$
4. $-2 < a < 7$ 同乘 2 $\Rightarrow -4 < 2a < 14$
 $-7 < b < 4$ 同乘 $(-3) \Rightarrow 21 > -3b > -12$
 $\Rightarrow (-4) + (-12) < 2a-3b < 14+21$
 $\Rightarrow -16 < 2a-3b < 35$

(C) 5. 芷薇解一元一次不等式 $-(x-3) > 5x+1$ 的步驟如下圖, 請問: 她從哪一個步驟開始發生錯誤呢?

$-(x-3) > 5x+1$

$\Rightarrow -x+3 > 5x+1 \dots\dots\dots$ (一)

$\Rightarrow -6x > -2 \dots\dots\dots$ (二)

$\Rightarrow -6x \div (-6) > (-2) \div (-6) \dots\dots\dots$ (三)

$\Rightarrow x > \frac{1}{3} \dots\dots\dots$ (四)

5. 步驟(三)同除以 (-6) 不等號需變號
 $\Rightarrow -6x \div (-6) < (-2) \div (-6)$

- (A) (一) (B) (二) (C) (三) (D) 沒有錯誤

(C) 6. 不等式 $2x - \frac{5}{3} > x+4$ 的最小整數解為何呢?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
6. 同 $\times 3 \Rightarrow 6x-5 > 3x+12, 3x > 17$
 $\Rightarrow x > \frac{2}{3} \therefore x = 6$

(A) 7. 若 $4a-3b \leq -5$, 試比較 $b - \frac{4}{3}a$ 與 $1\frac{1}{2}$ 的大小。

- (A) $b - \frac{4}{3}a > 1\frac{1}{2}$ (B) $b - \frac{4}{3}a \geq 1\frac{1}{2}$ (C) $b - \frac{4}{3}a < 1\frac{1}{2}$ (D) $b - \frac{4}{3}a \leq 1\frac{1}{2}$
7. $4a-3b \leq -5$ 同乘以 $(-\frac{1}{3})$
 $\Rightarrow b - \frac{4}{3}a \geq \frac{5}{3} > 1\frac{1}{2}$

$$8. 9 \leq 3x \leq x-4 \Rightarrow \begin{cases} 9 \leq 3x \\ 3x \leq x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x \\ x \leq -2 \end{cases} \\ \Rightarrow 3 \leq x \leq -2 \text{ (不成立)} \Rightarrow \text{無解}$$

(D) 8. $9 \leq 3x \leq x-4$ 的解為下列何者呢？

- (A) $3 \leq x$ 或 $x \leq -2$ (B) $x \geq -2$ (C) $x \leq 3$ (D) 無解

※(D) 9. 正義家中的洗衣機最大的洗衣量為 30 公斤，今天媽媽要洗 x 件的被單和重量 13 公斤的衣服，其中被單每件重量 2 公斤，根據題意可列出不等式為何？

- (A) $13x + 2 < 30$ (B) $13x + 2 \leq 30$ (C) $2x + 13 < 30$ (D) $2x + 13 \leq 30$

※(A) 10. 承上題，下列何者不是媽媽這一次洗衣服時被單的件數呢？

- (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

10. (A) 將 9 代入 $2x + 13 = 18 + 13 = 31 > 30$ (不合)

(D) 11. 下列何者是不等式 $-8.5 < 2.5x + 3.5$ 的解？

- (A) $x < -4.8$ (B) $x = -4.8$ (C) $x < -6$ (D) $x = -2$

11. $-8.5 - 3.5 < 2.5x \Rightarrow -12 < 2.5x \\ \Rightarrow x > -12 \times \frac{2}{5} \Rightarrow x > -4.8$

(B) 12. 已知柏超、昆勳、仲寬等三位同學的體重分別是 66 公斤、62 公斤、 x 公斤，三人平均體重不超過 61 公斤，依據此關係可以列出不等式為下列何者？

- (A) $(66 + 62 + x) \div 2 \leq 61$ (B) $(x + 62 + 66) \times \frac{1}{3} \leq 61$

- (C) $\frac{(x + 62 + 66)}{3} \geq 61$ (D) $\frac{3(66 + 62 + x)}{3} \geq 61$

(D) 13. 承上題，請問：仲寬的體重可能為下列何者呢？

- (A) 58 公斤 (B) 57 公斤 (C) 56 公斤 (D) 55 公斤

13. $(66 + 62 + x) \times \frac{1}{3} \leq 61 \\ \Rightarrow x \leq (61 \times 3) - (66 + 62) \\ \Rightarrow x \leq 55$

(B) 14. 若 $-3 < a < \frac{1}{3}$ ， $6 < b < 12$ ，則 $x = 3a + \frac{2}{3}b$ ，求 x 的範圍為何？

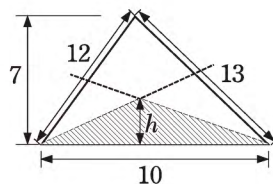
- (A) $-2 < x < 12$ (B) $-5 < x < 9$ (C) $-9 < x < 5$ (D) $-12 < x < 2$

14. $\begin{cases} -3 < a < \frac{1}{3} \Rightarrow -9 < 3a < 1 \\ 6 < b < 12 \Rightarrow 4 < \frac{2}{3}b < 8 \end{cases} \Rightarrow -5 < 3a + \frac{2}{3}b < 9, -5 < x < 9$

(D) 15. 由三角形的兩頂點延虛線剪兩刀，可得一斜線的三角形面積。若此三角形的高為 h 公分，且三角形面積不小於 15 平方公分，求 h 的範圍為何？

- (A) $h \geq 3$ (B) $h \geq 7$ (C) $3 < h \leq 7$ (D) $3 \leq h \leq 7$

15. $\begin{cases} h \leq 7 \\ \frac{10h}{2} \geq 15 \Rightarrow h \geq 3 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq h \leq 7$



歷屆 基測題

(D) 1. 若 x 為整數，且滿足不等式 $3x - 7 > 3 - x$ ，則 $2x + 5$ 之值可能為下列哪一個數？

- (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13

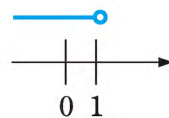
1. $3x - 7 > 3 - x \Rightarrow 4x > 10 \Rightarrow x > 2.5$ (x 為整數) $\Rightarrow 2x + 5 > 10$
當 $2x + 5 = 12$, $x = 3.5$ (不合)
當 $2x + 5 = 13$, $x = 4$ (合), 故選(D)

98 基測二

(B) 2. 右圖表示數線上不等式 $x - 1 < 0$ 解的範圍，則下列選項中，何者可表示數線上不等式 $3x + 15 > 5x - 9$ 解的範圍？

- (A) (B) (C) (D)

2. $3x + 15 > 5x - 9, 15 + 9 > 5x - 3x, 24 > 2x, 12 > x$, 故選(B)



98 基測一

解題小 偏方 第 15 題：此三角形最大高 $h = 7$ ，要列入條件式考慮。

※(B) 3. 有一益智遊戲分二階段進行，其中第二階段共有 25 題，答對一題得 3 分，答錯一題扣 2 分，不作答得 0 分。若小明已在第一階段得 50 分，且第二階段答對了 20 題，則下列哪一個分數可能是小明在此益智遊戲中所得的總分？

- (A) 103 (B) 106
(C) 109 (D) 112

3. ∵ 第二階段答對 20 題，共得 $3 \times 20 = 60$ ∴ 設答錯 x 題 ($0 \leq x \leq 5$)
則第二階段得 $60 - 2x \Rightarrow$ 兩階段得 $50 + 60 - 2x = 110 - 2x$
又 $0 \leq x \leq 5$ ，當 $x = 2$ 時，得 $110 - 2 \times 2 = 106$

98 基測一

(A) 4. 解一元一次不等式 $2 - \frac{2x-3}{5} < \frac{x+3}{10}$ ，得其解的範圍為何？

- (A) $x > \frac{23}{5}$ (B) $x < \frac{23}{5}$
(C) $x > 10$ (D) $x < 10$

4. 原式同乘 10 $\Rightarrow 20 - 2(2x-3) < x+3$
 $\Rightarrow 20 - 4x + 6 < x+3 \Rightarrow 23 < 5x \Rightarrow \frac{23}{5} < x$

97 基測二

(C) 5. 解不等式 $\frac{2}{3}x + 1 \leq \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ ，得其解的範圍為何？

- (A) $x \geq \frac{3}{2}$ (B) $x \geq \frac{2}{3}$
(C) $x \leq -\frac{3}{2}$ (D) $x \leq -\frac{2}{3}$

5. $\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x \leq \frac{1}{3} - 1$ ，
 $\frac{4}{9}x \leq -\frac{2}{3}$ ，
 $x \leq -\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$ ， $x \leq -\frac{3}{2}$

97 基測一

※(B) 6. 某段隧道全長 9 公里，有一輛汽車以每小時 60 公里到 80 公里之間的速率通過該隧道。下列何者可能是該車通過隧道所用的時間？

- (A) 6 分鐘 (B) 8 分鐘
(C) 10 分鐘 (D) 12 分鐘

6. 設花 t 分鐘通過隧道
 $\frac{9}{80} \times 60 \leq t \leq \frac{9}{60} \times 60$
 $\Rightarrow \frac{27}{4} \leq t \leq 9 \Rightarrow 6.75 \leq t \leq 9$

97 基測一

(A) 7. $x = -1$ 不是下列哪一個不等式的解？

- (A) $2x + 1 \leq -3$ (B) $2x - 1 \geq -3$
(C) $-2x + 1 \geq 3$ (D) $-2x - 1 \leq 3$

7. (A) $2x \leq -4$ ， $x \leq -2$ (B) $2x \geq -2$ ， $x \geq -1$
(C) $-2 \geq 2x$ ， $x \leq -1$ (D) $2x \geq -4$ ， $x \geq -2$

96 基測一

基測題

(A) 1. 不等式 $ax - 4 > x + 16$ 的解為 $x < -5$ ，則 $a = ?$

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

1. 原式 $\Rightarrow (a-1)x > 20$ 的解為 $x < -5$ ，
故 $a-1 = -4$ ， $a = -3$

(D) 2. 不等式 $\frac{3x-5}{5} - \frac{7x-13}{6} > 3 - \frac{x+3}{2}$ 的圖形為下列何者？

- (A)  (B)  (C)  (D) 

2. $18x - 30 - 35x + 65 > 90 - 15x - 45$
 $\Rightarrow -2x > 10 \Rightarrow x < -5$ ，選(D)圖形

(C) 3. 設 $-1 < x < 3$ 且 $P = \frac{1}{2}(6 - 3x) + \frac{1}{2}$ ，求 P 的範圍？

- (A) $5 < P < 7$ (B) $-1 > P > 5$
(C) $5 > P > -1$ (D) $7 < P < 5$

3. $-1 < x < 3 \Rightarrow 3 > -3x > -9 \Rightarrow 9 > -3x + 6 > -3$ ，
 $\therefore \frac{9}{2} > \frac{1}{2}(6 - 3x) > -\frac{3}{2} \Rightarrow 5 > \frac{1}{2}(6 - 3x) + \frac{1}{2} > -1$
 $\Rightarrow 5 > P > -1$

◎(A) 4. 試比較 $(1\frac{999}{1000})^5$ 和 $(1\frac{999}{1000})^4$ 的大小？

- (A) $(1\frac{999}{1000})^5 > (1\frac{999}{1000})^4$ (B) $(1\frac{999}{1000})^5 < (1\frac{999}{1000})^4$
(C) $(1\frac{999}{1000})^5 \leq (1\frac{999}{1000})^4$ (D) $(1\frac{999}{1000})^5 \geq (1\frac{999}{1000})^4$

4. $1\frac{999}{1000} > 1 \therefore (1\frac{999}{1000})^5 > (1\frac{999}{1000})^4$

(D) 5. 哪一個數是 $x + \frac{120}{119} + \frac{1000}{999} \leq 0$ 的解?
 (A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) -3

$$5. x + 1\frac{1}{119} + 1\frac{1}{999} \leq 0$$

$$\Rightarrow x + 2 + \frac{1}{119} + \frac{1}{999} \leq 0, \text{ 故選(D)}$$

(B) 6. 同時滿足 $2x - \frac{3}{2} > -x + \frac{1}{2}$ 及 $x - \frac{2}{3} < -\frac{x}{3} + 1$ 的解為何呢?

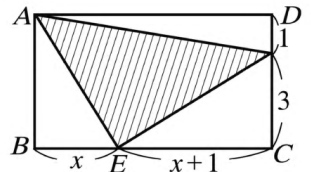
- (A) $\frac{5}{4} < x < \frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$
 (C) $-\frac{2}{3} < x < -\frac{5}{4}$ (D) $-\frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$

$$6. 2x - \frac{3}{2} > -x + \frac{1}{2} \Rightarrow 3x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3},$$

$$x - \frac{2}{3} < -\frac{x}{3} + 1 \Rightarrow \frac{4}{3}x < \frac{5}{3}, x < \frac{5}{4},$$

$$\therefore \frac{2}{3} < x < \frac{5}{4}$$

(B) 7. 如右圖，長方形 ABCD 中，若長方形周長小於 50，且斜線部分面積不小於 16，求 x 的範圍？



- (A) $2 \leq x < 8$ (B) $4 \leq x < 10$
 (C) $6 \leq x < 12$ (D) $8 \leq x < 14$
7. 先求斜線部分面積
- $$= (x+x+1) \times (1+3) - \frac{4 \times x}{2} - \frac{3(x+1)}{2} - \frac{(2x+1) \times 1}{2}$$
- $$= 8x + 4 - 2x - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - x - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}x + 2$$
- 依條件列式 $(x+x+1+4) \times 2 < 50 \Rightarrow 2x+5 < 25$
 $\Rightarrow 2x < 20, x < 10, \text{ 又 } \frac{7}{2}x + 2 \geq 16 \Rightarrow \frac{7}{2}x \geq 14, x \geq 4 \therefore 4 \leq x < 10$

(B) 8. 一個三角形的底長 10 公分，高為 $(2x - 7)$ 公分，面積不大於 $(5x + 20)$ 平方公分，則 x 範圍為何呢？

- (A) $\frac{7}{2} \leq x \leq 11$ (B) $\frac{7}{2} < x \leq 11$
 (C) $\frac{7}{3} \leq x \leq 11$ (D) $\frac{7}{3} < x \leq 11$

$$8. 2x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{2}; 5x + 20 > 0, x > -4,$$

$$\text{ 又 } 10 \times (2x - 7) \times \frac{1}{2} \leq 5x + 20, 2x - 7 \leq x + 4$$

$$\Rightarrow x \leq 11 \therefore \frac{7}{2} < x \leq 11$$

(D) 9. 已知山路長 x 公里，若上山每小時走 3 公里，沿原路下山每小時走 5 公里，且上山與下山的來回時間不超過 6 小時，則根據題意可以列出下列哪一個不等式？

- (A) $3x + 5x < 6$ (B) $3x + 5x \leq 6$
 (C) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 6$ (D) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} \leq 6$

$$9. \text{ 時間} = \frac{\text{距離}}{\text{速度}} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{5} \leq 6$$

* (A) 10. 福隆火車便當有若干個要裝箱，若每箱裝 14 個，則餘 36 個；若每箱裝 18 個，最後一箱裝不滿，已知最多可裝 a 箱，最少可裝 b 箱，則 $a - b = ?$

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
10. 設有 x 箱 $\therefore 18(x-1) < 14x + 36 < 18x \Rightarrow 18x - 18 < 14x + 36$
 $\Rightarrow 4x < 54, x < 13\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}, 14x + 36 < 18x \Rightarrow 36 < 4x, x > 9 \dots \textcircled{2}$
 由 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 得 $9 < x < 13\frac{1}{2}; \therefore \text{ 最小 } b = 10, \text{ 最大 } a = 13 \therefore 13 - 10 = 3$

* (D) 11. 第 100 屆立法委員選舉，假設花蓮縣第一選區有效票 12000 張，有 10 位候選人要選上 3 位，則候選人花媽至少要得多少張選票，才能篤定當選呢？

- (A) 2998 (B) 2999 (C) 3000 (D) 3001
11. 設需 x 張， $(3+1)x > 12000, \therefore x > 3000,$
 但 x 為正整數 $\therefore 3000 + 1 = 3001$

* (C) 12. 高雄科學工藝博物館的入場券規定：50 人（含）以上打八折，100 人（含）以上打 7 折。奇鼎國中 2 年 18、19 班共二班的人數在 50 人到 100 人之間，則此二班最少多少人時，買 100 張入場券反而便宜？

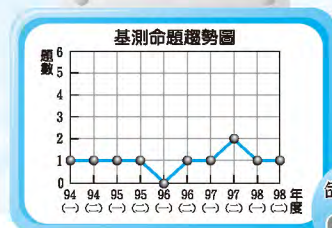
- (A) 66 (B) 77 (C) 88 (D) 99
12. 設有 x 人以上 ($50 \leq x \leq 100$),
 $\therefore 0.8x > 100 \times 0.7 \Rightarrow x > \frac{70}{0.8} = 87.5,$
 $\therefore x \text{ 最小整數值 } 88$

解題小偏方 第 11 題：已知有效票為 x 票，若 n 位當選人中最低票數是 a，所以 n 位當選人的總得票數必大於或等於 na。亦即，由落選人來說，其總得票數必小於或等於 $(x - na)$ 。

$$a > x - n, a > \frac{x}{n+1}, \text{ 篤定當選必要 } \frac{x}{n+1} + 1 \text{ 票。}$$

第 9 單元

乘法公式與多項式



命題率
90%

能力 — 乘法公式

一 乘法公式

係指二個(含)以上多項式(A 、 B)透過乘法結合成另一個多項式(C)的公式,其用途可用於因式分解、數的計算或多項式的化簡。亦即 $A \times B = C$, C 為 A 、 B 之倍式; A 、 B 為 C 之因式。

二 乘法公式的種類

1.	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	分配律公式
2.	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	和與差的平方公式
3.	$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	平方差公式
4.	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$	三項和的平方公式

三 乘法公式的求值

1.	已知 $(a+b)$ 和 ab	(1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (2) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
2.	已知 $(a-b)$ 和 ab	(1) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ (2) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
3.	已知 $x + \frac{1}{x}$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$
4.	已知 $x - \frac{1}{x}$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2$
5.	若 $a+b+c=0$	$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$

老師 傳授

乘法公式的運算 I

學生 實作

1. $a = 55 \times 45$, $b = 75^2 - 25^2$, 則 $b - a = ?$

解

$$\begin{aligned} 1. a &= (50 + 5)(50 - 5) = 2500 - 25 = 2475 \\ b &= (75 - 25)(75 + 25) = 50 \times 100 = 5000 \\ b - a &= 5000 - 2475 = \underline{2525} \end{aligned}$$

1. 若 $a = 101 \times 99$, $b = 375^2 - 175^2$, 則 $b - a = ?$

解

$$\begin{aligned} 1. a &= 101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) \\ &= 100^2 - 1^2 = 9999 \\ b &= 375^2 - 175^2 = (375 - 175)(375 + 175) \\ &= 200 \times 550 = 110000 \\ b - a &= 110000 - 9999 = \underline{100001} \end{aligned}$$

2. 小於 $(9.94)^2$ 的最大整數是多少？

解

$$\begin{aligned} 2. \text{ 因為 } (9.94)^2 &= (10 - 0.06)^2 \\ &= 10^2 - 2 \times 10 \times 0.06 + (0.06)^2 \\ &= 100 - 1.2 + 0.0036 = 98.8036 \\ \text{所以小於 } (9.94)^2 \text{ 的最大整數為 } &\underline{98} \end{aligned}$$

2. 大於 $(4.99)^2$ 的最小整數為何？

解

$$\begin{aligned} 2. (4.99)^2 &= (5 - 0.01)^2 \\ &= 25 - 2 \times 5 \times 0.01 + 0.01^2 \\ &= 25 - 0.1 + 0.0001 = 24.9001 \\ \text{所以大於 } (4.99)^2 \text{ 的最小整數為 } &\underline{25} \end{aligned}$$

2 老師傳授

乘法公式的運算 II

學生寫作

2

1. 試求 $(99\frac{1}{2})^2 = 99^2 + a$, 求 $a = ?$

2. 試求 $\frac{197^2 - 103^2}{94 \times 50} = ?$

解

$$\begin{aligned} 1. (99\frac{1}{2})^2 &= (99 + \frac{1}{2})^2 \\ &= 99^2 + 2 \times 99 \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 \\ \text{所以 } a &= 2 \times 99 \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = 99 + \frac{1}{4} = \underline{99\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ 原式} &= \frac{(197 + 103) \times (197 - 103)}{94 \times 50} \\ &= \frac{300 \times 94}{94 \times 50} \\ &= \underline{6} \end{aligned}$$

1. 試求 $(102\frac{1}{4})^2 = 102^2 + a$, 求 $a = ?$

2. 試求 $-(\frac{125^2 - 190^2}{70 \times 65}) = ?$

解

$$\begin{aligned} 1. (102\frac{1}{4})^2 &= (102 + \frac{1}{4})^2 \\ &= 102^2 + 2 \times 102 \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 \\ &= 102^2 + 51 + \frac{1}{16} = 102^2 + 51\frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a = \underline{51\frac{1}{16}}$$

$$\begin{aligned} 2. -(\frac{125^2 - 190^2}{70 \times 65}) &= \frac{-(125^2 - 190^2)}{70 \times 65} \\ &= \frac{190^2 - 125^2}{70 \times 65} = \frac{(190 - 125)(190 + 125)}{70 \times 65} \\ &= \frac{65 \times 315}{70 \times 65} = \underline{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

3 老師傳授

乘法公式的應用

學生寫作

3

1. $a = 12345678 \times 12345678 - 12345679 \times 12345677$, 請問 $a = ?$

2. 若 $a^2 + b^2 = 11$, 試求 $(a+b)^2 + (a-b)^2 = ?$

3. 若 $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$ **難題**

解

$$1. \text{ 令 } b = 12345678$$

$$a = b^2 - (b+1) \times (b-1) = b^2 - (b^2 - 1) = \underline{1}$$

$$\begin{aligned} 2. (a+b)^2 + (a-b)^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2 \times 11 = \underline{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. x^2 - x + 1 = 0 &\Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 1 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 1^2 - 2 = \underline{-1} \end{aligned}$$

1. 若 $a = 28825251 \times 28825253 - 28825252 \times 28825252$, 則 $a = ?$

2. 已知 $9.9^2 = 98.01$, $10.1^2 = 102.01$, 試問 $10.1^2 + 9.9 \times 10.1 - 9.9^2 = ?$

3. 若 $x - \frac{1}{x} = 4$, 則 $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

解

$$1. \text{ 令 } 28825252 \text{ 為 } b$$

$$a = (b-1)(b+1) - b^2 = b^2 - 1^2 - b^2 = \underline{-1}$$

$$\begin{aligned} 2. 10.1^2 + 9.9 \times 10.1 - 9.9^2 &= (10.1^2 - 9.9^2) + (9.9 \times 10.1) \\ &= (10.1 - 9.9)(10.1 + 9.9) + (10 - 0.1)(10 + 0.1) \\ &= 0.2 \times 20 + (100 - 0.01) = \underline{103.99} \end{aligned}$$

$$3. x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2 = 4^2 + 2 = \underline{18}$$

Let's Go! 同步 評量 1

- (A) 1. 展開 $(-3-9x)(-3+9x)$ 的結果為下列何者?
 (A) $-81x^2+9$ (B) $-9-81x^2$ (C) $81x^2-9$ (D) $9+81x^2$
- (D) 2. 利用分配律求 $2008 \times 2007 \times (\frac{2007}{2008} - \frac{2008}{2007}) = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 4015 (D) -4015
- (C) 3. 請化簡 $1998 \times 2002 - 1997^2 = ?$
 (A) 11985 (B) 11986 (C) 11987 (D) 11988
- (B) 4. 展開 $(a^2+a+2)(a^2-a+2)$ 為下列何者?
 (A) a^4-3a^2-4 (B) a^4+3a^2+4 (C) a^4+3a^2-4 (D) a^4-3a^2+4
- (C) 5. 請用平方差公式，求 $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$ 的個位數為多少?
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
- (B) 6. 如右圖，試求斜線部分的面積為多少平方單位?
 (A) 141 (B) 143 (C) 145 (D) 147

1. $(-3-9x)(-3+9x) = (-3)^2 - (9x)^2 = 9 - 81x^2$

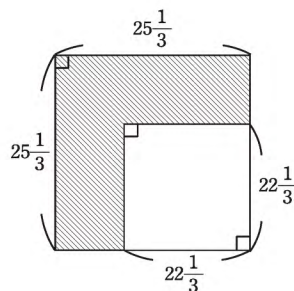
2. 原式 $= 2007^2 - 2008^2$
 $= (2007+2008)(2007-2008)$
 $= -4015$

3. 原式 $= (2000-2)(2000+2) - (2000-3)^2$
 $= (2000^2-2^2) - (2000-3)^2$
 $= 2000^2 - 4 - 2000^2 + 2 \times 2000 \times 3 - 9$
 $= -4 + 12000 - 9 = 11987$

4. $(a^2+a+2)(a^2-a+2) = [(a^2+2)+a][(a^2+2)-a] = (a^2+2)^2 - a^2 = a^4 + 4a^2 + 4 - a^2 = a^4 + 3a^2 + 4$

5. $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) = 2^{16} - 1$ ，
 但 2^{16} 個位數是 6，所以 $2^{16} - 1$ 個位數是 5

6. $(25\frac{1}{3})^2 - (22\frac{1}{3})^2 = (25\frac{1}{3} - 22\frac{1}{3})(25\frac{1}{3} + 22\frac{1}{3})$
 $= 3 \times 47\frac{2}{3} = 143$



能力 二 多項式的加減運算

一 多項式的意義

由「數字」和「文字符號 x 」，藉由「加法」和「乘法」運算所得的數學式，稱為 x 的多項式。通常以文字符號的「最高次方數」為此多項式的次數名稱。

$$ax^3 + bx^2 - cx - d$$

$$= ax^3 + bx^2 + (-cx) + (-d)$$

$(-d)$ ：稱為常數項(或零次項) $\Rightarrow (-d) = (-dx^0)$

$(-cx)$ ：由「+」所間隔的稱為「項」

x ：稱為變數

b ：稱為 x^2 的係數

x^3 ：3 為此多項式的最高次數 $\Rightarrow x$ 的三次多項式

二 多項式的判別

多項式中的文字 x 不可出現在「分母中」、「根號內」、「絕對值內」。

例 1：以下皆非多項式： $\frac{1}{x+3} - x$ ， $\sqrt{x-7}$ ， $|x+3| \dots$ 等。

三 多項式的名稱

在多項式 $ax^2 + bx + c$ 中：

1. 若 $a \neq 0$	為二次多項式
2. 若 $a = 0, b \neq 0$	為一次多項式
3. 若 $a = 0, b = 0$	為常數多項式(不含文字符號的多項式), 有以下兩種類型: (1) $c \neq 0 \Rightarrow$ 零次多項式; (2) $c = 0 \Rightarrow$ 零多項式

四 同類項和升、降冪式

- 同類項**：在一多項式中，文字部分(含次數)相同的項，稱為同類項。同類項的係數可以加或減而整理為一項(合併)，此過程稱為化簡。
- 升、降冪式**：在多項式中，依特定文字的次方數由高至低順序排列，稱為**降冪式**(常用)。而依特定文字的次方數由低至高順序排列，稱為**升冪式**。

例2：(1) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \Rightarrow x$ 的降冪式。

(2) $2 + 3y - 4y^2 + 5y^3 \Rightarrow y$ 的升冪式。

- 多項式的相等**：若兩多項式相等，則其**對應項係數相等**。

例3： $ax^2 + bx - c = dx^2 - ex + f \Rightarrow a = d, b = -e, -c = f$ 。

五 多項式的加減運算

- 同類項**才可以相加減。
- 假設 A, B 為兩多項式，其次數分別是 m, n ，則：
 - 若 $m = n$ ，則 $A \pm B$ 的次數不大於 m 次。
 - 若 $m > n$ ，則 $A \pm B$ 的次數是 m 次。

例4：有三個多項式 $A = 3x^3 + 2x^2 + x + 1, B = -3x^3 + 3x, C = 2x^2 + 3x - 1$

則 $A + B = 2x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$ 最高次不大於 3 次

$A + C = 3x^3 + 4x^2 + 4x \Rightarrow$ 最高次是 3 次

4

老師

傳授

多項式的意義

學生

寫作

4

- 下列各項數學式，哪些非多項式呢？(複選)

(A) $\frac{3}{x+2}$ (B) $x^3 + 3x + 3$ (C) $|x|^2 + 2x - 1$

(D) $3x^2 - \sqrt{2}x$ (E) $\sqrt{2x} - x + 1$

解

1. (A) $\Rightarrow x$ 在分母、(C) $\Rightarrow x$ 在絕對值中、
(E) $\Rightarrow x$ 在根號中

非多項式的有：(A)、(C)、(E)

- 下列何者為 x 的多項式？(複選)

(A) $x^2 + x + x^{-1}$ (B) $x^3 + x + 3 = 0$

(C) $x^2 + \frac{1}{y} + 1$ (D) 101

解

1. (A) $x^2 + x + x^{-1} = x^2 + x + \frac{1}{x}$,

x 在分母中，非多項式

(B) $x^3 + x + 3 = 0$ ，此為方程式非多項式

(C) $x^2 + \frac{1}{y} + 1$ ，此為 x 的二次多項式

(D) $101 = 101x^0$ ，此為 x 的零次多項式

故 (C)(D) 為 x 的多項式

2. 設 $(3a + 2b - 4)x^2 + (a - 3b - 5)x + (c + 3)$ 為 x 的零多項式，求 $a - b + c = ?$

解

$$2. \begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ a - 3b - 5 = 0 \\ c + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 4 \cdots ① \\ a - 3b = 5 \cdots ② \\ c = -3 \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

① \times 3 + ② \times 2 $\Rightarrow 11a = 22 \Rightarrow a = 2$ ，
代入②得 $b = -1$ ，且 $c = -3$
 $\therefore a - b + c = 2 - (-1) - 3 = 0$

2. 若 $(k + 1)x^2 + 3x - m$ 為一次多項式，請問： k 值為何呢？

解

$$2. \because (k + 1)x^2 + 3x - m \text{ 為一次多項式} \\ \Rightarrow (k + 1) = 0, \underline{k = -1}$$

5

老師傳授

多項式的相等

學生習作

5

1. 設 a, b, c, d, e 均為整數，且 $2|a| + 3|b - 1| + |c - 2| = 1$ ，則多項式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 的次數為何呢？

2. 若 $2x^3 + 3x^2 - 1 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + (c + d)$ ，請問： $a + b + c + d$ 的值為何呢？

解

$$1. |a| = 0, |b - 1| = 0, |c - 2| = 1 \\ \Rightarrow a = 0, b - 1 = 0, c - 2 = \pm 1 \\ \Rightarrow a = 0, b = 1, c = 3 \\ \text{或 } a = 0, b = 1, c = 1 \\ \Rightarrow \text{原多項式可為 } x^3 + 3x^2 + dx + e \\ \text{或 } x^3 + x^2 + dx + e \\ \Rightarrow \text{均為三次多項式}$$

$$2. \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ b + c = 0 \\ c + d = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \underline{a + b + c + d = 2}$$

1. 多項式 $A = -3x^2 - ax + 19$ 與 $B = bx^2 + 4x - c$ 相等，試求 $a + b + c = ?$

2. 若 $3x^3 - 2x^2 + 4 = ax^3 - (a - b)x^2 + (b - c)x + (c - d)$ ，試求 $a + b - c + d = ?$

解

$$1. A = -3x^2 - ax + 19, B = bx^2 + 4x - c \\ \text{兩式對照比較後，可得 } b = -3; -a = 4 \\ \Rightarrow a = -4; 19 = -c \Rightarrow c = -19 \\ \Rightarrow a + b + c = (-4) + (-3) + (-19) \\ = \underline{-26}$$

$$2. a = 3, \\ a - b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ b - c = 0 \Rightarrow c = 1 \\ c - d = 4 \Rightarrow d = -3 \\ \therefore a + b - c + d = 3 + 1 - 1 + (-3) = \underline{0}$$

6

老師傳授

多項式的加減

學生習作

6

1. 已知多項式 $A = ax^3 + (b + 3)x^2 + (c - 1)x - 1$ ， $B = 2x^2 + (a - 3)x + (b - c + d)$ ，若 $A = B$ ，則 $a - b - c - d = ?$

解

$$1. a = 0, b + 3 = 2 \Rightarrow b = -1, \\ c - 1 = a - 3 \Rightarrow c = -2, \\ b - c + d = -1, d = -2, \\ a - b - c - d = 0 - (-1) - (-2) - (-2) \\ = 0 + 1 + 2 + 2 = \underline{5}$$

1. 將 $(4x^2 - x - 1) + (6x^2 + 8x + 4)$ 化簡後得 $ax^2 + bx + c$ ，則 $a + b + c = ?$

解

$$1. (4x^2 - x - 1) + (6x^2 + 8x + 4) \\ = (4 + 6)x^2 - (1 - 8)x + (-1) + 4 \\ = 10x^2 + 7x + 3 \Rightarrow a + b + c = \underline{20}$$

2. 若 $(x^2 + x - 1) - (ax^2 - bx - c) = x - 1$ ，
則 $a(b + c) = ?$

解

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &\Rightarrow x^2 + x - 1 - ax^2 + bx + c = x - 1 \\ &\Rightarrow (1-a)x^2 + (1+b)x - (1-c) = x - 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1-a=0, a=1 \\ 1+b=1, b=0 \Rightarrow a(b+c)=0 \\ 1-c=1, c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. 假設 $A = 2x^2 - 3x - 4$, $B = 3x^2 - 2x + 5$ ，
試求 $2A + 3B$ 及 $3A - 2B$ 為何呢？

解

$$\begin{aligned} 2. (1) 2A + 3B &= 2(2x^2 - 3x - 4) + 3(3x^2 - 2x + 5) \\ &= 4x^2 - 6x - 8 + 9x^2 - 6x + 15 \\ &= \underline{13x^2 - 12x + 7} \\ (2) 3A - 2B &= 3(2x^2 - 3x - 4) - 2(3x^2 - 2x + 5) \\ &= 6x^2 - 9x - 12 - 6x^2 + 4x - 10 \\ &= \underline{-5x - 22} \end{aligned}$$



同步 評量 2

(A) 1. 若 $A = (a - 3)x^3 + (b - 2)x^2 + (a + b - 7)x + 5$ 為 x 的一次多項式，求 $A = ?$

- (A) $-2x + 5$ (B) $-4x + 5$
(C) $-6x + 5$ (D) $-8x + 5$

$$\begin{aligned} 1. a-3=0 &\Rightarrow a=3; b-2=0 \Rightarrow b=2 \\ &\Rightarrow (a+b-7)x+5 = -2x+5 \end{aligned}$$

(D) 2. 假設有兩多項式分別相等 $ax^2 + (b - 4a)x + (4a - 2b - 5) = 3x^2 - 14x + c$ ，請問：
 $a + b + c = ?$

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

$$\begin{aligned} 2. \text{比較係數後} &\Rightarrow a=3, b-4a=-14, 4a-2b-5=c \\ &a=3, b=-2, c=11 \Rightarrow a+b+c=12 \end{aligned}$$

(B) 3. 有一多項式減去 $4x^2 - 7x - 4$ 的差為 $x^2 + 8x + 3$ ，則此多項式為下列何者？

- (A) $5x^2 + x + 1$ (B) $5x^2 + x - 1$
(C) $3x^2 + x + 7$ (D) $3x^2 + x - 7$

3. 設此多項式為 A ，

$$\text{則 } A = 4x^2 - 7x - 4 + x^2 + 8x + 3 = 5x^2 + x - 1$$

(C) 4. 已知某一多項式 A 與 $3x^2 + 6x - 2$ 的和為 $2x + 1$ ，則此多項式 A 的常數項為多少？

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

$$4. 1 - (-2) = 3$$

(A) 5. 鼎翔算數學題：「兩多項式 A 、 B ，……， $B = -3x^2 - 4x + 5$ ，求 $A + 3B = ?$ 」，但鼎翔不小心將 $3B$ 誤看成 $5B$ ，結果求出的答案是 $-2x^2 - 9x + 16$ 。試利用上述已知條件，幫鼎翔算出正確的答案？

- (A) $4x^2 - x + 6$ (B) $-4x^2 - x + 6$
(C) $4x^2 + x - 6$ (D) $-4x^2 - x - 6$

5. $A + 3B = A + 5B - 2B$

$$\begin{aligned} &= -2x^2 - 9x + 16 - 2(-3x^2 - 4x + 5) \\ &= -2x^2 - 9x + 16 + 6x^2 + 8x - 10 \\ &= 4x^2 - x + 6 \end{aligned}$$



多項式的乘除運算

一 多項式的乘法

1. 設 A 、 B 為 x 的多項式，其次數分別為 m 、 n ，則 $A \times B$ 的次數為 $(m + n)$ 次。
2. 多項式乘法的係數總和。⇒ 將 $x = 1$ 代入多項式 (文字符號省略計算)

例 5：有兩多項式相乘 $(3x^2 + 2x - 6)(2x^3 + 3x^2 - 7)$ 其乘積之多項式係數總和 (含常數項) 為 $\Rightarrow (3 + 2 - 6)(2 + 3 - 7) = 2$ 。

3. 多項式乘法中單項係數求法：

例6：有兩多項式相乘 $(x - 7 + 5x^2)(-4x^2 + 3 + 9x)$ 其乘積中「 x^2 項的係數」為

$$\Rightarrow 1 \times 9 + (-7) \times (-4) + 5 \times 3 = 52。$$

二 多項式的除法

設兩多項式 A 、 B ， A 除以 B 得商為 Q ，餘式為 R ，則 $A = BQ + R \Leftrightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$

1. kA 除以 B ，商式為 kQ ，餘式為 kR 。

2. A 除以 kB ，商式為 $\frac{Q}{k}$ ，餘式為 R 。

3. 設 A 、 B 兩多項式之次數分別為 m 、 n ，若 $m > n$ ， $A \div B$ 的商式為 $(m - n)$ 次，餘式的次數不大於 n 次。

7

老師傳授

多項式的乘法 I

學生習作

7

1. 若 $16x^2 + kx - 6$ 與 $(2x + 3)(ax + b)$ 相等，其中 a 、 b 、 k 均為整數，則 $k = ?$

2. 已知 $x^2 - \frac{3}{4}x = -\frac{1}{8}$ ，則 $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{4})(x + \frac{3}{4}) = ?$

解

1. $(2x + 3)(ax + b) = 2ax^2 + 3ax + 2bx + 3b$
 $= 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b$ 與 $16x^2 + kx - 6$
 比較係數得 $a = 8$ ， $b = -2$
 故 $k = 3 \times 8 - 4 = \underline{20}$

2. $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{4})$
 $= (x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8})(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{9}{8})$
 $= (-\frac{1}{8} + \frac{1}{8})(-\frac{1}{8} - \frac{9}{8}) = \underline{0}$

1. 若 $\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{3}$ 與 $(bx + c)(6x - 12)$ 相等，其中 a 、 b 、 c 均為有理數，則 $a + b + c = ?$

2. 已知 $x^2 + 2x - 17 = 0$ ，則 $(x + 7)(x + 3)(x - 1)(x - 5) = ?$

解

1. $\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{3} = 6bx^2 - 12bx + 6cx - 12c$
 $= 6bx^2 + (6c - 12b)x - 12c$
 $\frac{1}{2} = 6b \Rightarrow b = \frac{1}{12}$ ； $\frac{1}{3} = -12c \Rightarrow c = -\frac{1}{36}$
 $6c - 12b = a \Rightarrow 6(-\frac{1}{36}) - 12(\frac{1}{12}) = a$
 $\Rightarrow a = -\frac{7}{6}$
 $a + b + c = -\frac{7}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \underline{-\frac{10}{9}}$

2. $x^2 + 2x = 17$ ，
 $(x + 7)(x - 5)(x + 3)(x - 1)$
 $= (x^2 + 2x - 35)(x^2 + 2x - 3)$
 $= (17 - 35)(17 - 3) = \underline{-252}$

解題小

偏方

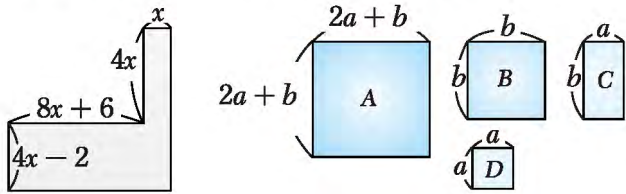
學生 7-2：將 $x^2 + 2x - 17 = 0$ 整理成 $x^2 + 2x = 17$ ，由 $(x + 7)(x + 3)(x - 1)(x - 5)$ 可知 $[(x + 7)(x - 5)][(x + 3)(x - 1)]$ ，可得 $x^2 + 2x + \square$ 的型式。

8 老師 傳授

多項式的乘法 II

學生 習作

1. 如下圖(一)，求此圖形的面積為何呢？
2. 如下圖(二)，A、B、C、D代表四個矩形的面積，若以B、C、D表示A，則A = ？



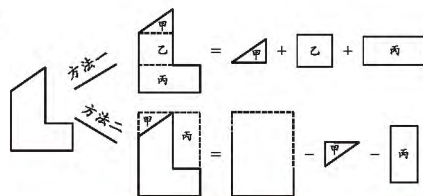
圖(一)

圖(二)

解

1. $4x \cdot x + [(4x-2) \times (8x+6+x)]$
 $= 4x^2 + [(4x-2) \times (9x+6)]$
 $= 4x^2 + 36x^2 + 6x - 12$
 $= 40x^2 + 6x - 12$ (平方單位)
2. $B = b^2$, $C = ab$, $D = a^2$,
 $A = (2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$
 $= 4D + 4C + B$ (平方單位)

解題小 備方 學生 8-1:



9 老師 傳授

多項式的除法

學生 習作

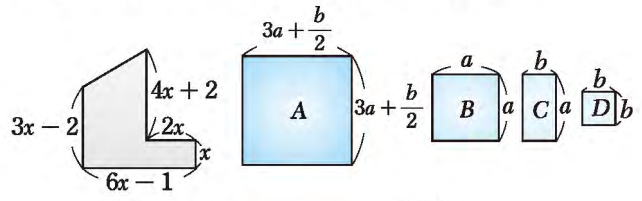
1. 請問： $[(2x^2 + x - 3) - (-x^2 - 3x + 4)] \div (x - 1)$ 的商式為何？

解

1. 原式 $= (2x^2 + x - 3 + x^2 + 3x - 4) \div (x - 1)$
 $= (3x^2 + 4x - 7) \div (x - 1)$
 $= 3x + 7$

$$\begin{array}{r} 3x + 7 \\ x-1 \overline{) 3x^2 + 4x - 7} \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ 7x - 7 \\ \underline{7x - 7} \\ 0 \end{array}$$

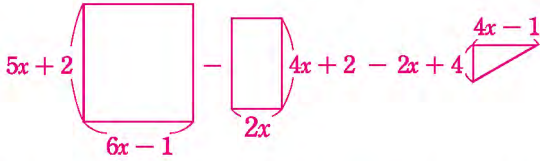
1. 如下圖(一)，求此圖形的面積為何呢？
2. 如下圖(二)，A、B、C、D代表四個矩形的面積，若以B、C、D表示A，則A = ？



圖(一)

圖(二)

解

1. $5x+2$ 
 $= [(5x+2)(6x-1)] - [(4x+2)(2x)] - [\frac{1}{2}(4x-1)(2x+4)]$
 $= 30x^2 + 7x - 2 - (8x^2 + 4x) - (4x^2 + 7x - 2)$
 $= 30x^2 + 7x - 2 - 8x^2 - 4x - 4x^2 - 7x + 2$
 $= 18x^2 - 4x$ (平方單位)
2. $A = (3a + \frac{b}{2})^2 = 9a^2 + 3ab + \frac{b^2}{4}$
 $= 9B + 3C + \frac{1}{4}D$ (平方單位)

2. 假設 $3x^3 - 2x^2 + Px + Q$ 可被多項式 $3x^2 - x + 1$ 整除，求 $P + Q = ?$

解

$$\begin{array}{r}
 x - \frac{1}{3} \\
 3x^2 - x + 1 \overline{) 3x^3 - 2x^2 + Px + Q} \\
 \underline{3x^3 - x^2 + x} \\
 -x^2 + (P-1)x + Q \\
 \underline{-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 P-1 &= \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{4}{3}, Q = -\frac{1}{3}, \\
 P+Q &= \frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{1}
 \end{aligned}$$

2. 假設 $2x^3 - x^2 + mx + n$ 可被 $2x^2 + x - 1$ 整除，求 $m^2 - 4n = ?$

解

$$\begin{array}{r}
 x - 1 \\
 2x^2 + x - 1 \overline{) 2x^3 - x^2 + mx + n} \\
 \underline{2x^3 + x^2 - x} \\
 -2x^2 + (m+1)x + n \\
 \underline{-2x^2 - x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 m+1 &= -1 \Rightarrow m = -2, n = 1 \\
 m^2 - 4n &= (-2)^2 - 4(1) = \underline{0}
 \end{aligned}$$



(B) 1. 求 $(x^3 - 3x + 5) \div (x - 1)$ 的商式與餘式之和為何？

- (A) $x^2 + x - 5$ (B) $x^2 + x + 1$
 (C) $x^2 - 2$ (D) $x^2 + 5$

(C) 2. 若 $(3x^4 - 5x^2 + 4x) \div 3x$ 的商式為 $x^3 + ax + b$ ，則 $b + a = ?$

- (A) -3 (B) 3 (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

(A) 3. 已知多項式 B 除以 $x - 1$ 得商式為 $x + 5$ ，餘式為 8 ，如果改將多項式 B 除以 $x + 1$ ，則餘式 = ?

- (A) 0 (B) 1
 (C) 2 (D) 3

(B) 4. 多項式 $(13x + a)(bx + c) = 221x^2 + 2x - 3$ ，其中 $b = ?$

- (A) 7 (B) 17 (C) 27 (D) 37

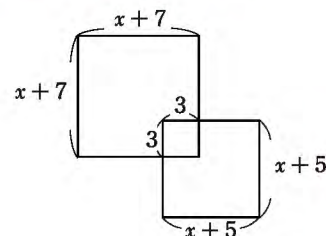
(A) 5. 若 $x^2 + 3x + 4 = 0$ ，則 $(x^2 + 3x)^2 + 5(x^2 + 3x) + 4 = ?$

- (A) 0 (B) 8 (C) 16 (D) 20

(C) 6. 右圖為兩正方形重疊後的圖形，其所涵蓋區域的總面積為何？

- (A) $x^2 + 24x + 65$
 (B) $x^2 + 4x + 83$
 (C) $2x^2 + 24x + 65$
 (D) $2x^2 + 4x + 83$

$$\begin{aligned}
 \text{6. 面積} &= (x+5)^2 + (x+7)^2 - 3^2 \\
 &= x^2 + 10x + 25 + x^2 + 14x + 49 - 9 \\
 &= 2x^2 + 24x + 65
 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 2 \\
 x - 1 \overline{) x^3 + 0 - 3x + 5} \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 x^2 - 3x \\
 \underline{x^2 - x} \\
 -2x + 5 \\
 \underline{-2x + 2} \\
 3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2. (3x^4 - 5x^2 + 4x) \div 3x &= x^3 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \\
 \Rightarrow a &= -\frac{5}{3}, b = \frac{4}{3}, b + a = \frac{4-5}{3} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$3. B = (x-1)(x+5) + 8 = x^2 + 4x + 3$$

$$\begin{array}{r}
 x + 3 \\
 x + 1 \overline{) x^2 + 4x + 3} \\
 \underline{x^2 + x} \\
 3x + 3 \\
 \underline{3x + 3} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 4. 13bx^2 + abx + 13cx + ac &= 221x^2 + 2x - 3, \\
 b &= 221 \div 13 = 17
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. x^2 + 3x = -4 \text{ 代入 } (x^2 + 3x)^2 + 5(x^2 + 3x) + 4 \\
 \Rightarrow (-4)^2 + 5(-4) + 4 = 16 - 20 + 4 = 0
 \end{aligned}$$

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(B) 1. 請用乘法公式計算 $1002^2 - 1009 \times 1001 = ?$

- (A) 6005 (B) -6005
-
- (C) 6055 (D) -6055

1. 令 $1005 = x$,

$$\begin{aligned} \text{則 } (x-3)^2 - (x+4)(x-4) &= x^2 - 6x + 9 - x^2 + 16 = -6x + 25 \\ &= -6(1005) + 25 = -6005 \end{aligned}$$

◎(D) 2. 若 $x - y + 1 = 0$, 求 $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3$ 之值為何?

- (A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 8

$$\begin{aligned} 2. (x^2 - 2xy + y^2) - (4x - 4y) + 3 &= (x-y)^2 - 4(x-y) + 3 \\ &= 1 + 4 + 3 = 8 \end{aligned}$$

(C) 3. 試求 $\frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{200}} \times \frac{3}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{200}}$ 之值為何呢?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$$3. \frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{200}} \times \frac{3}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{200}} = \frac{3}{(7-6)^{200}} = \frac{3}{1} = 3$$

(B) 4. 已知 a, b 均為正整數, 若 $(3x - a)^2 = 9x^2 - bx + 16$, 試求 $2b - a$ 的值為何呢?

- (A) 22 (B) 44
-
- (C) 55 (D) 66

4. $(3x - a)^2 = 9x^2 - 6ax + a^2 = 9x^2 - bx + 16$,

經過對照可知 $\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ (負不合)

$$-6a = -b \Rightarrow -6 \times 4 = -b \Rightarrow b = 24, 2b - a = 2 \times 24 - 4 = 44$$

(A) 5. 試求 $(\sqrt{13} + \sqrt{12})^{101} (\sqrt{12} - \sqrt{13})^{101}$ 之值為何呢?

- (A) -1 (B) 0
-
- (C) 1 (D) 2

5. $(\sqrt{12} + \sqrt{13})^{101} (\sqrt{12} - \sqrt{13})^{101}$

$$= [(\sqrt{12} + \sqrt{13})(\sqrt{12} - \sqrt{13})]^{101} = (12 - 13)^{101} = -1$$

(C) 6. 下列數學式, 不是多項式的數學式有幾個呢?

6. 非多項式為: (b)、(d)、(e), 共 3 個

- (a)
- $3x - x^2 - 1$
- (b)
- $\frac{1}{x} + 3$
- (c)
- $\frac{1}{5}x^2 + 3$
- (d)
- $\sqrt{x} + 2$
- (e)
- $|x|^2 + x + 1$
- (f) 17

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(C) 7. 若 $(a + 3)x^2 + (b - 1)x + (2a - b + 3)$ 為常數多項式, 則此多項式為何?

- (A) -2 (B)
- $x + 2$
- (C) -4 (D)
- $x - 4$

7. $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3; b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

故多項式為 $2(-3) - 1 + 3 = -4$ (C) 8. 若 $(3x + 1)(x^2 - ax + 1) = bx^3 + 2x^2 + cx + d$, 求 $a + b + c + d = ?$

- (A) 5 (B) 6
-
- (C) 7 (D) 8

8. 展開後得 $3x^3 - 3ax^2 + 3x + x^2 - ax + 1 = 3x^3 + (1 - 3a)x^2 + (3 - a)x + 1$

$$\text{比較係數得 } b = 3, 1 - 3a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, c = \frac{10}{3}, d = 1; a + b + c + d = 7$$

(C) 9. 若有一多項式 $a(x^3 - x^2) + b(x^3 - x + 2) + x^2 + ax + 2$ 為一次多項式, 請問: $2a + b$ 為何呢?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

9. 原式 $= (a + b)x^3 + (1 - a)x^2 + (a - b)x + 2b + 2$

則 $a + b = 0, 1 - a = 0$

$\Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow 2a + b = 1$

(C) 10. 若 $(3x^4 - 6x^3 + 2x + 6) \div 3x^2$ 的商式為 p , 餘式為 q , 則 $p + q = ?$

- (A)
- $x^2 - 6$
- (B)
- $x^2 + 4x + 6$
-
- (C)
- $x^2 + 6$
- (D)
- $4x + 6$

10. $p + q = x^2 - 2x + 2x + 6 = x^2 + 6$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x \\ 3x^2 \overline{) 3x^4 - 6x^3 + 2x + 6} \\ \underline{3x^4} \\ -6x^3 \\ \underline{-6x^3} \\ 2x + 6 \end{array}$$

解題小秘方 第 1 題: $1009 \times 1001 = (1005 + 4)(1005 - 4)$ 。

$$\text{第 4 題: } 9x^2 - 6ax + a^2 = 9x^2 - bx + 16 \Rightarrow \begin{cases} -6a = -b \\ a^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 4 \text{ (負不合)}。$$

$$\text{第 5 題: } (a + b)^n \times (a - b)^n = [(a + b)(a - b)]^n = (a^2 - b^2)^n。$$

(A) 11. 在 $(x^2 - 100) + (x^2 - 99) + \dots + (x^2 - 2) + (x^2 - 1)$ 中，最後多項式的次數應為多少？

- (A) 2 (B) 3 (C) 99 (D) 100

11. 原式 = $100x^2 - 5050$ ，多項式次數為 2

(C) 12. 若 $(x - 1)(58x + 7) + (8x - 7)^2 + (101x - 100)^2 = ax^2 + bx + c$ ，則 $a + b + c = ?$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

12. 令 $x = 1$ 代入 $\Rightarrow 0 + 1 + 1 = 2$

(D) 13. 已知 B 為一多項式，且 $B \cdot (-4x + 5) = -8x^2 + 14x - 5$ ，則 $B = ?$

- (A) $-2x - 1$
(B) $-2x + 1$
(C) $2x + 1$
(D) $2x - 1$

13.
$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ -4x + 5 \overline{) -8x^2 + 14x - 5} \\ \underline{-8x^2 + 10x} \\ 4x - 5 \\ \underline{4x - 5} \\ 0 \end{array}$$

(B) 14. 在 $(2x^2 - x + 5)(3x^2 - 1 + 2x)$ 的展開式中， x^2 的係數為何？

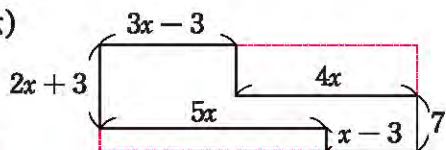
- (A) 10 (B) 11
(C) 12 (D) 13

14. $\therefore (2x^2 - x + 5)(3x^2 + 2x - 1)$ ， $\therefore x^2$ 的係數為 $-2 - 2 + 15 = 11$

(D) 15. 如右圖，此圖形的面積為下列何者？(以 x 的式子表示)

- (A) $14x^2 + 34x$
(B) $4x^2 + 4x$
(C) $14x^2 + 4x$
(D) $4x^2 + 34x$

15. 面積 = $(7x - 3)(3x) - (3x - 7)4x - 5x(x - 3)$
 $= 21x^2 - 9x - 12x^2 + 28x - 5x^2 + 15x$
 $= 4x^2 + 34x$



歷屆基測題

(D) 1. 化簡 $(4x^2 - 5x + 7) - (-2x^2 + x - 4)$ 之後，可得下列哪一個結果？

- (A) $2x^2 - 4x + 3$ (B) $2x^2 - 6x + 11$
(C) $6x^2 - 4x + 3$ (D) $6x^2 - 6x + 11$

98 基測一
1. 原式 = $(4x^2 + 2x^2) + (-5x - x) + (7 + 4)$
 $= 6x^2 - 6x + 11$ ，故選(D)

(D) 2. 將一多項式 $[(17x^2 - 3x + 4) - (ax^2 + bx + c)]$ ，除以 $(5x + 6)$ 後，得商式為 $(2x + 1)$ ，餘式為 0。求 $a - b - c = ?$

- (A) 3 (B) 23
(C) 25 (D) 29

98 基測一
2. $[(17x^2 - 3x + 4) - (ax^2 + bx + c)] = (5x + 6)(2x + 1)$
 $17x^2 - 3x + 4 - (ax^2 + bx + c) = (5x + 6)(2x + 1)$
 $17x^2 - 20x - 2 = ax^2 + bx + c$
 故 $a - b - c = 7 - (-20) - (-2) = 29$

(D) 3. 計算 $(320^2 - 160^2) \times \frac{1}{160}$ 之值為何？

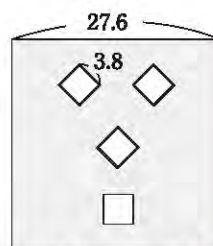
- (A) 3 (B) 160 (C) 320 (D) 480

97 基測二
3. 原式 = $(320 + 160)(320 - 160) \times \frac{1}{160}$
 $= 480 \times 160 \times \frac{1}{160} = 480$

※(D) 4. 如右圖，阿倉用一張邊長為 27.6 公分的正方形厚紙板，剪下邊長皆為 3.8 公分的四個正方形，形成一個有眼、鼻、口的面具。求此面具的面積為多少平方公分？

- (A) 552
(B) 566.44
(C) 656.88
(D) 704

4. 面積 = $(27.6)^2 - 4 \times (3.8)^2 = (27.6)^2 - (2 \times 3.8)^2$
 $= (27.6)^2 - (7.6)^2 = (27.6 - 7.6)(27.6 + 7.6)$
 $= 20 \times 35.2 = 704$



(單位：公分)

86 基測一

(B) 5. 已知 $119 \times 21 = 2499$, 求 $119 \times 21^3 - 2498 \times 21^2 = ?$

- (A) 431 (B) 441
(C) 451 (D) 461

$$5. 119 \times 21^3 - 2498 \times 21^2 = 21^2 \times (119 \times 21 - 2498) \\ = 21^2 \times (2499 - 2498) = 441$$

85 基測一

(C) 6. $(69\frac{17}{23}) \times (70\frac{6}{23}) = a + b$, 若 a 為正整數且 $0 < b < 1$, 則 $a = ?$

- (A) 3583 (B) 3584
(C) 4899 (D) 4900

$$6. 原式 = (70 - \frac{6}{23})(70 + \frac{6}{23}) = 70^2 - (\frac{6}{23})^2 \\ = 4900 - \frac{36}{529} = 4899 + \frac{493}{529}$$

85 基測一

(A) 7. 化簡 $(\frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y) - (\frac{20}{3}x - \frac{11}{12}y)$ 之後, 可得下列哪一個結果?

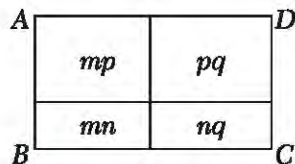
- (A) $-5x - \frac{13}{4}y$
(B) $-60x - 39y$
(C) $-70x - 14y$
(D) $-\frac{25}{3}x - \frac{61}{12}y$

$$7. 原式 = \frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{20}{3}x + \frac{11}{12}y \\ = (\frac{5}{3}x - \frac{20}{3}x) - (\frac{25}{6}y - \frac{11}{12}y) = -\frac{15}{3}x - (\frac{25}{6}y - \frac{11}{12}y) \\ = -5x - \frac{39}{12}y = -5x - \frac{13}{4}y$$



(D) 1. 如右圖, 將長方形 $ABCD$ 分成四個小長方形, 其面積分別為 mp 、 mn 、 pq 、 nq , 則 $\overline{AD} + \overline{AB} = ?$

- (A) $m - q - p - n$
(B) $m + q - p + n$
(C) $m - q + p - n$
(D) $m + q + p + n$



$$1. 四邊形 $ABCD$ 面積 $= mp + pq + mn + nq = \overline{AD} \times \overline{AB} = (m + q) \times (p + n) \\ \Rightarrow \overline{AD} + \overline{AB} = m + q + p + n$$$

(D) 2. 若 $x^2 + 5x - 5 = 0$, 則 $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ 之值為何?

- (A) 76 (B) 45
(C) 84 (D) 99

$$2. x^2 + 5x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x = 5, \\ 求值式 $= (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) \\ = (5 + 4)(5 + 6) = 99$$$

(A) 3. 若 $a - \frac{1}{b} = 9$, $ab + \frac{1}{ab} = 83$, 求 $b - \frac{1}{a} = ?$

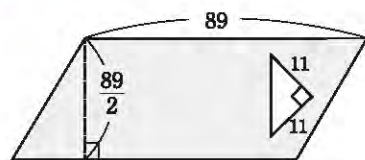
- (A) 9 (B) 18
(C) 33 (D) 81

$$3. \because (a - \frac{1}{b})(b - \frac{1}{a}) = ab - 1 - 1 + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{ab} - 2 \\ = 83 - 2 = 81 \\ \therefore b - \frac{1}{a} = 81 \div 9 = 9$$

(B) 4. 如右圖, 求灰色部分的面積為何?

- (A) 2990
(B) 3900
(C) 7800
(D) 8700

$$4. 灰色部分的面積 \\ = 平行四邊形面積 - 內部三角形的面積 \\ = 89 \times (\frac{89}{2}) - \frac{1}{2} \times 11 \times 11 = \frac{1}{2} (89^2 - 11^2) \\ = \frac{1}{2} (89 + 11)(89 - 11) = \frac{1}{2} \times 100 \times 78 \\ = 3900 \text{ (平方單位)}$$



(B) 5. 假設 $x - 2y = 3$, 則 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6$ 之值為何呢?

- (A) -1 (B) 0
(C) 1 (D) 2

$$5. 求值式 $= (x - 2y)^2 - 5(x - 2y) + 6, \\ 將 x - 2y = 3 代入 \Rightarrow 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$$

(D) 6. 若多項式 A 、 B 皆為 x 的三次多項式，則下列三人的敘述何者正確？

- 甲生： $A - B$ 可能只有一項常數項
 乙生： $A - B$ 可能是 x 的三次多項式
 丙生： $A - B$ 可能是 x 的二次多項式
 (A) 甲對 (B) 乙對
 (C) 丙對 (D) 全部說的都對

6. 假設 A 、 B 為兩多項式，其次數分別是 m 、 n ，則
 ①若 $m = n$ ，則 $A \pm B$ 的次數不大於 m 次
 ②若 $m > n$ ，則 $A \pm B$ 的次數是 m 次

(A) 7. 設 a 、 b 為整數，若 $A = |a - 2|x^3 + |b + 3|x^2 + ax - b$ 為一次多項式，求 $a + b = ?$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

7. $\because A$ 為一次多項式， $\therefore \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$
 $\therefore a + b = 2 - 3 = -1$

(B) 8. 多項式 $5x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ 與 $3x^2 - 6x + 2$ 的和加上下列何式等於零次多項式？

- (A) $5x^3 + x^2 - 2x + 1$ (B) $-5x^3 - x^2 + 2x + 2$
 (C) $5x^3 + x^2 - 2x - 1$ (D) $-5x^3 - x^2 - 2x - 2$

8. $(5x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + (3x^2 - 6x + 2)$
 $= 5x^3 + x^2 - 2x - 1$
 \Rightarrow 加上 $-5x^3 - x^2 + 2x + n$ ($n \neq 1$)

(B) 9. 假設 $A = x^2 + xy - 2y^2$ ， $B = x^2 - 2xy + 3y^2$ ， $C = -3x^2 + 5y^2$ ，則 $A - 2B + 3C = ?$

- (A) $-6x^2 + 3xy + 5y^2$
 (B) $-10x^2 + 5xy + 7y^2$
 (C) $-9x^2 - 6xy + 25y^2$
 (D) $9x^2 + 6xy + 25y^2$

9. $A - 2B + 3C = (x^2 + xy - 2y^2) - 2(x^2 - 2xy + 3y^2) + 3(-3x^2 + 5y^2)$
 $= (1 - 2 - 9)x^2 + (1 + 4)xy + (-2 - 6 + 15)y^2$
 $= -10x^2 + 5xy + 7y^2$

(B) 10. 若多項式 $x^3 + 4x^2 + 5x - 5$ 除以 A ，得商式 $x + 2$ ，餘式 $2x - 3$ ，請問： $A = ?$

- (A) $x^2 - 2x - 1$ (B) $x^2 + 2x - 1$
 (C) $2x^2 + 2x - 1$ (D) $2x^2 + 2x - 2$

10. $x^3 + 4x^2 + 5x - 5 = A \times (x + 2) + (2x - 3)$
 $x^3 + 4x^2 + 5x - 5 - 2x + 3 = A \times (x + 2)$
 $\Rightarrow A = x^2 + 2x - 1$

(D) 11. 假設 $3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x^2 - 2x + 3)(px + q) + r$ ，請問： p 、 q 、 r 的大小為何呢？

- (A) $q > r > p$ (B) $q > p > r$
 (C) $p > r > q$ (D) $p > q > r$

11.
$$\begin{array}{r} 3+2 \\ 1-2+3 \overline{) 3-4+5-6} \\ \underline{3-6+9} \\ 2-4-6 \\ \underline{2-4+6} \\ -12 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} px + q = 3x + 2 \\ r = -12 \end{cases} \Rightarrow p > q > r$$

(B) 12. 有一多項式為 $(ax^5 - x^4 + x^2 - 2x + 4) + (bx^4 - x + 2)$ ，假設為二次多項式，請問： $a + b = ?$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

12. $ax^5 + (b - 1)x^4 + x^2 - 3x + 6$ 為二次多項式
 $\Rightarrow a = 0, b - 1 = 0, b = 1 \Rightarrow a + b = 1$

(A) 13. 若一多項式 $ax^2 + bx + c$ ， a 、 b 、 c 均為整數，且 $2|a| + |b + 1| + 3|c + 2| = 1$ ，請問：該多項式的次數為何呢？

- (A) 零次或一次 (B) 零次或二次
 (C) 一次或二次 (D) 三次

13. $|a| = 0, |b + 1| = 1, |c + 2| = 0$
 $\Rightarrow a = 0, b = 0$ 或 $-2, c = -2$
 \Rightarrow 多項式為 -2 或多項式為 $-2x - 2$
 \Rightarrow 多項式為零次或一次多項式

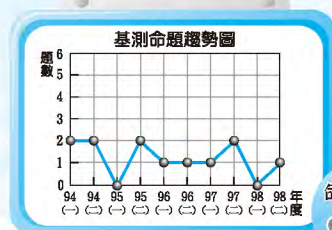
解題小幫手

第 12 題：將式子整理後，因為是二次多項式，所以高於二次的項皆為 0。

第 13 題： $2|a| + |b + 1| + 3|c + 2| = 1$ ，絕對值必大於等於 0，所以 $|a|$ 與 $|c + 2|$ 必為 0，否則與題意無法符合。

第 10 單元

平方根與勾股定理



命題率
80%

能力一 平方根

一 二次方根 (平方根)

1. 一個正數 a 是另一個數 b 的平方，記作： $b^2 = a$ ，亦即 b 是 a 的二次方根或稱為平方根。
2. 一個正數 a 的平方根有兩個，記作： $\pm\sqrt{a}$ 。

二 二次方根的性質 (a 為實數)

屬性	狀態	說明
$a > 0$	$\pm\sqrt{a}$	2 個平方根
$a = 0$	$\sqrt{0} = 0$	1 個平方根 0
$a < 0$	沒有平方根	負數沒有平方根
$a \geq 0$	$\sqrt{a^2} = a = (\sqrt{a})^2$	

三 必背的完全平方數

n^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

四 二次方根的近似值

當一個大於 0 且非完全平方的數，將其開根號後，所得到的數值皆為無理數，亦即為一個不循環且無限的小數。因此，我們可以求其近似值代表該二次方根。

五 求近似值的方式

1. 使用乘開方表

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$	N^3	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
55	3025	7.416198	23.45208	166375	3.802952	8.193213	17.65174
56	3136	7.483315	23.66432	175616	3.825862	8.242571	17.75808
57	3249	7.549834	23.87467	185193	3.848501	8.291344	17.86316
58	3364	7.615773	24.08319	195112	3.870877	8.339551	17.96702

例 1：由上表可查 $\sqrt{56} \doteq 7.483315$ ， $\sqrt{570} \doteq 23.87467$ ， $58^2 = 3364$ 。

2. 十分逼近法

若 a 、 x 、 b 皆為正數，則 $a^2 < x < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{x} < \sqrt{b^2} \Leftrightarrow a < \sqrt{x} < b$ 。

例2：試求 $\sqrt{56}$ 的近似值到小數第一位？

$$7^2 < 56 < 8^2 \Rightarrow \sqrt{7^2} < \sqrt{56} < \sqrt{8^2} \Rightarrow 7 < \sqrt{56} < 8,$$

$$7.4^2 < 56 < 7.5^2 \Rightarrow \sqrt{7.4^2} < \sqrt{56} < \sqrt{7.5^2} \Rightarrow 7.4 < \sqrt{56} < 7.5。$$

老師傳授

平方根的性質

學生習作

1. 試求 $\frac{4}{49}$ 的平方根？

2. $9\frac{1}{25}$ 的平方根為何呢？

解

$$1. \frac{4}{49} \text{ 的平方根為 } \pm \sqrt{\frac{4}{49}} = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \pm \frac{2}{7}$$

2. $9\frac{1}{25}$ 的平方根為

$$\pm \sqrt{9\frac{1}{25}} = \pm \sqrt{\frac{226}{25}} = \pm \frac{\sqrt{226}}{5}$$

1. A 的平方根為 ± 2 ，則 $A = ?$

2. $\sqrt{1296}$ 的平方根等於多少呢？

解

$$1. A = (\pm 2)^2 = 4$$

$$2. \because 1296 = 36^2$$

$$\therefore \sqrt{1296} \text{ 的平方根亦即 } 36 \text{ 的平方根} \\ = \pm \sqrt{36} = \pm 6$$

老師傳授

方根與近似值

學生習作

1. 滿足 $9 \leq \sqrt{n} < 19$ 的正整數 n 有多少個呢？

2. 已知 $(4.24)^2 = 17.9776$ ， $(4.25)^2 = 18.0625$ ， $(4.243)^2 = 18.003045$ ，利用四捨五入法求 $\sqrt{18}$ 的近似值到小數第二位的結果為何？

解

$$1. \because 9 \leq \sqrt{n} < 19 \Rightarrow 81 \leq n < 361$$

$$\therefore n \text{ 有 } 361 - 81 = 280 \text{ (個)}$$

$$2. \because 17.9776 < 18 < 18.0625$$

$$\Rightarrow (4.24)^2 < 18 < (4.25)^2$$

$$\therefore 4.24 < \sqrt{18} < 4.25$$

$$\because (4.243)^2 = 18.003045 > 18,$$

$$\therefore \sqrt{18} < 4.243 \Rightarrow \sqrt{18} \doteq 4.24$$

1. 滿足 $20 < n < \sqrt{1000}$ 的整數 n 有多少個？

2. 已知 72 的正平方根 $\sqrt{72} \doteq 8.485$ ，請問：哪一個數的正平方根為 0.8485 呢？

解

$$1. \text{原式} \Rightarrow 20^2 < n^2 < (\sqrt{1000})^2$$

$$\Rightarrow 400 < n^2 < 1000$$

$$\because 21^2 = 441, 22^2 = 484, \dots, 31^2 = 961$$

$$n = 21, 22, \dots, 31, \text{共 } 31 - 21 + 1 = 11 \text{ 個}$$

$$2. 0.8485 \div 8.485 = 0.1$$

$$\Rightarrow \text{該數為 } = 72 \times (0.1)^2 = 0.72$$

Let's Go!

同步評量

1

(C) 1. 下列有關平方根的敘述何者正確？

(A) $\because (\pm 2)^2 = 4 \therefore \sqrt{4} = \pm 2$

(C) $\sqrt{625}$ 的平方根為 ± 5

(B) 若 a 為 b 的平方根，則 $a = b^2$

(D) -16 的平方根為 ± 4

1. (A) $\sqrt{4} = 2$; (B) $b = a^2$

(C) $\sqrt{625} = 25$ ，其平方根 $= \pm \sqrt{25} = \pm 5$

(D) -16 沒有平方根

(A) 2. 若 $\sqrt{10-a}$ 為整數，則正整數 a 之值有多少個？

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

2. $\therefore \sqrt{10-a}$ 為整數
 $\therefore a$ 可為 1、6、9、10，共 4 個

(C) 3. 欲使 $\sqrt{7b}$ 及 b 均為二位正整數，則 b 可為下列何數？

- (A) 18 (B) 20
 (C) 28 (D) 30

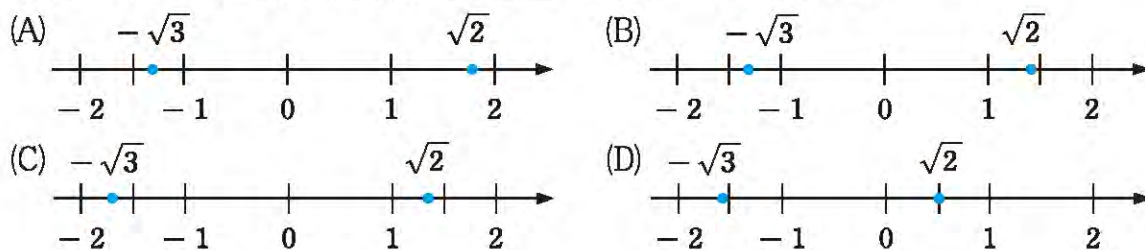
3. (A) $7 \times 18 = 126$ 非完全平方數，(B) $7 \times 20 = 140$ 非完全平方根，(C) $7 \times 28 = 196 = 14^2$ ，(D) $7 \times 30 = 210$ 非完全平方數

(C) 4. 若 -3 為 $3a+b+1$ 之一個平方根，且 $a+2b+3$ 之平方根為 ± 2 ，則 $a-b$ 之平方根為何？

- (A) 2 (B) 4
 (C) ± 2 (D) ± 4

4. $\begin{cases} 3a+b+1 = (-3)^2 = 9 \\ a+2b+3 = (\pm 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=-1$
 $\therefore a-b=4$ 之平方根為 ± 2

(C) 5. 試問 $-\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{2}$ 在數線上的相對位置，下列哪一選項較合理？



5. $\therefore \sqrt{3} = 1.732 \dots \therefore -2 < -\sqrt{3} < -1.5$ ，又 $\therefore \sqrt{2} = 1.414 \dots \therefore 1 < \sqrt{2} < 1.5$

(A) 6. 滿足 $\sqrt{87} < x < \sqrt{1998}$ 的整數 x 的個數為何？(已知 $\sqrt{87} \doteq 9.3274$ ， $\sqrt{1998} \doteq 44.6990$)

- (A) 35 (B) 36
 (C) 37 (D) 38

6. $\therefore \sqrt{87} \doteq 9.3274$ ， $\sqrt{1998} \doteq 44.6990$ ， x 最小為 10，最大為 44
 \therefore 整數 x 有 $44 - 10 + 1 = 35$ (個)

(A) 7. 已知 $\sqrt{21} = 4.5826$ ， $\sqrt{2.1} = 1.4491$ ，則 $\sqrt{210} = ?$

- (A) 14.491 (B) 45.826
 (C) 0.45826 (D) 0.14491

7. $\therefore \sqrt{210} = \sqrt{2.1 \times 100} = \sqrt{2.1} \times 10$
 $= 1.4491 \times 10 = 14.491$

能力二 平方根的運算

一 二次方根的乘、除法

1. 乘法 (當 $a \geq 0, b \geq 0$) $\Rightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。

2. 除法 (當 $a \geq 0, b > 0$) $\Rightarrow \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$ 或 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

3. 最簡根式：利用根式的乘法運算，將“ $\sqrt{\quad}$ ”內的整數，整理成其因數中不再含有大於 1 的完全平方數，則這樣的根式就稱為最簡根式。

例 3 $\Rightarrow \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ， $3\sqrt{5}$ 就是 $\sqrt{45}$ 的最簡根式。

4. 當根號內的正整數的因數含有大於 1 的完全平方數或根號內有分數、小數或分母有根式時，均不是最簡根式。

例 4 $\Rightarrow \sqrt{32}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 、 $\sqrt{3.8}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 均不是最簡根式。

5. 其它重要觀念

(1) 當 $a \geq 0$	$\Rightarrow \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
(2) 當 $a \geq 0, b > 0, c \geq 0$	$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ (方根分母有理化) 欲將 $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$ 化為最簡根式 $\xrightarrow{\text{要訣}}$ 分子、分母先同乘 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 再化簡。 欲將 $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$ 化為最簡根式 $\xrightarrow{\text{要訣}}$ 分子、分母先同乘 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 再化簡。
(3) 當 a 為實數	$\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a & (\text{當 } a \geq 0) \\ -a & (\text{當 } a < 0) \end{cases}$
(4) 當 a, b 為實數	$\sqrt{(a-b)^2} = a-b = \begin{cases} (a-b) & (\text{當 } a \geq b) \\ (b-a) & (\text{當 } a < b) \end{cases}$
(5) 當 $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = 0$	$\Leftrightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

6. 根式的加減運算：先將各項化為最簡根式，再合併同類方根。

例5： $\sqrt{8} + \sqrt{45} + \sqrt{18} + \sqrt{80} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$ 。

7. 根式的四則運算：先乘除、後加減，遇括號則利用分配律展開。

3

老師傳授

根式的乘法

學生寫作

3

計算下列根式，並化為最簡根式：

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{7}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{4}$

(3) $\frac{8}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{243}{4}}$

解

(1) 原式 $= \sqrt{2 \times 3 \times 2^2 \times 7} = 2\sqrt{2 \times 3 \times 7} = 2\sqrt{42}$

(2) 原式 $= \frac{\sqrt{3} \times 5\sqrt{2}}{2 \times 4} = \frac{5\sqrt{2 \times 3}}{8} = \frac{5\sqrt{6}}{8}$

(3) 原式 $= \sqrt{\frac{64}{3}} \times \sqrt{\frac{243}{4}} = \sqrt{\frac{64}{3} \times \frac{243}{4}}$
 $= \sqrt{16 \times 81} = 4 \times 9 = 36$

計算下列根式，並化為最簡根式：

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{8} \times 4\sqrt{2}$

(2) $(-\sqrt{20}) \times \frac{3}{\sqrt{5}}$

(3) $\sqrt{\frac{25}{32}} \times \frac{\sqrt{2}}{15}$

解

(1) 原式 $= \sqrt{5 \times 8 \times 4^2 \times 2} = \sqrt{5 \times 2^3 \times 2^4 \times 2}$
 $= \sqrt{5 \times 2^8} = 16\sqrt{5}$

(2) 原式 $= (-\sqrt{20}) \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{20 \times 5}}{5}$
 $= -\frac{3 \times 10}{5} = -6$

(3) 原式 $= \sqrt{\frac{25}{32}} \times \sqrt{\frac{2}{225}} = \sqrt{\frac{25 \times 2}{32 \times 225}}$
 $= \sqrt{\frac{1}{16 \times 9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}$
 $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

4 老師 傳授

根式的除法

學生 習作

計算下列根式，並化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{56} \div \sqrt{6} \div \sqrt{7}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{12}} \div \sqrt{\frac{21}{40}}$$

$$(3) (-\sqrt{2}) \div \sqrt{0.01}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \sqrt{56 \div 6 \div 7} = \sqrt{\frac{56}{6 \times 7}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = \sqrt{\frac{7}{12} \times \frac{40}{21}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= -\sqrt{2 \div 0.01} = -\sqrt{2 \div \frac{1}{100}} \\ &= -\sqrt{2 \times 100} = -10\sqrt{2} \end{aligned}$$

計算下列根式，並化為最簡根式：

$$(1) 4\sqrt{2} \div 8\sqrt{10}$$

$$(2) \sqrt{0.001} \div \sqrt{5}$$

$$(3) \sqrt{\frac{24}{35}} \div \sqrt{\frac{6}{5}} \div \sqrt{\frac{14}{9}}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \sqrt{\frac{1}{1000} \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5000}} = \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^3}} \\ &= \frac{1}{10\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{500} \end{aligned}$$

$$(3) \text{原式} = \sqrt{\frac{24}{35} \times \frac{5}{6} \times \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{18}{49}} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

5 老師 傳授

根式的加減運算

學生 習作

計算下列根式，並化為最簡根式：

$$(1) \frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{3}{4}\sqrt{7}$$

$$(2) 4\sqrt{5} + \sqrt{63} - \sqrt{45} - \sqrt{7}$$

$$(3) \frac{1+5\sqrt{2}}{3} - \frac{1-\sqrt{2}}{3}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{3\sqrt{7}}{4} = \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{7} \\ &= \frac{-13}{28}\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= 4\sqrt{5} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - \sqrt{7} \\ &= \sqrt{5} + 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$(3) \text{原式} = \frac{1+5\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

計算下列根式，並化為最簡根式：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{16}}$$

$$(2) 3\sqrt{5} - 6 - (4 - 7\sqrt{5})$$

$$(3) \sqrt{5} - 2 - \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = 3\sqrt{5} - 6 + 7\sqrt{5} - 4 = 10\sqrt{5} - 10$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \sqrt{5} - 2 - \frac{(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \sqrt{5} - 2 - \frac{\sqrt{5}-2}{1} \\ &= \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} + 2 = 0 \end{aligned}$$



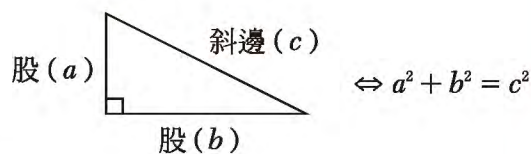
同步 評量 2

- (C) 1. 下列哪一個數與 $3\sqrt{2}$ 不是同類方根?
 (A) $\sqrt{32}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{12}$ (D) $\sqrt{50}$
 1. (A) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, (B) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
 (C) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, (D) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- (C) 2. 下列何者正確?
 (A) $\sqrt{2} + \sqrt{6} = \sqrt{8}$ (B) $4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4$ (C) $\sqrt{24} \div 2 = \sqrt{6}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{5}} \times 10 = \sqrt{6}$
 2. (A) $\sqrt{2} + \sqrt{6} \neq \sqrt{8}$, (B) $4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,
 (C) $\sqrt{24} \div 2 = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$, (D) $\sqrt{\frac{3}{5}} \times 10 = 2\sqrt{15}$
- (A) 3. 下列何者大於 1?
 (A) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 3. $\because \sqrt{5} > \sqrt{3}, \therefore \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 1$
- (D) 4. 下列哪一個數是負數?
 (A) $3 - \sqrt{3}$ (B) $\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (D) $2\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$
 4. (D) $\because 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} = \sqrt{24} - \sqrt{32} < 0$
- (B) 5. 計算 $(\sqrt{13} - \sqrt{3})^2 (\sqrt{3} + \sqrt{13})^2 - 10^2 = ?$
 (A) -3 (B) 0 (C) 3 (D) 13
 5. 原式 $= [(\sqrt{13} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{13})]^2 - 10^2$
 $= (13 - 3)^2 - 10^2 = 0$
- (D) 6. 假設 $x = \sqrt{12}$, $y = \sqrt{13}$, 則 $(x + y)^2 - 2xy$ 之值為何?
 (A) 5 (B) $5 - 4\sqrt{39}$ (C) $25 - 4\sqrt{39}$ (D) 25
 6. $(x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$
 $= (\sqrt{12})^2 + (\sqrt{13})^2$
 $= 12 + 13 = 25$
- (D) 7. 比較 $\frac{7}{5}$, $\sqrt{\frac{7}{5}}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{7}}{5}$ 四個數值, 何者最小?
 (A) $\frac{7}{5}$ (B) $\sqrt{\frac{7}{5}}$ (C) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{5}$
 7. $(\frac{7}{5})^2 = \frac{49}{25}$, $(\sqrt{\frac{7}{5}})^2 = \frac{7}{5} = \frac{35}{25}$
 $(\frac{7}{\sqrt{5}})^2 = \frac{49}{5} = \frac{245}{25}$, $(\frac{\sqrt{7}}{5})^2 = \frac{7}{25}$

能力 三 商高定理

一 商高定理 (畢氏定理)

1. 若一個三角形有一內角是直角, 則此三角形為直角三角形, 且符合下列規則: **兩股平方和等於斜邊的平方**。



2. 已知有一直角三角形的兩股為 a 、 b , 斜邊為 c , 則:

$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
--	--	--

二 商高數

商高數是指直角三角形三邊長皆為**整數形式**, 常見的商高數如下所示:

(3、4、5)、(5、12、13)、(7、24、25)、(8、15、17)、(9、40、41)、(20、21、29) 等等, 請同學要熟記上面之商高數, 可省去許多繁雜的計算。

三 特殊的直角三角形

(30°直角三角形) (必背)	(等腰直角三角形) (必背)	(15°直角三角形) (參考)	(3、4、5 直角三角形) (參考)

6

老師 傳授

商高定理

學生 實作

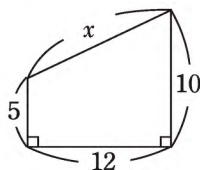
6

1. 已知直角三角形的兩邊長分別為 6 和 8，試求第三邊的長為何呢？
2. $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為邊長的兩正方形面積分別是 169cm^2 、 25cm^2 ，則 \overline{AC} 為多少 cm ？

解

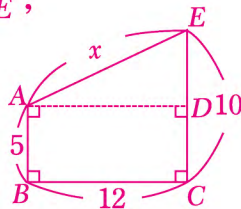
1. 第三邊長 $= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ ，若第三邊是其中一股，則 $\sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
2. $\because \angle C = 90^\circ \therefore \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ ，
 $169 = 25 + \overline{AC}^2$ ，
 $\therefore \overline{AC}^2 = 169 - 25$ ， $\therefore \overline{AC} = 12$ (公分)

1. 設矩形面積為 120 平方公分，寬為 8 公分，則對角線長是多少公分？
2. 右圖中的 x 值為何呢？



解

1. 長方形的長 $= 120 \div 8 = 15$
 \therefore 對角線長 $= \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ (公分)
2. 如圖，過 A 點作 \overline{AD} 垂直 \overline{CE} ，則 $\overline{AD} = \overline{BC} = 12$ ，
 $\overline{ED} = 10 - 5 = 5$ ，
故 $x = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (單位)



7

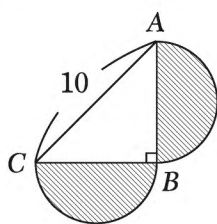
老師 傳授

商高定理的應用 I

學生 實作

7

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 10$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，若以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為直徑各自作出一半圓，則斜線部分面積共多少平方單位？

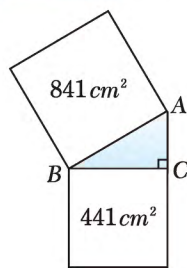


解

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\overline{AB}}{2} \right)^2 \pi + \left(\frac{\overline{BC}}{2} \right)^2 \pi \right] \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) \\ &\because \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \\ &\therefore \text{斜線面積} = \frac{\pi}{8} \times \overline{AC}^2 = \frac{\pi}{8} \times 10^2 \\ &= \frac{25}{2} \pi \text{ (平方單位)} \end{aligned}$$

如圖， $\triangle ABC$ 為一直角三角形，若 $\angle C = 90^\circ$ ，請問：

- (1) $\triangle ABC$ 的面積與周長
- (2) 以 \overline{AC} 為一邊的正方形面積



解

- (1) $\overline{AC}^2 = 841 - 441 = 400$ ，
 $\overline{AC} = 20$ ，
 $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{441} \times 20 \times \frac{1}{2} = 210 \text{ (cm}^2\text{)}$
 $\triangle ABC$ 周長 $= 20 + 21 + \sqrt{841}$
 $= 20 + 21 + 29 = 70 \text{ (cm)}$
- (2) 以 \overline{AC} 為邊的正方形面積 $= 400 \text{ (cm}^2\text{)}$



老師傳授

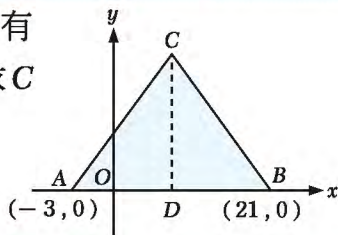
商高定理的應用 II



學生習作



如圖，在坐標平面上有一正三角形 ABC ，試求 C 點坐標？



解

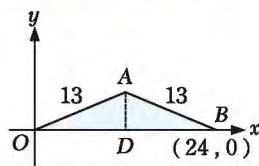
(1) \overline{AB} 的中點坐標 $D(\frac{-3+21}{2}, \frac{0+0}{2}) = (9, 0)$

C 點之 x 坐標為 9

(2) $\overline{AC} = \overline{AB} = 24 \therefore \overline{AD} = \overline{BD} = 12$
 $\overline{CD} = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$

(3) C 點坐標 $(9, 12\sqrt{3})$

如圖，在坐標平面上有 $\triangle AOB$ ， B 點坐標為 $(24, 0)$ ，若 $\overline{AO} = \overline{AB} = 13$ ，求 A 點坐標？



解

(1) \overline{OB} 的中點坐標 $D(\frac{0+24}{2}, \frac{0+0}{2}) \Rightarrow (12, 0)$

$\therefore A$ 之 x 坐標為 12

(2) $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore A$ 之 y 坐標為 5

(3) A 點坐標 $(12, 5)$



同步評量 3

1. $a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$

(B) 1. 已知直角三角形中，兩股長的平方和等於斜邊長的平方。若一直角三角形的兩股長各為 2 公分及 3 公分，且斜邊長為 a 公分，則下列哪一個選項是正確的？

- (A) $3.0 < a < 3.5$ (B) $3.5 < a < 4.0$ (C) $4.0 < a < 4.5$ (D) $4.5 < a < 5.0$

(C) 2. 一個三角形邊長為 $10\frac{1}{2}$ ，10， $14\frac{1}{2}$ ，則此三角形的面積為多少平方單位？

- (A) $\frac{75}{2}$ (B) 75
 (C) $\frac{105}{2}$ (D) 105

2. $10\frac{1}{2} : 10 : 14\frac{1}{2} = \frac{21}{2} : \frac{20}{2} : \frac{29}{2} = 21 : 20 : 29$
 $\therefore 21^2 + 20^2 = 29^2 \therefore$ 為直角 \triangle
 面積 = $10\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{1}{2} = \frac{105}{2}$

(D) 3. 直角三角形之兩股長的比為 3 : 4，且其周長為 72 公分，則三角形斜邊上的高為幾公分？

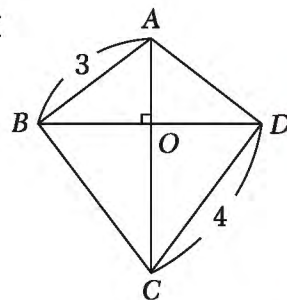
- (A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{24}{5}$
 (C) $\frac{36}{5}$ (D) $\frac{72}{5}$

3. 設兩股分別為 $3r, 4r (r \neq 0)$ ，則斜邊長為 $5r$ ，
 又 $3r + 4r + 5r = 72 \therefore r = 6$ ，
 故斜邊上高 = $\frac{3r \cdot 4r}{5r} = \frac{12r}{5} = \frac{72}{5}$ (公分)

(C) 4. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 O ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ，求 $\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = ?$

- (A) 7
 (B) 16
 (C) 25
 (D) 36

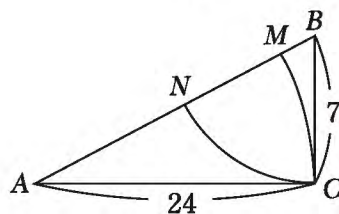
4. $\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2$
 $= (\overline{BO}^2 + \overline{AO}^2) + (\overline{CO}^2 + \overline{DO}^2) = 3^2 + 4^2 = 25$



(D) 5. 如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，兩股長為 7 和 24，分別以 A 為圓心， \overline{AC} 為半徑； B 為圓心， \overline{BC} 為半徑畫弧，交斜邊於 M, N ，則 \overline{MN} 的長度是多少？

- (A) 3 (B) 4
 (C) 5 (D) 6

5. $\overline{AB} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ ，
 $\overline{MN} = 7 + 24 - 25 = 6$



實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(B) 1. 請問： $\frac{225}{256}$ 的平方根是下列哪一個選項？

- (A)
- $\frac{15}{16}$
- (B)
- $\pm \frac{15}{16}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- (D)
- $\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$

1. $\frac{225}{256}$ 的平方根為 $\pm \sqrt{\frac{225}{256}} = \pm \frac{15}{16}$

(D) 2. 下列何者正確？

- (A)
- $\sqrt{169} = \pm 13$
- (B)
- $\sqrt{(-4)^2} = -4$
-
- (C)
- $\sqrt{9\frac{4}{25}} = 3\frac{2}{5}$
- (D)
- $-\sqrt{(-11)^2} = -11$

2. (A) $\sqrt{169} = 13$

(B) $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$

(C) $\sqrt{9\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{229}{25}} = \frac{\sqrt{229}}{5}$

(D) $-\sqrt{(-11)^2} = -|-11| = -11$

(B) 3. (甲) -8 是 64 的平方根、(乙) -12 是 -144 的平方根、(丙) 0.3 是 0.9 的平方根、(丁) $-\frac{4}{5}$ 是 $\frac{16}{25}$ 的平方根，以上四個敘述中，正確的有幾個？

- (A) 1 (B) 2
-
- (C) 3 (D) 4

3. (甲) $(-8)^2 = 64 \therefore -8$ 是 64 的平方根

(乙) $(-12)^2 = 144 \therefore -12$ 不是 -144 的平方根

(丙) $0.3^2 = 0.09 \therefore 0.3$ 不是 0.9 的平方根

(丁) $(-\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25} \therefore -\frac{4}{5}$ 是 $\frac{16}{25}$ 的平方根

(A) 4. 假設 8 是 $3x + 1$ 的平方根，則下列何者是 x 的值呢？

- (A) 21 (B) 25 (C)
- $\frac{5}{3}$
- (D)
- $\frac{17}{3}$

4. $3x + 1 = 8^2, 3x + 1 = 64, 3x = 63 \therefore x = 21$

(B) 5. 請計算 $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{7})^2 = ?$

- (A)
- -16
- (B)
- 16
- (C)
- -4
- (D)
- 4

5. 原式 $= [(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})]^2$
 $= [(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2]^2 = (-4)^2 = 16$

(C) 6. 若 $3 < x < 9$ ，且 $\sqrt{(x-9)^2} + \sqrt{(2x-6)^2} = ?$

- (A)
- $x-3$
- (B)
- -3
- (C)
- $x+3$
- (D)
- 3

6. 原式 $= |x-9| + |2x-6|$
 $= (9-x) + (2x-6) = x+3$

(D) 7. 若 $a > 0, b < 0$ ，且 $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - \sqrt{a^2b^4} = ?$

- (A)
- $a+b+ab^2$
- (B)
- $a-b+ab^2$
-
- (C)
- $a+b-ab^2$
- (D)
- $a-b-ab^2$

7. $\because a > 0, b < 0, \therefore$ 原式 $= a - b - ab^2$

(B) 8. 滿足 $11 \leq \sqrt{n} < 13$ 的整數 n 有多少個？

- (A) 47 (B) 48 (C) 49 (D) 50

8. 原式 $\Rightarrow 11^2 \leq (\sqrt{n})^2 < 13^2, 121 \leq n < 169,$
 $169 - 121 = 48$ (個)

(D) 9. 若 $a = \sqrt{3} = 1.732\dots$ ，則 a 與 1.732 的大小為何？

- (A)
- $a < 1.732$
- (B)
- $a \leq 1.732$
-
- (C)
- $a = 1.732$
- (D)
- $a > 1.732$

9. $\because 1.732\dots > 1.732 \therefore a > 1.732$

(A) 10. 一個直角三角形的斜邊長為 13 ，周長為 30 ，則此三角形的面積為何？

- (A) 30 (B) 25
-
- (C) 35 (D) 20

10. 設兩股為 $a, b \Rightarrow \begin{cases} a+b=30-13=17, \\ a^2+b^2=13^2=169 \end{cases}$
面積 $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a^2+b^2)] = \frac{1}{4} \times 120 = 30$

解題小 第7題： $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a| + |b|$ 。

(B) 11. 設一直角三角形的斜邊長為 $a^2 + b^2$ ，一股長為 $2ab$ ，則另一股長為何？

- (A) $a^2 - b^2$ (B) $|a^2 - b^2|$
 (C) $(a^2 - b^2)^2$ (D) $a^2 - ab + b^2$

$$11. \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}$$

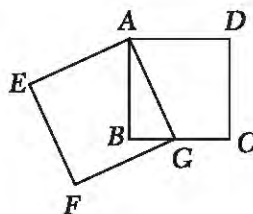
$$= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2} = |a^2 - b^2|$$

(C) 12. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 與 $AEFG$ 均為正方形，若 $ABCD$ 的面積為 78 平方公分， $AEFG$ 的面積為 94 平方公分，則 $\overline{BG} = ?$

- (A) 2
 (B) 3
 (C) 4
 (D) 5

$$12. \overline{AB} = \sqrt{78}, \overline{AG} = \sqrt{94},$$

$$\overline{BG} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(\sqrt{94})^2 - (\sqrt{78})^2} = \sqrt{94 - 78} = \sqrt{16} = 4$$



(B) 13. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BF}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{BF}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{DF} = \sqrt{6}$ ，求 $\overline{CF} = ?$

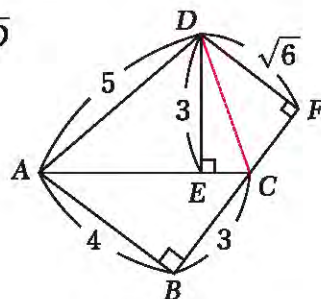
- (A) $\sqrt{3}$
 (B) 2
 (C) $\sqrt{5}$
 (D) $\sqrt{6}$

$$13. \overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \overline{AE} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\overline{EC} = 5 - 4 = 1$$

$$\therefore \overline{DC} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \overline{CF} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{4} = 2$$



(C) 14. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，則下列何者錯誤？

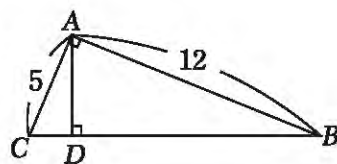
- (A) $\overline{BC} = 13$
 (B) $\overline{AD} = \frac{60}{13}$
 (C) $\overline{CD} = 4$
 (D) $\overline{BD} = \frac{144}{13}$

$$14. (A) \overline{BC} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$(B) \overline{AD} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$

$$(C) \overline{CD} \times 13 = 5^2, \overline{CD} = \frac{25}{13}$$

$$(D) \overline{BD} \times 13 = 12^2, \overline{BD} = \frac{144}{13}$$



(A) 15. 如右圖，坐標平面上點 $A(a, b)$ 在直線 $L: 4x - 3y = 0$ 上， $\overline{AB} \perp x$ 軸於 B 點，若 $\triangle AOB$ 面積為 84 平方單位，則 $\triangle AOB$ 周長為多少單位長？

- (A) $12\sqrt{14}$
 (B) $12\sqrt{12}$
 (C) $6\sqrt{14}$
 (D) $6\sqrt{12}$

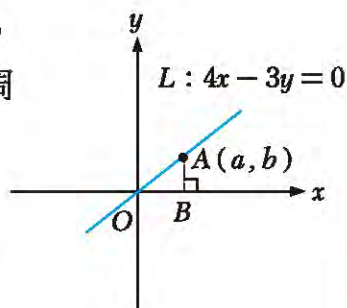
$$15. A(a, b) \text{ 代入 } 4a - 3b = 0, a = \frac{3}{4}b$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times a \times b = 84, \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}b \times b = 84$$

$$b = \pm 4\sqrt{14} \text{ (負不合)} \therefore a = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{14} = 3\sqrt{14}$$

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{(3\sqrt{14})^2 + (4\sqrt{14})^2} = 5\sqrt{14}$$

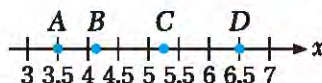
$$\therefore \text{周長} = 3\sqrt{14} + 4\sqrt{14} + 5\sqrt{14} = 12\sqrt{14}$$



(A) 1. 右圖的數線上有 A 、 B 、 C 、 D 四點，其中哪一點所表示的數最接近 $\sqrt{13.1}$ ？

- (A) A (B) B
 (C) C (D) D

98 基測二



$$1. 3^2 = 9, 4^2 = 16 \Rightarrow 3^2 < 13.1 < 4^2$$

$$\Rightarrow 3 < \sqrt{13.1} < 4, \text{ 故選(A)}$$

88 基測一

(C) 2. 對於 $\sqrt{5678}$ 的值，下列關係式何者正確？

- (A) $55 < \sqrt{5678} < 60$ (B) $65 < \sqrt{5678} < 70$
 (C) $75 < \sqrt{5678} < 80$ (D) $85 < \sqrt{5678} < 90$

2. $\because 75^2 = 5625, 80^2 = 6400$
 $\therefore 75^2 < 5678 < 80^2$
 故 $75 < \sqrt{5678} < 80$

87 基測二

(A) 3. 若 a 是 200.4 的正平方根，則下列關係式何者正確？

- (A) $14 < a < 15$ (B) $20.0 < a < 20.1$
 (C) $200 < a < 201$ (D) $40000 < a < 40401$

3. $a^2 = 200.4, 14^2 < a^2 < 15^2, 196 < a^2 < 225$

87 基測一

(B) 4. $\sqrt{19}$ 的值介於下列哪兩數之間？

- (A) 4.2, 4.3 (B) 4.3, 4.4
 (C) 4.4, 4.5 (D) 4.5, 4.6

4. $(4.3)^2 = 18.49, (4.4)^2 = 19.36$
 $\Rightarrow (4.3)^2 < 19 < (4.4)^2 \Rightarrow 4.3 < \sqrt{19} < 4.4$

87 基測一

※(A) 5. 以下是甲、乙、丙三人看地圖時對四個地標的描述：

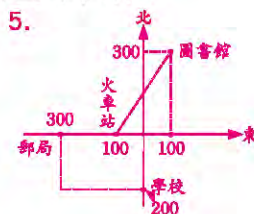
甲：從學校向北直走 500 公尺，再向東直走 100 公尺可到圖書館。

乙：從學校向西直走 300 公尺，再向北直走 200 公尺可到郵局。

丙：郵局在火車站西方 200 公尺處。

根據三人的描述，若從圖書館出發，判斷下列哪一種走法，其終點是火車站？

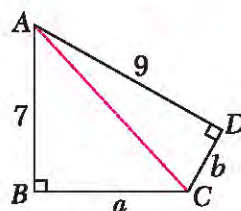
- (A) 向南直走 300 公尺，再向西直走 200 公尺
 (B) 向南直走 300 公尺，再向西直走 600 公尺
 (C) 向南直走 700 公尺，再向西直走 200 公尺
 (D) 向南直走 700 公尺，再向西直走 600 公尺



(B) 6. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CD} = b$ 、 $\overline{AD} = 9$ ，求 $(a+b)(a-b) = ?$

- (A) 16
 (B) 32
 (C) 63
 (D) 130

6. 連接 \overline{AC} ， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}^2 = 7^2 + a^2$ ，
 在 $\triangle ADC$ 中， $\overline{AC}^2 = 9^2 + b^2$
 $\therefore 7^2 + a^2 = 9^2 + b^2, a^2 - b^2 = 9^2 - 7^2 = 32$

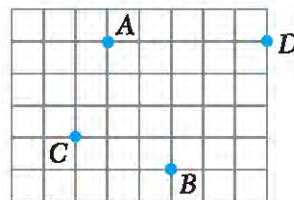


85 基測二

(A) 7. 右圖為 A、B、C、D 四點在方格紙上的位置圖，其中每一點均位於某兩線的交點上。關於 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的形狀，下列判斷何者正確？

- (A) 兩個都是等腰三角形
 (B) 兩個都不是等腰三角形
 (C) $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $\triangle ABD$ 不是等腰三角形
 (D) $\triangle ABC$ 不是等腰三角形， $\triangle ABD$ 是等腰三角形

7. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ ，
 $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，
 $\Rightarrow \triangle ABC$ 為等腰直角三角形
 $\triangle ABD$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{20}$ ， $\overline{AD} = 5$ ，
 $\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \triangle ABD$ 為等腰三角形



85 基測二

基測趨勢題

(C) 1. 下列敘述何者錯誤呢？

- (A) 395 的正平方根比 20 小 (B) 15 的正平方根介於 3 與 4 之間
 (C) 235 的正平方根比 15 小 (D) 441 的平方根為 ± 21

1. (A) $\because 20^2 = 400 > 395 \therefore \sqrt{395} < 20$
 (B) $\because 3^2 = 9 < 15, 4^2 = 16 > 15 \therefore 3 < \sqrt{15} < 4$
 (C) $\because 15^2 = 225 < 235 \therefore \sqrt{235} > 15$
 (D) 441 的平方根為 $\pm \sqrt{441} = \pm 21$

(C) 2. 請問： $\sqrt{2401}$ 的平方根等於多少呢？
 (A) ± 49 (B) 49 (C) ± 7 (D) 7

2. $\because 2401 = 7^4 \therefore 2401 = 49^2$,
 $\sqrt{2401}$ 的平方根即為 49 的平方根為 ± 7

(D) 3. 已知 $b^2 = 625$, $b > 0$, 則 b 的平方根為何呢？
 (A) 25 (B) ± 25 (C) 5 (D) ± 5

3. $\because b^2 = 625 = 25^2$ 且 $b > 0$
 $\therefore b = 25$, b 的平方根為 $\pm \sqrt{25} = \pm 5$

(B) 4. 若 $x + y$ 的負平方根是 -3 , 且 $x - y$ 的正平方根是 5, 求 $x + 2y = ?$
 (A) 8 (B) 1 (C) 2 (D) -8

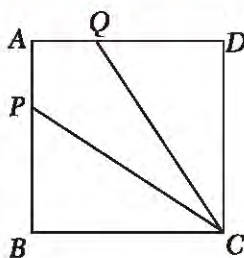
4. $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 25 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 17 \\ y = -8 \end{cases}$, $x + 2y = 17 - 16 = 1$

(A) 5. 滿足 $\sqrt{93} < x < \sqrt{2007}$ 的整數 x 有多少個呢？
 (A) 35 (B) 36
 (C) 37 (D) 38

5. $\because 9^2 = 81 < 93, 10^2 = 100 > 93$
 $\therefore 9 < \sqrt{93} < 10$, 又 $44 < \sqrt{2007} < 45$
 $\therefore 9 < x < 44$
 $\Rightarrow x$ 的整數值共有 $44 - 9 = 35$ (個)

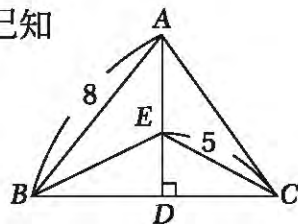
(C) 6. 如右圖, 正方形 $ABCD$ 的邊長為 15, \overline{CP} 和 \overline{CQ} 將此正方形面積分成三等分, 則 $\overline{CP} = ?$
 (A) $5\sqrt{35}$
 (B) $3\sqrt{35}$
 (C) $5\sqrt{13}$
 (D) $3\sqrt{15}$

6. $\frac{15^2}{3} = 75$, $\frac{1}{2} \times 15 \times \overline{PB} = 75$, $\overline{PB} = 10$,
 則 $\overline{PC} = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$



(D) 7. 如右圖, $\triangle ABC$ 中, \overline{AD} 垂直 \overline{BC} 於 D , E 是 \overline{AD} 上的任一點, 已知 $\overline{AB} = 8$, $\overline{CE} = 5$, 求 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2$ 之值為何？
 (A) 86
 (B) 87
 (C) 88
 (D) 89

7. 由商高定理可知
 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{BD}^2$
 $= (\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2) + (\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2)$
 $= \overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = 64 + 25 = 89$



(C) 8. 已知 x, y 為整數, 且 $\sqrt{(2x + 3y - 3)^2} + \sqrt{(3x - 4y - 13)^2} = 0$, 求 $15x - 4y$ 的平方根 = ?
 (A) ± 3 (B) ± 5
 (C) ± 7 (D) ± 9

8. $|2x + 3y - 3| + |3x - 4y - 13| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = -1$
 $\therefore 15x - 4y = 15 \times 3 - [4 \times (-1)] = 49$
 $\therefore 15x - 4y$ 的平方根 = $\pm \sqrt{49} = \pm 7$

(C) 9. 如果符號 $[\sqrt{x}]$ 表示 \sqrt{x} 的整數部分, 例如 $[\sqrt{2}] = 1$, $[\sqrt{5}] = 2$, 則 $[\sqrt{7}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{13}] + [\sqrt{17}] = ?$
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

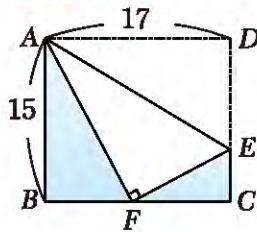
9. $\because 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25$,
 \therefore 原式 = $2 + 3 + 3 + 4 = 12$

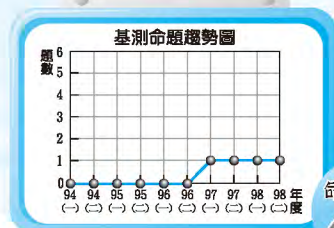
(C) 10. 設 $a = \sqrt{17} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{13} - \sqrt{7}$, $c = \sqrt{15} - \sqrt{5}$, 比較 a, b, c 的大小關係為何？
 (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$
 (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

10. $a^2 = (\sqrt{17} - \sqrt{3})^2 = 17 - 2\sqrt{51} + 3 = 20 - 2\sqrt{51}$
 $b^2 = (\sqrt{13} - \sqrt{7})^2 = 13 - 2\sqrt{91} + 7 = 20 - 2\sqrt{91}$
 $c^2 = (\sqrt{15} - \sqrt{5})^2 = 15 - 2\sqrt{75} + 5 = 20 - 2\sqrt{75}$
 $\therefore \sqrt{91} > \sqrt{75} > \sqrt{51}$,
 又所減的數越大所得的值越小 $\Rightarrow b < c < a$

(B) 11. 如右圖, 矩形 $ABCD$ 中, $\overline{AB} = 15$, $\overline{AD} = 17$, 今將其折疊, 使頂點 D 落在 \overline{BC} 上一點 F , 請問: $\overline{BF} + \overline{EF} = ?$
 (A) 16.2 (B) 18.2
 (C) 20.2 (D) 22.2

11. $\overline{AF} = \overline{AD} = 17 \therefore \overline{BF} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$
 設 $\overline{EF} = x$, 則 $\overline{DE} = x$, $\overline{CE} = 15 - x$, 又 $\overline{CF} = 17 - 8 = 9$
 \therefore 在 $\triangle CEF$ 中, $x^2 = (15 - x)^2 + 9^2 = 225 - 30x + x^2 + 81$
 $30x = 306, x = \frac{102}{10} = 10.2, \overline{BF} + \overline{EF} = 18.2$





命題率
40%

能力 — 因式分解

一 二次式的因式分解

兩個 x 的一次式乘法展開得一個二次式；反之，如果一個二次式可以化成兩個一次式的乘積，此過程稱為**因式分解**。

乘法展開 →
 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
 ← 因式分解

二 二次式的因式分解形式

1.	分配律提公因式法	$ab \pm ac = a(b \pm c)$	例如： $(a - b)(x - y) + c(b - a)(y - x)$ $= (a - b)(x - y) + c(a - b)(x - y)$ $= (x - y)(a - b)(1 + c)$
2.	乘法公式法	(1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	例如： $(a + b)^2 + 2(a^2 - b^2) + (a - b)^2$ $= (a + b + a - b)^2 = 4a^2$

三 因式分解的重要性質

1. 因式分解後，連乘積中的每一個多項式，都是原多項式的**因式**。
2. 一個多項式本身**既是自己的因式，也是自己的倍式**。
3. 因式分解的結果，其質因式必為一次或高於一次的因式，而非常數因式，且各因式的係數，儘量不要以分數呈現。

老師 傳授

因式分解—分配律提公因式法

學生 富作

請運用分配律法則做因式分解：

(1) $2a^4 + 4a^3 - 6a^2$
 (2) $6a^3x^4 - 8a^2x^5y - 14abx^6$

解

(1) 原式 $= 2a^2(a^2 + 2a - 3)$
 $= 2a^2[(a^2 - 1) + (2a - 2)]$
 $= 2a^2[(a - 1)(a + 1) + 2(a - 1)]$
 $= 2a^2(a - 1)(a + 3)$
 (2) 原式 $= 2ax^4(3a^2 - 4axy - 7bx^2)$

請運用分配律法則做因式分解：

(1) $a(x + y) + b(x + y)$
 (2) $(x - 2)(x - 1)^3 - (x - 2)^3(x - 1)$

解

(1) 原式 $= (x + y)(a + b)$
 (2) 原式 $= (x - 2)(x - 1)[(x - 1)^2 - (x - 2)^2]$
 $= (x - 2)(x - 1)(x - 1 + x - 2)$
 $= (x - 2)(x - 1)(2x - 3)$

$$(3) \frac{xy}{3} - \frac{x^2y^2}{3} + \frac{x^2y}{4}$$

解

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \frac{4xy}{12} - \frac{4x^2y^2}{12} + \frac{3x^2y}{12} \\ &= \frac{1}{12}xy(4 - 4xy + 3x) \end{aligned}$$

$$(3)(x-2)^3 + (2-x)(x^2 - 4x + 1)$$

解

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= (x-2)^3 - (x-2)(x^2 - 4x + 1) \\ &= (x-2)[(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 1)] \\ &= (x-2)(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x - 1) \\ &= \underline{3(x-2)} \end{aligned}$$

2 老師 傳授

因式分解—乘法公式法

學生 實作

請運用乘法公式法做因式分解：

- (1) $(7x - 2y)^3 + y^2(2y - 7x)$
 (2) $(x - 1)(2x + 3)^3 - (x - 1)^3(2x + 3)$
 (3) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= (7x - 2y)^3 - y^2(7x - 2y) \\ &= (7x - 2y)[(7x - 2y)^2 - y^2] \\ &= \underline{(7x - 2y)(7x - y)(7x - 3y)} \\ (2) \text{原式} &= (x - 1)(2x + 3)[(2x + 3)^2 - (x - 1)^2] \\ &= (x - 1)(2x + 3)[(2x + 3) + (x - 1)] \\ &\quad \times [(2x + 3) - (x - 1)] \\ &= \underline{(x - 1)(2x + 3)(3x + 2)(x + 4)} \\ (3) \text{原式} &= (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2 \\ &= \underline{(3x - 4y)^2} \end{aligned}$$

請運用乘法公式法做因式分解：

- (1) $x^4 + 5x^2 + 9$
 (2) $81x^4 - 16$
 (3) $-4x^2 - y^2 + 4xy$

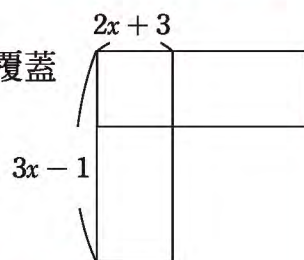
解

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2 \\ &= (x^2 + 3)^2 - x^2 \\ &= \underline{(x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)} \\ (2) \text{原式} &= (9x^2)^2 - 4^2 \\ &= (9x^2 + 4)(9x^2 - 4) \\ &= \underline{(9x^2 + 4)(3x + 2)(3x - 2)} \\ (3) \text{原式} &= -(4x^2 - 4xy + y^2) \\ &= \underline{-(2x - y)^2} \end{aligned}$$

難題

Let's Go! 同步 評量 1

- (B) 1. 請問 $3x^2 - x$ 可以分解成下列哪一個式子?
 (A) $(3 - 1)x^2$ (B) $x(3x - 1)$ (C) $(3 - 1)x$ (D) $x(3x - 0)$
 1. $3x^2 - x = 3x \times x - 1 \times x = (3x - 1) \times x = x(3x - 1)$
- (D) 2. 多項式 $x^2 - 2x - 24$ 是 $(x - 6)$ 的倍式，則下列何者不是 $x^2 - 2x - 24$ 的因式呢？
 (A) $x + 4$ (B) $2x + 8$
 (C) $12 + 3x$ (D) $2x + 12$
 2.
$$\begin{array}{r} x + 4 \\ x - 6 \overline{) x^2 - 2x - 24} \\ \underline{x^2 - 6x} \\ 4x - 24 \\ \underline{4x - 24} \\ 0 \end{array} \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4) \Rightarrow \text{(D) 不是 } x^2 - 2x - 24 \text{ 的因式}$$
- (D) 3. 多項式 $(a - b) - (a - b)^2$ 為 $a - b$ 與下列何者的乘積？
 (A) $1 + a + b$ (B) $1 - a - b$
 (C) $1 + a - b$ (D) $1 - a + b$
 3. $(a - b) - (a - b)^2 = (a - b)[1 - (a - b)] = (a - b)(1 - a + b)$
- (C) 4. 兩張相同的長方形紙片，如圖所示的重疊，請問其在桌面上的覆蓋面積為多少平方單位？
 (A) $(3x - 1)(4x + 3)$ (B) $(4x - 3)(3x - 1)$
 (C) $(4x - 5)(2x + 3)$ (D) $(2x + 3)(5x - 4)$
 4. $(2x + 3)(3x - 1) + (2x + 3)[(3x - 1) - (2x + 3)] = (2x + 3)(3x - 1) + (2x + 3)(x - 4) = (2x + 3)(4x - 5)$



(A) 5. 下列何者不能分解成兩個一次式的相乘積？

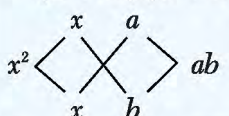
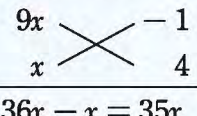
- (A) $3x^2 + 12$ (B) $3x^2 - 7x$ (C) $5x(x + 2) - 5x$ (D) $(x + 5)(x - 5) - (x - 5)$

5. (A) $3x^2 + 12 = 3(x^2 + 4)$

⇒ 無法分解成兩個一次式的相乘積

能力二 十字交乘法的因式分解

一 十字交乘法法則

十字交乘法 (用於二次三項式)	$x^2 + (a+b)x + ab$ $= (x+a)(x+b)$  $\frac{\quad}{ax + bx = (a+b)x}$	例如： $9x^2 + 35x - 4 = (9x - 1)(x + 4)$  $\frac{\quad}{36x - x = 35x}$
--------------------	---	---

二 變號法則

變號法則：因式分解時，如遇到括號內文字相同，但符號相反，習慣上可將後面括號內各項變號。

(1) 若括號為奇數次方，則括號前的符號變號。

例1： $+(a-b) = -(b-a)$ ， $-(a-b)^3 = +(b-a)^3$ 。

(2) 若括號為偶數次方，則括號前的符號不變號。

例2： $-(a-b)^2 = -(b-a)^2$ ， $(a-b)^6 = +(b-a)^6$ 。

3

老師傳授

因式分解—十字交乘法

學生習作

3

請運用十字交乘法分解下列各式：

(1) $x^2 + 10x + 24$

(2) $x^5 - 3x^3 - 4x$

解

(1) 原式 = $(x+4)(x+6)$



(2) 原式 = $x(x^4 - 3x^2 - 4) = x(x^2 - 4)(x^2 + 1)$

= $x(x-2)(x+2)(x^2 + 1)$



請運用十字交乘法分解下列各式：

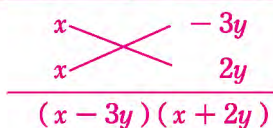
(1) $-x^2 + xy + 6y^2$

(2) $x^4 - 5x^2 + 4$

解

(1) 原式 = $-(x^2 - xy - 6y^2)$

= $-(x-3y)(x+2y)$



(2) 原式 = $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

= $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$



= $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

= $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$$(3) (x^2 - x)^2 + 8(x - x^2) + 12$$

解

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= (x^2 - x) - 8(x^2 - x) + 12 \\ &= \underline{(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)} \\ &\quad \begin{array}{l} (x^2 - x) \quad \quad \quad -2 \\ (x^2 - x) \quad \quad \quad -6 \end{array} \\ &= \underline{(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6)} \\ &= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$$(3) 5a^4b - 5a^3b^2 - 10a^2b^3$$

解

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= 5a^2b(a^2 - ab - 2b^2) \\ &= \underline{5a^2b(a-2b)(a+b)} \\ &\quad \begin{array}{l} a \quad \quad \quad -2b \\ a \quad \quad \quad b \end{array} \\ &= (a-2b)(a+b) \end{aligned}$$



(D) 1. 已知 $a < 0$ ，若 $x^2 + ax + 5$ 可以因式分解，則 a 的值为多少？

- (A) -2 (B) -3 (C) -5 (D) -6

$$\begin{array}{l} 1. \quad \begin{array}{l} x \quad \quad \quad -5 \\ x \quad \quad \quad -1 \end{array} \\ \hline -5x - 1x = -6x, a = -6 \end{array}$$

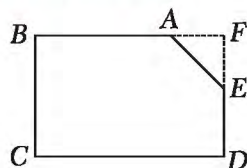
(B) 2. 十字交乘法解 $x^2 + 3x + 2$ 可得 $(ax + b)(cx + 1)$ ，則 $a - b + c = ?$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

$$\begin{array}{l} 2. \quad x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1), \\ a - b + c = 1 - 2 + 1 = 0 \end{array}$$

(C) 3. 如右圖，五邊形 $ABCDE$ 面積為 $-x^2 + 5x - 14$ ，若 $\overline{AF} = \overline{EF} = 2x$ ，求長方形 $FBCD$ 的長、寬各為多少？

- (A) 長 $(x-2)$ 、寬 $(x-7)$
 (B) 長 $(x+2)$ 、寬 $(x-7)$
 (C) 長 $(x+7)$ 、寬 $(x-2)$
 (D) 長 $(x-7)$ 、寬 $(x+2)$



$$\begin{array}{l} 3. \text{長方形面積} = -x^2 + 5x - 14 + \left(\frac{1}{2}\right)(2x)(2x) \\ = x^2 + 5x - 14 = (x+7)(x-2) \end{array}$$

(A) 4. 下列何者不是 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 7$ 的因式？

- (A) $(x-4)$ (B) $\frac{(x-7)}{4}$ (C) $\frac{(x+4)}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{l} 4. \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 7 = \frac{1}{4}(x^2 - 3x - 28) \\ = \frac{1}{4}(x-7)(x+4) \end{array}$$

(D) 5. 請以十字交乘法因式分解 $x^2 + (x+1)(x+2) - 7 = ?$

- (A) $(x+1)(2x-5)$ (B) $(x-1)(2x-5)$
 (C) $(x+1)(2x+5)$ (D) $(x-1)(2x+5)$

$$\begin{array}{l} 5. \text{原式} = x^2 + x^2 + 3x + 2 - 7 = 2x^2 + 3x - 5 \\ = (2x+5)(x-1) \end{array}$$



生活應用題※，本書特有題◎，難題#



(B) 1. 下列四個式子中，(甲) $a+b+c$ ，(乙) $a-b+c$ ，(丙) $a+b-c$ ，(丁) $a-b-c$ ，其中哪二個是 $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ 的因式呢？

- (A) 甲和乙 (B) 乙和丙
 (C) 丙和丁 (D) 丁和甲

$$\begin{array}{l} 1. \text{原式} = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ = a^2 - (b-c)^2 \\ = (a-b+c)(a+b-c) \end{array}$$

(C) 2. 若 $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = (x+2)(x-2)(2x+3)$, 請問: 其所有的因式 (不含常數因式) 有多少個呢?

- (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

2. $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$ 的因式有:
 $(x+2)$ 、 $(x-2)$ 、 $(2x+3)$ 、 $(x+2)(x-2)$ 、
 $(x+2)(2x+3)$ 、 $(x-2)(2x+3)$ 、 $(x+2)(x-2)(2x+3)$
 共 7 個

(C) 3. 若 $2x - 3$ 是 $4x^2 + 2x + m$ 的因式, 請問: m 值為何呢?

- (A) -6
 (B) 6
 (C) -12
 (D) 12

3.

$$\begin{array}{r} 2x-3 \overline{) 4x^2+2x+m} \\ \underline{4x^2-6x} \\ 8x+m \\ \underline{8x-12} \\ m+12 \end{array}$$

$\Rightarrow \because 2x-3$ 是 $4x^2+2x+m$ 的因式
 $\therefore 2x-3$ 能整除 $4x^2+2x+m$
 $\Rightarrow m+12=0, m=-12$

(D) 4. 下列分別是甲、乙、丙、丁, 利用十字交乘法分解 $21x^2 - 41x - 40$ 的過程, 誰的作法正確?

4. 如題, 丁是正確的

- (甲) $\begin{array}{cc} 3x & -5 \\ 7x & +8 \end{array}$ (乙) $\begin{array}{cc} 3x & -8 \\ -7x & -5 \end{array}$ (丙) $\begin{array}{cc} -3x & +8 \\ 7x & -5 \end{array}$ (丁) $\begin{array}{cc} 3x & -8 \\ 7x & +5 \end{array}$
 (A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁

(A) 5. 下列各多項式, 何者為 $xy - 8 + 4x - 2y$ 的因式呢?

- (A) $x-2$ (B) $x+2$ (C) $x+4$ (D) $y-4$

5. 原式 $= (xy - 2y) + (4x - 8)$
 $= y(x-2) + 4(x-2)$
 $= (x-2)(y+4)$

(C) 6. 因式分解 $x^2 + 2(b-a)x + (a-b)^2$ 為下列何者?

- (A) $(x+a-b)^2$ (B) $(x+a-b)(x-a+b)$
 (C) $(x-a+b)^2$ (D) $(x+a+b)(x+a-b)$

6. 原式 $= x^2 - 2x(a-b) + (a-b)^2$
 $= (x-a+b)^2$

(D) 7. 試計算 $2 \times 399^2 - 5 \times 399 - 7$ 的結果為下列哪一數?

- (A) 323300 (B) 322000
 (C) 317400 (D) 316400

7. 原式 $= (2 \times 399 - 7)(399 + 1)$
 $= 791 \times 400 = 316400$

(A) 8. 下列各多項式, 何者不是 $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 的因式呢?

- (A) $x-1$ (B) $x+1$
 (C) $x-2$ (D) $x+2$

8. $x^3 + x^2 - 4x - 4$
 $= x^2(x+1) - 4(x+1)$
 $= (x+1)(x^2 - 4)$
 $= (x+1)(x-2)(x+2)$

(B) 9. 若 $39x^2 + ax + 8$ 可分解為 $(13x+b)(3x-2)$, 則下列何者正確?

- (A) $a = -14, b = 4$ (B) $a = -38, b = -4$
 (C) $a = 14, b = -4$ (D) $a = 38, b = -4$

9. $(13x+b)(3x-2) = 39x^2 + (3b-26)x - 2b$
 $\Rightarrow \begin{cases} 3b-26=a \\ -2b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4 \\ a=-38 \end{cases}$

(D) 10. 試求 $111 \times 3\frac{4}{7} + 37 \times 989\frac{2}{7}$ 之值為何?

- (A) 21000 (B) 27000
 (C) 31000 (D) 37000

10. 原式 $= 37(3 \times \frac{25}{7} + 989\frac{2}{7}) = 37 \times \frac{75+6925}{7}$
 $= 37 \times 1000 = 37000$

(D) 11. 下列何者是 $-9x^2$ 的因式?

- (A) $-3x^3$ (B) $-4x^2 + 4$
 (C) $2x - 3$ (D) $-13x$

11. $\frac{(-9x^2)}{-13x} = \frac{9}{13}x$, 餘式為 0,
 故可以整除, 所以 $-13x$ 是 $-9x^2$ 的因式

解題小方

第 6 題: 請注意: $2(b-a)x = -2(a-b)x$ 。

第 7 題: 可將 399 設為 a , 再因式分解之。

(C) 12. $ax - bx - ay + by - az + bz$ 為 $(x - y - z)$ 與下列何式的乘積?

- (A) $a + b$ (B) $b - a$
(C) $a - b$ (D) $-(a + b)$

$$12. (x - y - z) \times (a - b) = ax - bx - ay + by - az + bz$$

(D) 13. 設 $0 < a < 1$, 則點 $(a^2 + a, a^2 - a)$ 在坐標平面上的第幾象限?

- (A) 一 (B) 二
(C) 三 (D) 四

$$13. \because 0 < a < 1 \therefore a + 1 > 0, a - 1 < 0$$

$$\begin{cases} a^2 + a = a(a + 1) > 0 \\ a^2 - a = a(a - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{第四象限}$$

(A) 14. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a^2 - 3a = b^2 + 3b$, 則 $a - b = ?$

- (A) 3 (B) 6
(C) 9 (D) 12

$$14. a^2 - b^2 = 3a + 3b, a - b = 3$$

(B) 15. 承上題, 則 $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b - 1$ 的值為何?

- (A) -2 (B) 2
(C) 4 (D) 6

$$15. \text{原式} = (a - b)^2 - 2(a - b) - 1 = 3^2 - 2(3) - 1 = 9 - 6 - 1 = 2$$

歷屆基測題

(B) 1. 有兩多項式 $A = x^2(2x - 3)(5x + 6)$, $B = (5x + 6)^2(4x^2 - 9)$ 。關於 A, B 兩多項式, 下列敘述何者正確?

- (A) $x(5x + 6)$ 為 A, B 的公因式
(B) $(2x - 3)(5x + 6)$ 為 A, B 的公因式
(C) $x(2x - 3)(5x + 6)$ 為 A, B 的公倍式
(D) $(2x - 3)^2(5x + 6)^2$ 為 A, B 的公倍式

97 基測二

$$1. A = x^2(2x - 3)(5x + 6)$$

$$B = (5x + 6)^2(2x - 3)(2x + 3)$$

$$A, B \text{ 公因式: } (2x - 3)(5x + 6)$$

$$A, B \text{ 公倍式: } x^2(5x + 6)(4x^2 - 9)$$

(C) 2. 有兩個多項式 $M = 2x^2 + 3x + 1$, $N = 4x^2 - 4x - 3$, 則下列哪一個為 M 與 N 的公因式?

- (A) $x + 1$ (B) $x - 1$
(C) $2x + 1$ (D) $2x - 1$

97 基測一

$$2. \begin{cases} M = (2x + 1)(x + 1) \\ N = (2x + 1)(2x - 3) \end{cases} \Rightarrow M, N \text{ 公因式為 } (2x + 1)$$

基測題

(D) 1. $x^4 + 4$ 的因式之一為何者?

- (A) $x^2 - 4$ (B) $x^2 + 2$
(C) $x + 1$ (D) $x^2 - 2x + 2$

$$1. x^4 + 4 = (x^4 + 2 \cdot 2x^2 + 2^2) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

(C) 2. 假設 $\frac{5x - 11}{2x^2 + x - 6}$ 是由 $\frac{A}{x + 2}$ 與 $\frac{B}{2x - 3}$ 相加而得, 則 $A + B = ?$

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

$$2. \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 3} = \frac{A(2x - 3) + B(x + 2)}{(2x - 3)(x + 2)} = \frac{(2A + B)x + (-3A + 2B)}{2x^2 + x - 6}$$

$$\begin{cases} 2A + B = 5 \\ 2B - 3A = -11 \end{cases} \Rightarrow A = 3, B = -1 \Rightarrow A + B = 2$$

(D) 3. 假設 x, y 是相異正整數, 且 $9x^2 - y^2 = 17$, 則下列何者成立呢?

- (A) $x - y = 5$ (B) $x + y = 10$
(C) $2x - y = 2$ (D) $2x + y = 14$

$$3. 9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y) = 17$$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + y = 17 \end{cases}, x = 3, y = 8$$

(A) 4. 小華因式分解一個 y 的四次多項式，不小心將常數項的正負號看錯，得到結果是 $(y^2 + 2)(y^2 + 3)$ ，如果小華在演算過程中沒有其他的錯誤，請問：該多項式因式分解後的正確答案為何呢？

(A) $(y - 1)(y + 1)(y^2 + 6)$

(B) $(y + 1)(y - 1)(y^2 + 2)$

(C) $(y - 1)(y + 1)(y^2 - 6)$

(D) $(y - 1)^2(y^2 + 6)$

4. $\because (y^2 + 2)(y^2 + 3) = y^4 + 5y^2 + 6 \therefore$ 正確應為 $y^4 + 5y^2 - 6$
 $\Rightarrow y^4 + 5y^2 - 6 = (y^2 + 6)(y^2 - 1) = (y^2 + 6)(y - 1)(y + 1)$

(D) 5. 若 $x^3 + px - q$ 為 $x + 1$ 與 $x + 2$ 的倍式，求 $p^2 - q^2$ 之值為何呢？

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

5. $x = -1, -2$ 分別代入： $(-1)^3 + p \times (-1) - q = 0, p + q = -1$;

$(-2)^3 + p(-2) - q = 0, 2p + q = -8$

$\begin{cases} p + q = -1 \\ 2p + q = -8 \end{cases} \Rightarrow p = -7, q = 6, \therefore p^2 - q^2 = (-7)^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$

(D) 6. 若 $x^2 - (m - 1)x + \frac{1}{4}$ 可以化成 $(x + \square)^2$ ，則 m 值為何呢？

(A) 1 或 0 (B) -1 或 1

(C) -2 或 0 (D) 2 或 0

6. $x^2 - (m - 1)x + \frac{1}{4} = x^2 \pm 2 \times x \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$

$\therefore m - 1 = \pm 1, m = 2$ 或 0

(A) 7. 因式分解 $1 - 4x^2 - 9y^2 + 36x^2y^2$ 的結果為下列何者呢？

(A) $(1 - 2x)(1 + 2x)(1 - 3y)(1 + 3y)$

(B) $(1 - 2y)^2(1 - 3y)^2$

(C) $(2x - 1)^2(3y - 1)^2$

(D) $(2x - 1)(1 + 2x)(1 - 3y)(1 + 3y)$

7. 原式 $= (1 - 4x^2) - 9y^2(1 - 4x^2) = (1 - 4x^2)(1 - 9y^2)$
 $= (1 - 2x)(1 + 2x)(1 - 3y)(1 + 3y)$

(A) 8. 下列何者為 $7^8 - 4^8$ 的質因數？

(A) 11 (B) 15

(C) 17 (D) 19

8. $7^8 - 4^8 = (7^4 - 4^4)(7^4 + 4^4)$

$= (7^2 - 4^2)(7^2 + 4^2)(7^4 + 4^4)$

$= (7 - 4)(7 + 4)(49 + 16)(2401 + 256)$

$= 3 \times 11 \times 65 \times 2657$

$= 3 \times 5 \times 11 \times 13 \times 2657$

(D) 9. 若 $x - y + 1 = 0$ ，則 $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3$ 之值為何？

(A) 0 (B) 4

(C) 6 (D) 8

9. $x - y + 1 = 0, x - y = -1$

$x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = (x - y)^2 - 4(x - y) + 3 = 8$

(D) 10. 已知 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, x > 0, y > 0$ ，則 $\frac{x + y}{x - y} = ?$

(A) -1 (B) 0

(C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

10. $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow (x - 3y)(x + y) = 0$

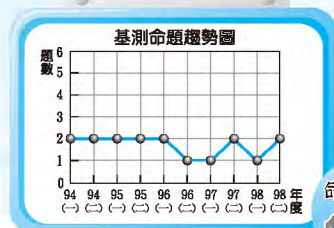
$\because x > 0, y > 0 \therefore x + y > 0, x - 3y = 0$

$x = 3y$ ，則 $\frac{x + y}{x - y} = \frac{3y + y}{3y - y} = \frac{4y}{2y} = 2$

解題小秘方 第8題：重複使用， $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 。

第9題： $x - y + 1 = 0$ 等同於 $x - y = -1$ 。

第10題：若 $x > 0, y > 0$ ，且 $(x - y)(x + y) = 0$ ，則 $x + y > 0, x - y = 0$ 。



命題率
100%

能力 — 一元二次方程式的解法

一 一元二次方程式的意義

- 一元二次方程式**：一個方程式中只含有一個未知數 x ，此未知數的最高次數為二次，稱此方程式為一元二次方程式。
- 解(根)**：使得方程式等號成立的數稱之為方程式的解或根。
- 一元二次方程式的解，就是所對應的二次多項式的根。所以，我們也稱此類方程式的解為根。

二 一元二次方程式的解法

- 因式分解法**：運用提出公因式法、平方差公式、完全平方公式及十字交乘法來解題。
- 配方法**：配方法常用於不能用十字交乘法或無法求解的一元二次方程式，有時候遇到常數項較大時，使用配方法會比因式分解法容易。

(1) 平方根解一元二次方程式的三種形式

類 型	$x^2 = k$	$(x + h)^2 = k$	$(ax + p)^2 = q$
解	$x = \pm \sqrt{k}$	$x = -h \pm \sqrt{k}$	$x = \frac{-p \pm \sqrt{q}}{a}$

(2) 配方法的求解步驟

① 一元二次方程式的標準式的「配方」步驟如下：

a. 方程式(標準式)	$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
b. 兩邊同除以 a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
c. 常數項移到右邊	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
d. 在左右二式同加 $(\frac{b}{2a})^2$	$x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$
e. 左式可化為完全平方式	$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

② 這個結果與前面 $(x - h)^2 = k$ 的形式相同，因為 $(x + \frac{b}{2a})^2$ 恆為正數或 0。

當 $b^2 - 4ac \geq 0$ 時，右式才成立。	$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
-------------------------------	---

3. 公式解

將一元二次標準式配方之後，會得到一個公式，透過此公式即可求解。

$$\text{公式解} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

其中「 $D = b^2 - 4ac$ 」稱為**判別式**，係用於判斷兩根的形式：

判別式的性質	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$	$D \geq 0$
解(根)的情況	兩相異實根	兩根相等 (重根)	沒有實數解 (無解)	有實數解 (有解)

三 一元二次方程式的「根」與「係數」關係

設 α 、 β 為方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根，則 $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 。

若 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

$$\Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta, \text{ 經由比較係數,}$$

$$\Rightarrow \text{兩根之和 } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ 及兩根之積 } \alpha\beta = \frac{c}{a}。$$

老師 傳授

因式分解法一解一元二次方程式

學生 實作

利用因式分解法，求一元二次方程式的根：

(1) $4x = 3x^2$

(2) $x^2 - 9 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(4) $6x^2 - 13x + 5 = 0$

解

(1) 原式 $\Rightarrow 3x^2 - 4x = 0, x(3x - 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ 或 } \frac{4}{3}$

(2) 原式 $\Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$

$\Rightarrow x = 3 \text{ 或 } -3$

(3) 原式 $\Rightarrow (x - 3)^2 = 0, x = 3$ (重根)

(4) 原式 $\Rightarrow (2x - 1)(3x - 5) = 0,$

$2x - 1 = 0 \text{ 或 } 3x - 5 = 0, x = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{5}{3}$

利用因式分解法，求一元二次方程式的根：

(1) $(x + 8)(x - 9) = (8 - x)(9 + x) + 56$

(2) $12x^2 - 23x = 24$

(3) $3(x - 2)^2 - 3 = 0$

(4) $(1 - x)^2 + 3(x - 1)(x - 3) = 0$

解

(1) 原式

$\Rightarrow x^2 - 9x + 8x - 72 = 72 + 8x - 9x - x^2 + 56$

$\Rightarrow 2x^2 - 200 = 0, x^2 = 100, x = 10 \text{ 或 } -10$

(2) 原式 $\Rightarrow (3x - 8)(4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ 或 } -\frac{3}{4}$

(3) 原式 $\Rightarrow 3(x - 2)^2 = 3, (x - 2)^2 = 1$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 1, x = 3 \text{ 或 } 1$

(4) 原式 $\Rightarrow (x - 1)^2 + 3(x - 1)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)[(x - 1) + 3(x - 3)] = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 1 + 3x - 9) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(4x - 10) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } \frac{5}{2}$

解題小

備方 學生 1 - (4) : $(1 - x)^2 = (x - 1)^2$, 任何數的平方皆為正。

2 老師傳授

配方法—解一元二次方程式

學生習作 2

請用配方法，求一元二次方程式的根：

(1) $x^2 - 40x + 204 = 0$

(2) $3x^2 - 6x + 1 = 0$

(3) $x^2 + 6x = 4891$

解

(1) 原式 $\Rightarrow x^2 - 40x = -204$

$\Rightarrow x^2 - 40x + 20^2 = -204 + 20^2$

$\Rightarrow (x - 20)^2 = 196 \Rightarrow x - 20 = \pm 14$

$\Rightarrow x = 34$ 或 6

(2) 原式 $\Rightarrow x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1^2 = -\frac{1}{3} + 1^2 \Rightarrow (x - 1)^2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x - 1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

(3) 原式 $\Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 4891 + 3^2$

$\Rightarrow (x + 3)^2 = 4900 \Rightarrow x + 3 = \pm 70$

$\Rightarrow x = -3 \pm 70 \Rightarrow x = 67$ 或 -73

1. 請用配方法將 $2x^2 - 6x - 1 = 0$ 配方成 $(x + p)^2 = q$ 的型式，並求 $p + 2q$ 的值為何？

2. 若 $x^2 + bx + 3 = 0$ 可推得 $(x - 3)^2 = k$ ，試求 $b + k$ 的值為何呢？

解

1. $2x^2 - 6x - 1 = 0, x^2 - 3x = \frac{1}{2},$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow p = -\frac{3}{2}, q = \frac{11}{4} \Rightarrow p + 2q = 4$

2. $(x - 3)^2 = k \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = k$

$\Rightarrow x^2 - 6x + (9 - k) = 0$

$\Rightarrow b = -6, 9 - k = 3, k = 6 \Rightarrow b + k = 0$

3 老師傳授

公式解法—解一元二次方程式

學生習作 3

1. 試求下列方程式的解：

(1) $2(x - 1)(x - 3) = 5x$

(2) $3x^2 - 3x + 1 = 0$

2. 設方程式 $x^2 + (k + 2)x + 2k + 1 = 0$ 的兩根相等，求 $k = ?$

解

1. (1) $2(x - 1)(x - 3) = 5x \Rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0$

$D = (-13)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121 > 0$

 \Rightarrow 方程式有兩實數解

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{121}}{4}$

$= \frac{13 \pm 11}{4} \Rightarrow x = 6$ 或 $\frac{1}{2}$

(2) $D = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 = -3 < 0$

 \Rightarrow 方程式無實數解

2. \therefore 兩根相等 $\Rightarrow D = 0$

$(k + 2)^2 - 4 \times 1 \times (2k + 1) = 0$

$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 8k - 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k = 0$

$\Rightarrow k(k - 4) = 0 \Rightarrow k = 0$ 或 4

1. 試求下列方程式的解：

(1) $x^2 - 3x = 3$

(2) $2x^2 + 9x + 15 = 0$

2. 設方程式 $ax^2 + ax + 2 = 0$ 的兩根相等，試求 $a = ?$

解

1. (1) $x^2 - 3x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0,$

$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 21 > 0$

 \Rightarrow 方程式有兩實數解

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{21}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

(2) $D = 9^2 - 4 \times 2 \times 15 = 81 - 120 = -39 < 0$

 \Rightarrow 方程式無實數解

2. \therefore 兩根相等 $\Rightarrow D = 0$

$D = a^2 - 4 \times a \times 2 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a(a - 8) = 0$

$\Rightarrow a = 0$ 或 8 (但 0 不合)

$\Rightarrow a = 8$

解題小備方 老師 3-2: 兩根相等，判別式 $D = 0$ 。

4

老師

傳授

根與係數的關係

學生

習作

4

設 α 、 β 為 $x^2 + 4x - 9 = 0$ 的兩根，試求下列各式的值為何呢？

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $(\alpha - 3)(\beta - 3)$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

解

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -9$$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-9) \times (-4) = \underline{36}$

(2) $(\alpha - 3)(\beta - 3) = \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9$
 $= (-9) - 3(-4) + 9 = \underline{12}$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
 $= \frac{(-4)^2 - 2 \times (-9)}{-9} = \frac{16 + 18}{-9} = \underline{-\frac{34}{9}}$

設 α 、 β 為 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 的兩根，試求下列各式的值為何呢？

(1) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(2) $(\alpha - \beta)^2$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$

解

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 3$$

(1) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \underline{-\frac{5}{3}}$

(2) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$
 $= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
 $= (-5)^2 - 4 \times 3 = \underline{13}$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$
 $= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 3 - (-5) + 1 = \underline{9}$



同步

評量

1

(C) 1. 請問：-3 是下列哪一個方程式的根？

(A) $x^2 - 3x = 0$ (B) $3x^2 = 0$ (C) $x^2 + 3x = 0$ (D) $x^2 + 3 = 0$

(A) 2. 若 $x^2 + 8x = 0$ ，則 $x = ?$

(A) -8 或 0 (B) 8 或 0 (C) 4 或 0 (D) -4 或 0

(D) 3. 下列哪一個方程式的解為相異實根？

(A) $x^2 + 4 = 0$ (B) $x^2 + 6x + 9 = 0$
(C) $x^2 - x + 1 = 0$ (D) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

(A) 4. 設 a 為實數，若方程式 $4x^2 - 12x + (a - 3) = 0$ 的兩根相等，則方程式 $ax^2 - 13x + 3 = 0$ 的兩根為何？

(A) $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ 或 1
(C) $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$ 或 1

(A) 5. 若有一數 a 介於 $(5x - 2)(x + 2) = 0$ 的兩根之間，則 a 不可能是下列哪一個數？

(A) 1 (B) -1
(C) $-\frac{3}{2}$ (D) 0

(B) 6. 設 α 、 β 為方程式 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的兩根，試求 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = ?$

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

1. (A) $x^2 - 3x = 0, x(x - 3) = 0 \therefore x = 0$ 或 3

(B) $3x^2 = 0 \therefore x = 0$ (重根)

(C) $x^2 + 3x = 0, x(x + 3) = 0 \therefore x = 0$ 或 -3

(D) $x^2 + 3 = 0$ 無法求得 x 值

2. $x^2 + 8x = 0, x(x + 8) = 0 \therefore x = 0$ 或 -8

3. 相異實根方程式之判別式 $D > 0$

(A) $D = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0$

(B) $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

(C) $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

(D) $D = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 - 4 = 4 > 0$

4. $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4(a - 3) = 0,$
 $144 - 16a + 48 = 0, a = 12,$ 則 $12x^2 - 13x + 3 = 0,$
 $(4x - 3)(3x - 1) = 0, \therefore x = \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$

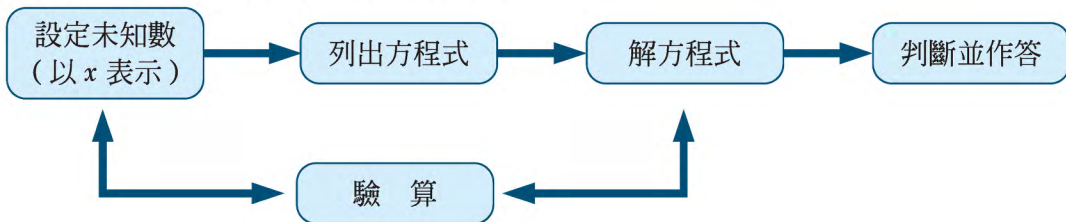
5. $\therefore (5x - 2)(x + 2) = 0 \therefore 5x - 2 = 0$ 或 $x + 2 = 0,$
得 $x = \frac{2}{5}$ 或 -2 $\therefore a$ 介於 -2 與 $\frac{2}{5}$ 之間，不可能為 1

6. $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \alpha\beta = -\frac{3}{2},$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

能力二 一元二次方程式的應用

一元二次方程式應用問題的解題步驟：



5 老師傳授

一元二次方程式的應用問題 I

學生寫作 5

2 年 18 班的布告欄長為 400 公分，寬為 300 公分，今天學藝股長要在其四周黏上一條等寬的紙條當做框，如此會增加布告欄面積的 12%，請問：此紙條的寬為多少公分呢？



生活題

解

$$\begin{aligned}
 & \text{設紙條的寬為 } x \text{ 公分} \\
 & \text{則 } (2x + 400)(2x + 300) - 400 \times 300 \\
 & \quad = 400 \times 300 \times 12\% \\
 & \Rightarrow 4x^2 + 600x + 800x + 120000 - 120000 \\
 & \quad = 14400 \\
 & \Rightarrow 4x^2 + 1400x - 14400 = 0, \\
 & \quad x^2 + 350x - 3600 = 0 \\
 & \Rightarrow (x - 10)(x + 360) = 0 \\
 & \Rightarrow x = -360 \text{ (不合) 或 } x = 10 \\
 & \text{故紙條的寬為 } \underline{10} \text{ 公分}
 \end{aligned}$$

裁縫師傅將一塊正方形布料的一邊裁去 3 公分，另一邊裁去原來的一半後，所形成的長方形布料較原正方形的面積少了 44 平方公分，試問原正方形布料的邊長為多少公分？

生活題

解

$$\begin{aligned}
 & \text{設正方形布料邊長為 } x \text{ 公分} \\
 & \text{則 } x^2 - \frac{1}{2}x(x - 3) = 44 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = 44 \\
 & \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = 44 \Rightarrow x^2 + 3x = 88 \\
 & \Rightarrow x^2 + 3x - 88 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 11) = 0 \\
 & \Rightarrow x = 8 \text{ 或 } -11 \text{ (不合)} \\
 & \text{故原邊長為 } \underline{8} \text{ 公分}
 \end{aligned}$$

6 老師傳授

一元二次方程式的應用問題 II

學生寫作 6

有三個連續正偶數，前面兩數的積加上後面兩數的積等於 392，試問此三數為何呢？

解

$$\begin{aligned}
 & \text{假設此三數為 } x - 2, x, x + 2 \\
 & \text{則 } [(x - 2) \cdot x] + [x \cdot (x + 2)] = 392 \\
 & \Rightarrow 2x^2 = 392 \Rightarrow x^2 = 196 \Rightarrow x = \pm 14 \text{ (負不合)} \\
 & \text{此三數為 } \underline{12, 14, 16}
 \end{aligned}$$

若兩數之和為 17，它們的積比它們的平方和小 199，則此兩數應為何？

解

$$\begin{aligned}
 & \text{設兩數為 } x, 17 - x \\
 & x(17 - x) - [x^2 + (17 - x)^2] = -199 \\
 & \Rightarrow 17x - x^2 - x^2 - 289 + 34x - x^2 = -199 \\
 & \Rightarrow -3x^2 + 51x - 90 = 0 \Rightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \\
 & \Rightarrow (x - 2)(x - 15) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } 15 \\
 & \text{所以此兩數為 } \underline{2} \text{ 或 } \underline{15}
 \end{aligned}$$

7

老師傳授

一元二次方程式的應用問題 III

學生

當作

7

在 $x = 7$ 的直線上有一點 A，已知 A 點到原點的距離與 A 點到 $(5, 0)$ 的距離之比值為 $\frac{5}{4}$ ，求 A 點的坐標？

解

令 $A(7, y)$

$$\text{則 } \frac{\sqrt{(7-0)^2 + (y-0)^2}}{\sqrt{(7-5)^2 + (y-0)^2}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{49 + y^2} = 5\sqrt{4 + y^2}$$

$$\Rightarrow 784 + 16y^2 = 100 + 25y^2$$

$$\Rightarrow 684 = 9y^2 \Rightarrow y^2 = 76 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{19}$$

$$\Rightarrow \underline{A \text{ 點坐標為 } (7, 2\sqrt{19}) \text{ 或 } (7, -2\sqrt{19})}$$

求在直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上與原點距離為 5 的所有點之坐標？

解

$y = \frac{1}{2}x$ 上的點坐標皆可設為 $(a, \frac{1}{2}a)$

$$\text{則 } \sqrt{a^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = 5 \Rightarrow a^2 + \frac{a^2}{4} = 25$$

$$\Rightarrow 4a^2 + a^2 = 100 \Rightarrow 5a^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{100}{5} = 20 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{5}$$

所以距離 5 的坐標有

$$\underline{(2\sqrt{5}, \sqrt{5})、(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})}$$

解題小偏方 坐標上 $A(Ax, Ay)$ 、 $B(Bx, By)$ ，兩點的直線距離公式： $\overline{AB} = \sqrt{(Ax - Bx)^2 + (Ay - By)^2}$ 。



同步評量

2

(C) 1. 有一正方形，若將其一邊長減少 3 公分，另一邊長變為原邊長的 2 倍，則所得新長方形的面積比原正方形的面積多 7 平方公分，則原正方形的邊長為多少公分？

(A) 5 (B) 6

(C) 7 (D) 9

1. 設原正方形的邊長為 x 公分，

$$\text{則 } (x-3) \cdot 2x = x^2 + 7, 2x^2 - 6x = x^2 + 7,$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0, (x-7)(x+1) = 0, \therefore x = 7 \text{ 或 } -1 (-1 \text{ 不合})$$

(A) 2. 史老師出生於民國 63 年，在出生日的 $3x$ 年前，正好是民國 $(x-3)^2$ 年，請問：是民國幾年？

(A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39

2. 依題意得 $63 - 3x = (x-3)^2, x^2 - 3x - 54 = 0,$

$$(x-9)(x+6) = 0 \therefore x = 9 \text{ 或 } -6 (-6 \text{ 不合}),$$

$$(9-3)^2 = 6^2 = 36, \text{ 民國 } 36 \text{ 年}$$

(B) 3. 有一三角形，其底與對應高的比是 4 : 5，若面積為 90 平方公分，則此三角形的底和高相差多少公分？

(A) 4 (B) 3

(C) 2 (D) 1

3. 設底長為 $4x$ 公分，高為 $5x$ 公分，則 $\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 5x = 90, 10x^2 = 90, x^2 = 9$

$$\therefore x = \pm 3 (-3 \text{ 不合}), \text{ 底長 } 12 \text{ 公分，高為 } 15 \text{ 公分}$$

$$\therefore \text{底和高相差 } 3 \text{ 公分}$$

(D) 4. 設一直角三角形有一股長為 24 公分，斜邊長比另一股長 3 倍多 4 公分，則此三角形的面積為多少平方公分？

(A) 360 (B) 260

(C) 165 (D) 84

4. 設另一股長為 x 公分，則斜邊長為 $(3x+4)$ 公分

$$\Rightarrow (3x+4)^2 = x^2 + 24^2, 9x^2 + 24x + 16 = x^2 + 576,$$

$$8x^2 + 24x - 560 = 0, x^2 + 3x - 70 = 0,$$

$$(x-7)(x+10) = 0 \therefore x = 7 \text{ 或 } -10 (-10 \text{ 不合})$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84 (\text{平方公分})$$

(B) 5. 已知一線段 \overline{AB} 的長為 10 公分，今在 \overline{AB} 上取一點 P 且 $\overline{AP} < \overline{BP}$ ，分別以 \overline{AP} 、 \overline{BP} 為直徑各作一圓，如果這兩圓的面積和為 13π 平方公分，則 \overline{AP} 等於多少公分？

(A) 3 (B) 4

(C) 5 (D) 6

5. 設 $\overline{AP} = x$ ，則 $\overline{BP} = 10 - x$ ，且 $\overline{AP} < \overline{BP}$ ， $(\frac{x}{2})^2\pi + (\frac{10-x}{2})^2\pi = 13\pi$ ，

$$\frac{x^2}{4} + \frac{100 - 20x + x^2}{4} = 13, 2x^2 - 20x + 100 = 52, x^2 - 10x + 24 = 0,$$

$$(x-6)(x-4) = 0 \therefore x = 4 \text{ 或 } 6 (6 \text{ 不合})$$

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

- (A) 1. 已知 $x = -1$ 是一元二次方程式 $x^2 - (a+1)x + 2 = 0$ 的一根，求 a 之值？
 (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4 1. $(-1)^2 - (a+1)(-1) + 2 = 0, a = -4$
- (D) 2. 若方程式 $(x-2)(3x+1) = 0$ ，則 $3x+1$ 之值為何？
 (A) 7 (B) 2
 (C) 0 (D) 7 或 0 2. $(x-2)(3x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 $-\frac{1}{3}$, $\therefore 3x+1 = \begin{cases} 3 \times 2 + 1 = 7 \\ 3 \times (-\frac{1}{3}) + 1 = 0 \end{cases}$
- (B) 3. 若 x 的二次方程式 $x^2 + x - a = 0$ 解中的其中一根之倒數為 2，則 a 的值為何？
 (A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$ 3. $x = \frac{1}{2}$ 代入，則 $(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - a = 0, \therefore a = \frac{3}{4}$
- (D) 4. 利用配方法將 $2x^2 + x = \frac{1}{8}$ 化成 $(x+p)^2 = q$ 的形式，求 $8q + 4p = ?$
 (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2 4. $2(x^2 + \frac{1}{2}x) = \frac{1}{8}, 2(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4}$
 $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}, 8q + 4p = 2$
- (B) 5. 若 $2x^2 - 3x + 1$ 加上一數 a 後，成為完全平方式，則 $a = ?$
 (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$
 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ 5. $2x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x) + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) + 1 - \frac{9}{8}$
 $= 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$
 \therefore 須加上 $\frac{1}{8}$ ，才可成為完全平方式
- (D) 6. 若一元二次方程式 $x^2 - (k-1)x + 4 = 0$ 的兩根相等，求 $k = ?$
 (A) 5 (B) 3 (C) 3 或 5 (D) -3 或 5 6. $D = [-(k-1)]^2 - 16 = 0,$
 $(k-1)^2 = 16, k-1 = \pm 4, k = 5$ 或 -3
- (A) 7. 設 $ab \neq 0$ ，若 a, b 為一元二次方程式 $x^2 + 3ax + 2b = 0$ 的兩根，則 $a + b = ?$
 (A) -6 (B) 6 (C) -3 (D) 3 7. 利用根與係數 $a + b = -3a, ab = 2b \Rightarrow a = 2,$
 $\therefore a + b = -3 \times 2 = -6$
- (A) 8. 設 α, β 為 $6x^2 - 13x + 5 = 0$ 的兩根，求 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = ?$
 (A) $-\frac{1}{3}$ (B) -3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3 8. $\alpha + \beta = \frac{13}{6}, \alpha\beta = \frac{5}{6}$
 求值式 $= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \frac{5}{6} - \frac{13}{6} + 1 = -\frac{1}{3}$
- (C) 9. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根是 1 與 -1，求 $b + c$ 與 a 之比為何？
 (A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 9. 將 $x = 1$ 代入 $ax^2 + bx + c = 0, a + b + c = 0,$
 $b + c = -a \therefore \frac{b+c}{a} = -1$
- (A) 10. 若方程式 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 可配方成 $(x+a)^2 + b = 0$ ，則點 $(ab, a-b)$ 在坐標平面上的第幾象限？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四 10. $x^2 - 6x + 3 = (x+a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2a = -6 \\ a^2 + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow (ab, a-b) = (18, 3) \Rightarrow$ 在第一象限內
- (B) 11. 有一直角三角形的三邊長是連續偶數，求此三角形的三邊之和為多少？
 (A) 12 (B) 24
 (C) 36 (D) 48 11. 設三邊長為 $(x-2), x, (x+2) \Rightarrow x^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2$
 $\Rightarrow x^2 - 8x + 0 = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow x = 8$ 或 0 (不合)
 \Rightarrow 三邊長為 6、8、10，其三邊和為 24

解題小偏方 第5題： $ax^2 + bx + c$ 加上某數後，成為完全平方式，即是配方法。

(B) 12. 方程式 $3(x+1)^2 + 5(x+1)(x-4) + 2(x-4)^2 = 0$ 的二根之積為何？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$
(C) 3 (D) -4

12. 將 $(x+1)$ 視為 A , $(x-4)$ 視為 B , 則原式 $= 3A^2 + 5AB + 2B^2 = 0$
 $\Rightarrow (A+B)(3A+2B) = (x+1+x-4)(3x+3+2x-8) = 0$
 $(2x-3)(5x-5) = 0, x = \frac{3}{2}$ 或 $1 \Rightarrow$ 兩根積 $= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

(C) 13. 若 a 為方程式 $9x^2 - x + 7 = 0$ 的解, b 為方程式 $3x^2 + 2x - 2 = 0$ 的解, 則 $(9a^2 - a)(3b^2 + 2b)$ 的值為下列哪一選項？

- (A) -7 (B) 2 (C) -14 (D) 14

13. $x = a$ 代入: $9a^2 - a + 7 = 0, \therefore 9a^2 - a = -7$
 $x = b$ 代入: $3b^2 + 2b - 2 = 0, \therefore 3b^2 + 2b = 2$
 $\therefore (9a^2 - a)(3b^2 + 2b) = -7 \times 2 = -14$

(B) 14. 耀則、正揚兩人利用公式同解一個一元二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$, 耀則看錯常數項, 其餘均沒錯, 得兩根為 3、-4, 正揚看錯 x 項係數, 其餘均沒錯, 得兩根為 2、-1, 則原方程式兩根和為多少？

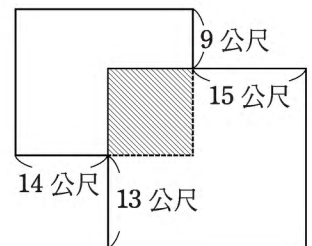
- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

14. 耀則: $(x-3)(x+4) = 0, x^2 + x - 12 = 0$
 正揚: $(x+1)(x-2) = 0, x^2 - x - 2 = 0$
 \therefore 正確方程式: $x^2 + x - 2 = 0 \therefore$ 兩根和為 -1

※(C) 15. 王老先生有一塊由兩個長方形重疊而成的農地, 且重疊部分(如右圖中斜線部分)為正方形, 已知農地總面積為 1003 平方公尺, 若將農地中陰影部分闢成水池, 則此水池的邊長為多少公尺？

- (A) 13 (B) 12
(C) 11 (D) 10

15. 設正方形邊長 x 公尺
 $(14+x)(9+x) + (13+x)(15+x) - x^2 = 1003,$
 $126 + 23x + x^2 + 195 + 28x + x^2 - x^2 = 1003,$
 $x^2 + 51x - 682 = 0, (x-11)(x+62) = 0,$
 $\therefore x = 11$ 或 -62 (-62 不合)



歷屆 基測題

(C) 1. 已知一元二次方程式 $x^2 + ax - 16 = 0$ 的兩根均為整數, $a > 0$ 且 a 為二位數, 求 a 的個位數字與十位數字相差為何？

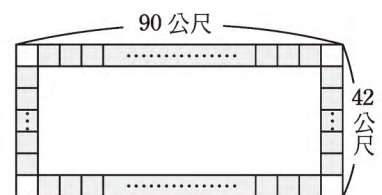
- (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 6

1. $-16 = -1 \times 16 = 1 \times (-16) = -2 \times 8 = 2 \times (-8),$ **98 基測二**
 $\therefore a > 0,$ 且 a 為二位數, $\therefore (x+16)(x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 15x - 16 = 0$
 \Rightarrow 所求 $= 5 - 1 = 4,$ 故選(C)

※(D) 2. 右圖的長方形為某園遊會場地(長為 90 公尺, 寬為 42 公尺), 其中每一個灰色小格為面積相等的正方形, 且各代表一個攤位。若圖中灰色區域(即攤位)的總面積為 720 平方公尺, 則此園遊會場地共有多少個攤位？

- (A) 40 (B) 45
(C) 72 (D) 80

2. 設每個正方形攤位的邊長為 x 公尺, 依題意得 $2 \times (90 - 2x) \times x + 2 \times (42 - 2x) \times x = 720,$
 $\Rightarrow 90x - 2x^2 + 42x - 2x^2 = 360 \Rightarrow 4x^2 - 132x + 360 = 0,$
 $\Rightarrow x^2 - 33x + 90 = 0 \Rightarrow (x-30)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$ 或 30 (30 不合),
 $(42-6) \div 3 \times 2 = 24, (90-6) \div 3 \times 2 = 56 \Rightarrow 24 + 56 = 80,$ 故選(D)



(A) 3. 若 a, b 為方程式 $x^2 - 4(x+1) = 1$ 的兩根, 且 $a > b$, 則 $\frac{a}{b} = ?$

- (A) -5 (B) -4 (C) 1 (D) 3

3. 原式 $\Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$
 $\Rightarrow x = 5$ 或 $-1,$ 又 $a > b \therefore a = 5, b = -1, \frac{a}{b} = -5$

(D) 4. 若 α, β 為方程式 $\frac{(x+3)(x-5)}{7} = \frac{x(x-2)}{8}$ 的兩根, 且 $\alpha > \beta$, 則 $\alpha + 2\beta = ?$

- (A) 5 (B) 10
(C) -6 (D) -8

4. $8(x^2 - 2x - 15) = 7(x^2 - 2x) \Rightarrow 8x^2 - 16x - 120 = 7x^2 - 14x$
 $\Rightarrow x^2 - 2x - 120 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 12$ 或 (-10)
 $\alpha = 12, \beta = -10 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 12 + (-20) = -8$

97 基測二

解題小偏方 第 12 題: 此方程式可將 $(x+1)$ 與 $(x-4)$ 用 A 與 B 替代, 整理完後再復原求解。

- (B) 5. 若 b 為正數且方程式 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根均為整數，則 b 可能為下列哪一數？
 (A) $2 \times 3 \times 5 \times 11$ (B) $2 \times 3 \times 7 \times 11$
 (C) $2 \times 5 \times 7 \times 11$ (D) $3 \times 5 \times 7 \times 11$

5. 若 s, t 為 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根，
 則 $s + t = 1, st = -b < 0$ ，
 可知兩根相加為 1
 由(B)可知 $2 \times 3 \times 7 \times 11 = (3 \times 7) \times (2 \times 11) = 21 \times 22$
 兩根為 22、-21

86 基測二



- (C) 1. 方程式 $3(x^2 + 1) = 2x^2 - 6x + 12$ 之兩根為 a, b ，則 $a^2 + b^2$ 的值為何呢？
 (A) 35 (B) 45 (C) 54 (D) 63
- (D) 2. 利用配方法，將 x 的一元二次方程式 $-2x^2 - 4x + 1 = 0$ 改寫成 $-2(x - h)^2 + k = 0$ 之型式，則 $h \times k = ?$
 (A) -1 (B) 0 (C) -2 (D) -3

1. $3(x^2 + 1) = 2x^2 - 6x + 12 \Rightarrow x^2 + 6x - 9 = 0$
 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (-6)^2 - 2 \times (-9)$
 $= 36 + 18 = 54$

2. $-2x^2 - 4x + 1 = 0, -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = 0,$
 $\Rightarrow -2(x + 1)^2 + 3 = 0 \therefore h \times k = -1 \times 3 = -3$

- (D) 3. 若 $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ，則 $(2x + 1)^2 - 7$ 的值為何呢？
 (A) 5 (B) 3 (C) 0 (D) -2

3. $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow 2x + 1 = \sqrt{5}$ ，求值式 $= (\sqrt{5})^2 - 7 = -2$

- (D) 4. 一元二次多項式 $2x^2 - 5x + 2$ 需要再加上下列哪一個數之後，才會形成完全平方呢？
 (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$

4. 設再加上 k 能成為完全平方
 $D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (2 + k) = 0$
 $\Rightarrow 25 - 16 - 8k = 0 \Rightarrow 9 - 8k = 0, k = \frac{9}{8}$

- (B) 5. 若 $1 - \sqrt{2}$ 為 $x^2 - (a + 1)x - a = 0$ 的一根，則 $a = ?$
 (A) -1 (B) 1
 (C) $-1 - \sqrt{2}$ (D) $-1 + \sqrt{2}$

5. $x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (x - 1)^2 = 2$
 $\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ 與 $x^2 - (a + 1)x - a = 0$ 比較，
 $a + 1 = 2, a = 1$

- # (A) 6. 設 a, b, c 皆為實數，若 1 為 $x^2 + ax + 2 = 0$ 的一根，且 a, b 為 $x^2 + 5x + c = 0$ 的兩根，請問： $3a + 2b + c$ 的值為何呢？
 (A) -7 (B) -5 (C) 5 (D) 7

6. $\begin{cases} 1 + a + 2 = 0 \\ a \times b = c \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = -2, c = 6$
 $\Rightarrow 3a + 2b + c = -7$

- (D) 7. 下列哪一個一元二次方程式無解呢？
 (A) $2x^2 + 3x - 4 = 0$ (B) $x^2 - x - 1 = 0$
 (C) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (D) $3x^2 - 4x + 3 = 0$

7. $3x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Rightarrow D = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 16 - 36 = -20 < 0$
 \Rightarrow 無解

- (B) 8. 設 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 之三邊長， $(a + b)x^2 + 2cx + (a - b) = 0$ 有重根，則 $\triangle ABC$ 是何種三角形呢？
 (A) 正三角形 (B) 直角三角形 (C) 等腰三角形 (D) 鈍角三角形

8. $D = (2c)^2 - 4(a + b)(a - b) = 0, 4c^2 - 4a^2 + 4b^2 = 0,$
 即 $a^2 = b^2 + c^2 \therefore$ 為直角三角形

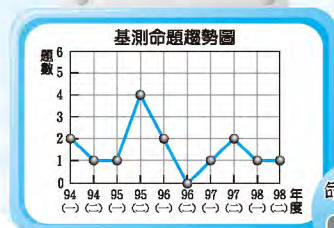
- # (D) 9. 設 α, β 是二次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的兩根，則以 $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ 為兩根的二次方程式為何呢？
 (A) $-3x^2 + 8x = 4$ (B) $-3x^2 - 8x - 4 = 0$
 (C) $3x^2 - 8x = -4$ (D) $3x^2 - 8x - 4 = 0$

9. 由根與係數： $a + b = -4, ab = -3$
 $\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(a + \beta)}{ab} = \frac{2 \times (-4)}{-3} = \frac{8}{3}$
 $\frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = \frac{4}{ab} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$
 \therefore 方程式為 $x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ ，即 $3x^2 - 8x - 4 = 0$



第 6 題： a, b 為某方程式的兩根，可設 $(x - a)(x - b) = 0$ ，則 $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ 再對照原方程式求解。

第 9 題：以 $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ 為兩根的二次方程式，可設 $(x - \frac{2}{\alpha})(x - \frac{2}{\beta}) = x^2 - (\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta})x + \frac{4}{\alpha\beta}$ 。



命題率
90%

能力 — 數的規律與數型關係

一 奇、偶數的規律

1. 偶數：在整數中能夠被 2 整除，或等於 $2n$ (n 為整數) 的數，偶數可形成無窮數列 2、4、6、8、10……。
2. 奇數：在整數中不能夠被 2 整除，亦即可被 2 除餘 1 的數，可寫成 $2n + 1$ 或 $2n - 1$ (n 為整數) 的形式，奇數可形成無窮數列 1、3、5、7、9……。

二 奇、偶數的和、積

1. 兩正整數之和為**偶數** \Rightarrow 此兩數必**同時**為奇數或偶數。
2. 兩正整數之和為**奇數** \Rightarrow 此兩數必為奇數和偶數之和。
3. 幾個正整數的乘積為**偶數** \Rightarrow 其中必有**偶數**。

奇 \pm 奇 \Rightarrow 偶	偶 \pm 偶 \Rightarrow 偶	奇 \pm 偶 \Rightarrow 奇
奇 \times 奇 \Rightarrow 奇	偶 \times 偶 \Rightarrow 偶	奇 \times 偶 \Rightarrow 偶

三 數型關係

在有規律排列的型體中，形體與排列的數量呈現規律的變化，此規律變化可使用通式來連結，以便做計算與歸納。

類型一	有 n 個三角形，需要 $2n + 1$ 根火柴棒 * $(1 + 2) + (1 + 2 \times 2) + (1 + 2 \times 3) + \dots + (1 + 2 \times n) = 2n + 1$	
類型二	有 n 層，需要 n^2 個小正方形 * $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$	
(三角數) 類型三	有 n 層，需要 $\frac{(1 + n) \times n}{2}$ 個黑點 * $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$	
(四角數) 類型四	有 n 層，需要 n^2 個黑點 * $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$	

老師 傳授

奇、偶數的規律

學生 習作

1. 今有 30 個學生，分成甲、乙兩組，將偶數個糖果分給甲組同學每人 3 個，乙組同學每人 4 個，全部分完，請問：甲、乙兩組人數分別是奇數還是偶數？
2. 設 n 為偶數，則下列何者不是奇數？
 (A) $2n + 1$ (B) $3n - 2$
 (C) $7n - 3$ (D) $4n + 3$

解

1. 因為班上總人數是偶數，所以一定是
 【奇數 + 奇數 = 偶數】或
 【偶數 + 偶數 = 偶數】
 $\Rightarrow \begin{cases} 3 \times \text{奇數} + 4 \times \text{奇數} = \text{奇數} + \text{偶數} = \text{奇數} (\text{不合}) \\ 3 \times \text{偶數} + 4 \times \text{偶數} = \text{偶數} + \text{偶數} = \text{偶數} \end{cases}$
 故甲、乙兩組人數皆為偶數
2. 偶數的整數倍亦為偶數，
 偶數 \pm 奇數 = 奇數
 偶數 + 偶數 = 偶數
 故只有(B)不是奇數

1. 試問下列四個敘述，何者正確？(甲) 奇數 + 偶數 = 奇數、(乙) 奇數 + 奇數 = 偶數、(丙) 偶數 + 奇數 = 偶數、(丁) 偶數 + 偶數 = 奇數。
2. 如果 m 代表一個正整數，則下列哪一個數一定可以代表一個正奇數？
 (A) $m + 1$ (B) $m + 2$
 (C) $2m - 1$ (D) $2m + 2$

解

1. 設 n 為整數且 $n \geq 0$ ，則 $2n$ 為偶數， $2n + 1$ 為奇數
 (甲) $(2n + 1) + 2n = 4n + 1$ (符合)
 (乙) $(2n + 1) + (2n + 1) = 4n + 2$ (符合)
 (丙) $2n + (2n + 1) = 4n + 1$ (不符合)
 (丁) $2n + 2n = 4n$ (不符合)
 \therefore (甲)(乙)正確
2. 由題意可知：

m	(A) $m + 1$	(B) $m + 2$	(C) $2m - 1$	(D) $2m + 2$
奇	偶	奇	奇	偶
偶	奇	偶	奇	偶

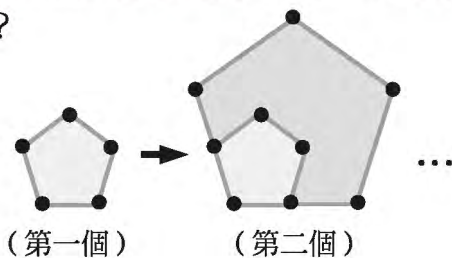
\therefore (C) 正確

老師 傳授

數型關係

學生 習作

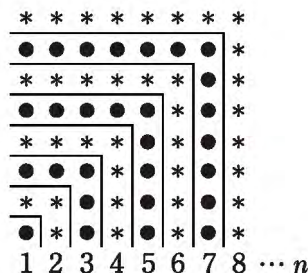
如圖，第一個五邊形中的「●」個數是 5 個，第二個五邊形中的「●」個數是 9 個，以此類推，請問：第八個五邊形中的「●」個數有多少個呢？



解

找出規律性：一個五邊形由 1 個點加上 4 個點構成，第二個五邊形再多加 4 個點構成，所以可以導出通式為： $(4n + 1)$ ， n 代表五邊形個數。
 第八個五邊形有 $\Rightarrow (4 \times 8) + 1 = 33$ 點

觀察下圖，當最後一階為 33 個時，哪一種符號 (● 或 *) 比較多？多幾個？



解

最後一階為 33 個時，其符號為 ●
 $(1 - 3) + (5 - 7) + (9 - 11) + \dots + (29 - 31) + 33$
 $= (-2) + (-2) + (-2) + \dots + (-2) + 33$
 $= (-2) \times 8 + 33 = 17 \therefore$ ● 比較多，多 17 個

解題小 偏方 學生 2：題目問 ● 比 * 多幾個？(或 * 比 ● 多幾個？)，請尋找 ● - * 或 * - ● 的規律。



- (C) 1. 若 a 為任意一個正整數，則下列哪一個型式必為奇數？
 (A) $2a$ (B) $2(a-1)$ (C) $2a+1$ (D) $3a$ 1. (C) $2a$ 為偶數， $2a+1 \Rightarrow$ 奇數
- (D) 2. 甲數為整數，則下列何者一定正確？
 (A) 「 $5 \times$ 甲數」為奇數 (B) 「 $2 \times$ 甲數 + 7」為偶數 2. (D) $2 \times$ 甲 \Rightarrow 偶數，
 $2 \times$ 甲 + 11 \Rightarrow 奇數
 (C) 「 $2 \times$ 甲數 + 8」為奇數 (D) 「 $2 \times$ 甲數 + 11」為奇數
- (B) 3. 已知甲數 + 乙數所得的和是偶數，而乙數 + 丙數所得的和是奇數，如果丙數是 6，則下列哪一個選項是正確的？
 3. 乙 + 6 為奇數 \Rightarrow 乙為奇數，甲 + 乙為偶數 \Rightarrow 甲為奇數
 (A) 甲數可能是 4 (B) 甲數可能是 7 (C) 乙數可能是 10 (D) 乙數可能是 8
- (C) 4. 華西街靠近西邊的房子門牌號碼為 1、3、5、7、9、... 的連續奇數號；靠近東邊的房子門牌號碼為 2、4、6、8、10、... 的連續偶數號，則下列何者正確？
 (A) 靠近東邊第 50 間房子為 102 號 4. 西邊 $(2n-1) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 60 - 1 = 119 \\ 2 \times 51 - 1 = 101 \end{cases}$
 (B) 靠近東邊第 61 間房子為 120 號 東邊 $(2n) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 50 = 100 \\ 2 \times 61 = 122 \end{cases}$
 (C) 靠近西邊第 60 間房子為 119 號
 (D) 靠近西邊第 51 間房子為 103 號
- (D) 5. 小麟老師將 120 位同學全部加以編號，並依右圖的排列方式分為 A、B、C、D、E 五組，則 117 號同學會編在哪一組呢？
 (A) A (B) B 5. $\because 1 \sim 10$ 為一循環，
 $\therefore 117 \div 10 = 11 \cdots 7 \Rightarrow D$ 組
 (C) C (D) D
- | A | B | C | D | E |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
- (A) 6. 若一等差數列的首項為 p ，公差為 (-4) ，則第 $(3p+1)$ 項為下列何者？
 (A) $-11p$ (B) $11p$ 6. $3p+1 = a_1 + (3p+1-1)d = p - 12p = -11p$
 (C) $-12p$ (D) $12p$

能力二 等差數列與級數

一 數列

依序排列的一串數稱為數列 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，其中第一個數稱為「首項 a_1 」，最後一個數稱為「末項 a_n 」，共有 n 項。

二 等差數列

在一個數列中，任何相鄰的兩項，當後項減前項所得的差都相同時，此數列稱為等差數列，這個差稱為等差數列的公差。

三 等差數列與級數的重要公式

設首項為 a_1 ，公差為 d ，第 n 項為 a_n ，前 n 項的總和為 S_n

1. 標準式： $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d$ 。

2. 第 n 項公式： $a_n = a_1 + (n-1)d = S_n - S_{n-1}$ 。

3. 前 n 項總和公式（等差級數的和）： $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$ 。

四 等差中項

1. 假設 a, b, c 成等差數列 $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ ， b 稱為 a, c 的等差中項。

2. 若在 a, b 之間，插入 m 個數，則 $b = a + (m+1)d$ 。

3

老師

傳授

等差數列

學生

習作

3

有一等差數列，其第 n 項是 $(-3n+20)$ ，請問：(1) 首項 = ? (2) 公差 = ? (3) 第 20 項 = ? (4) 第幾項開始為負數呢？

解

(1) 首項 $a_1 = -3 \times 1 + 20 = 17$

(2) 公差 $d = a_2 - a_1 = (-3 \times 2 + 20) - 17$
 $= 14 - 17 = -3$

(3) $a_{20} = -3 \times 20 + 20 = -40$

(4) $-3n + 20 < 0, -3n < -20, n > 6\frac{2}{3}$
取整數 $n = 7$

若 $a, 3, x, y, 15$ 成等差數列， $a, c, z, 20, b$ 也成等差數列，請問： $x + y + z - c = ?$

解

$\because a, 3, x, y, 15$ 為等差數列 $d_1 = \frac{15-3}{3} = 4$

$\therefore a = 3 - 4 = -1,$

$x = 3 + 4 = 7, y = 7 + 4 = 11$

又 $-1, c, z, 20, b$ 也是等差數列

$d_2 = \frac{20 - (-1)}{3} = 7 \therefore c = -1 + 7 = 6,$

$z = 6 + 7 = 13, b = 20 + 7 = 27$

$\Rightarrow x + y + z - c = 7 + 11 + 13 - 6 = 25$

4

老師

傳授

等差級數 I

學生

習作

4

1. 求等差級數 $(-11) + (-4) + \dots + 66$ 的和是多少？

解

1. $a_1 = -11, d = -4 - (-11) = 7,$

$a_n = 66, a_n = a_1 + (n-1)d,$

$66 = (-11) + (n-1) \times 7, n = 12$

$S_{12} = \frac{(-11 + 66) \times 12}{2} = 55 \times 6 = 330$

1. 有一等差級數首項為 101，公差為 -7 ，試求前 11 項的和為多少？

解

1. $a_1 = 101, d = -7, n = 11$

$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

$S_{11} = \frac{11[2 \times 101 + (11-1) \times (-7)]}{2}$

$= \frac{11[202 - 70]}{2} = 726$

2. 有一等差級數共 16 項，其總和為 728，若將各項均加 5 之後得一新級數，則此新級數之和為多少？
3. 已知一等差級數的第 4 項為 -101，第 9 項為 -56，則此等差級數自首項加到第幾項時，其和為最小？

解

$$2. n = 16, S_n = 728,$$

$$\text{新 } S_n = 728 + (16 \times 5) = \underline{808}$$

$$3. a_9 = a_4 + (9 - 4) \times d,$$

$$\Rightarrow -56 = -101 + 5d, d = 9$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \times 9$$

$$\Rightarrow -101 = a_1 + 27,$$

$$a_1 = -128$$

設此等差級數第 n 項開始為正數

$$a_n = -128 + (n - 1) \times 9 = 9n - 137 > 0$$

$$\Rightarrow n > \frac{137}{9}, n > 15\frac{2}{9}, n = 16$$

故此等差級數自首項加到第 15 項時，其和最小

2. 若甲、乙兩人同時同地出發，甲每日走 11 公里，乙第一日走 7 公里，而後每日增加固定之公里數，若出發 6 日乙可追上甲，則乙每日要固定增加多少公里？ **生活題**
3. 已知一等差級數 $a_7 = -333$ ， $a_{17} = -283$ ，則此等差級數自首項加到第幾項時，其和開始為正數？

解

2. 設乙每日增加 d 公里

$$11 \times 6 = \frac{6[2 \times 7 + (6 - 1)d]}{2}$$

$$\Rightarrow 132 = 6(14 + 5d) \Rightarrow 22 = 14 + 5d,$$

$$d = \frac{8}{5} = 1.6, \text{ 所以乙每日要固定增加 } \underline{1.6 \text{ 公里}}$$

$$3. a_{17} = a_7 + (17 - 7)d$$

$$\Rightarrow -283 = -333 + 10d, d = 5$$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d$$

$$\Rightarrow -333 = a_1 + 6 \times 5, a_1 = -363$$

設此等差級數自首項加到第 n 項時，其和開始為正數

$$\frac{n[2 \times (-363) + (n - 1) \times 5]}{2} > 0$$

$$\Rightarrow 5n - 731 > 0 \Rightarrow n > \frac{731}{5}$$

$$\Rightarrow n > 146\frac{1}{5}, n \text{ 取 } 147, \text{ 所以此等差級數自首項加到第 } \underline{147 \text{ 項時，其和開始為正數}}$$

5 老師傳授

等差級數 II

學生寫作

已知多邊形的外角和為 360° ，一內角與其外角和為 180° ，若有一多邊形其內角度數是一個以公差為 4° 的等差數列，且其最大內角為 162° ，請問：此多邊形的邊數為何呢？

解

162° 的外角為 18° ，多邊形的外角和為 360° ，

設此多邊形有 n 邊，

$$\Rightarrow a_1 = 18, d = 4$$

$$\Rightarrow 360 = \frac{n[36 + (n - 1) \times 4]}{2}$$

$$\Rightarrow 720 = 4n^2 + 32n$$

$$\Rightarrow n^2 + 8n - 180 = 0 \Rightarrow (n + 18)(n - 10) = 0$$

$$\Rightarrow n = -18 \text{ (不合) 或 } \underline{n = 10 \text{ (邊)}}$$

有一等差級數的第 4 項為 -3，第 8 項為 13，等差級數和為 1290，請問：此等差級數的首項、公差、項數各為多少呢？

解

設首項為 a_1 、公差為 d 、項數為 n ，

$$\begin{cases} a_1 + 3d = -3 \\ a_1 + 7d = 13 \end{cases} \Rightarrow \underline{d = 4}, \underline{a_1 = -15}$$

$$1290 = \frac{n[2 \times (-15) + (n - 1) \times 4]}{2}$$

$$\Rightarrow 2580 = n(4n - 34) \Rightarrow 4n^2 - 34n - 2580 = 0$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 17n - 1290 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 30)(2n + 43) = 0$$

$$\Rightarrow n = -\frac{43}{2} \text{ (不合) 或 } \underline{n = 30}$$

6

老師

傳授

等差中項

學生

習作

6

1. 已知 $9x + 7$, $7x + 1$, $3x + 4$ 三數成等差數列, 求 $7x + 1 = ?$
2. 若 $a \neq 0$, 且 $3, a, 15$ 三數的倒數成等差數列, 求 $a = ?$
3. 若兩數 a, b 的等差中項為 4 , 且 $2a - b$ 與 $a + 2b$ 的等差中項為 9 , 求 $a - b = ?$

解

$$1. \frac{(9x + 7) + (3x + 4)}{2} = 7x + 1, x = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 7x + 1 = \frac{65}{2}$$

$$2. 3, a, 15 \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{a}, \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{a} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, a = \underline{5}$$

$$3. 4 = \frac{a + b}{2}, a + b = 8$$

$$9 = \frac{(2a - b) + (a + 2b)}{2}, 3a + b = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 8 & \dots \textcircled{1} \\ 3a + b = 18 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$2a = 10, a = 5 \Rightarrow \text{代入} \textcircled{1} \text{ 得 } b = 3$$

$$\Rightarrow a - b = 5 - 3 = \underline{2}$$

$$1. \text{ 已知 } \frac{1}{2}x + 4, \frac{1}{3}x + 6, \frac{1}{4}x + 10 \text{ 三數成等差數列, 求 } \frac{1}{3}x + 6 = ?$$

$$2. \text{ 若 } a \neq 0, \text{ 且 } -8, a, -24 \text{ 三數的倒數成等差數列, 求 } a = ?$$

$$3. \text{ 若兩數 } a, b \text{ 的等差中項為 } 7, \text{ 且 } 3a - b \text{ 與 } a + 3b \text{ 的等差中項為 } 13, \text{ 求 } b - a = ?$$

解

$$1. 2\left(\frac{1}{3}x + 6\right) = \left(\frac{1}{2}x + 4\right) + \left(\frac{1}{4}x + 10\right)$$

$$\frac{2}{3}x + 12 = \frac{3}{4}x + 14, x = -24$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x + 6 = -8 + 6 = \underline{-2}$$

$$2. -8, a, -24 \Rightarrow -\frac{1}{8}, \frac{1}{a}, -\frac{1}{24}$$

$$\frac{2}{a} = -\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{24}\right) \Rightarrow \frac{2}{a} = -\frac{4}{24}$$

$$\Rightarrow a = \underline{-12}$$

$$3. 7 \times 2 = a + b, 13 \times 2 = 3a - b + a + 3b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a = \underline{16}$$

Let's Go!

同步

評量

2

(A) 1. 下列何者不是等差級數?

(A) $1, 1, 1, 1, 1$

(B) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

(C) $1 + 2 + 3 + 4 + 5$

(D) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

1. 等差級數各項間需以“+”號連接, 故(A)不是等差級數

(A) 2. 有一等差數列, 第 n 項是 $2n - 1$, 則下列選項何者正確?

(A) 首項是 1

(B) 第二項是 2

(C) 第三項是 3

(D) 第四項是 4

2. (A) $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ (B) $a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$

(C) $a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$ (D) $a_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$

(B) 3. 有一等差數列的首項是 4, 第六項是 34, 則公差是多少?

(A) 4

(B) 6

(C) 8

(D) 30

3. 設公差為 d , 則 $4 + 5d = 34, 5d = 30 \therefore d = 6$

(B) 4. 已知一等差級數的首項是 23, 末項是 59, 其和為 533, 則此級數的公差是多少?

(A) 2 (B) 3

(C) 4 (D) 5

4. 設級數共 n 項, 則 $\frac{(23 + 59) \times n}{2} = 533, 41n = 533$

$$\therefore n = 13, \text{ 故公差 } d = \frac{59 - 23}{13 - 1} = 3$$

(C) 5. 若兩數 a, b 的等差中項為 7, 兩數的乘積為 40, 求 $a + b = ?$

(A) 6

(B) 10

(C) 14

(D) 16

5. $\frac{a + b}{2} = 7 \Rightarrow a + b = 14$

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

- (C) 1. 下列何者不是等差數列？
 (A) $0, 0, 0, 0$ (B) $\frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}$ (C) $a-d, a, a+d, a+3d$ (D) $-0.5, 0, 0.5, 1$
 1. (C) $a - (a-d) = d \neq (a+3d) - (a+d) = 2d \Rightarrow a-d, a, a+d, a+3d$ 不是等差數列
- (C) 2. 有一等差數列，公差是 3，若每項同乘以 2 形成一新等差數列，則新等差數列之公差為多少？
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) 6 (D) 9
 2. 設此數列的首項為 a ，則此數列為 $a, a+3, a+6, \dots$
 同乘以 2 後此數列為 $2a, 2a+6, 2a+12, \dots$ ，
 公差為 $(2a+6) - 2a = 6$
- (D) 3. 若一等差數列共有 6 項，且末項比首項多 60，則其公差為多少？
 (A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 12
 3. 設首項為 a ，公差為 d ，則 $(a+5d) - a = 60, 5d = 60 \Rightarrow d = 12$
- (C) 4. 有一等差數列的首項為 25，第三項為 19，若從第 n 項開始出現負數，則 n 為多少？
 (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11
 4. $a_3 = a_1 + (3-1)d \Rightarrow 19 = 25 + (3-1)d \Rightarrow d = -3$
 $a_n = 25 + (n-1) \times (-3) < 0$
 $\Rightarrow 25 - 3n + 3 < 0 \Rightarrow 3n > 28 \Rightarrow n > 9\frac{1}{3}$ ，又 n 為正整數 $\therefore n = 10$
- # (C) 5. 若一等差數列第 11 項為 33，第 21 項為 -33，則第 31 項為何？
 (A) -66 (B) 66 (C) -99 (D) 99
 5. $(-33) + (-33 - 33) = -99$
- (C) 6. 已知一等差級數共有 27 項，其第 14 項為 10，則此等差級數之和為多少？
 (A) 210 (B) 240 (C) 270 (D) 300
 6. $\therefore \frac{27+1}{2} = 14$ ， \therefore 第 14 項為中間項
 $S_{27} = 27 \times a_{14} = 27 \times 10 = 270$
- (C) 7. 若 a 與 b 的等差中項為 4， $2a - b$ 與 $a + 2b$ 的等差中項為 9，則 $a - b$ 等於多少？
 (A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 8
 7. $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(2a-b) + (a+2b)}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 8 \\ 3a+b = 18 \end{cases}$ 解得 $a = 5, b = 3 \therefore a - b = 2$
- (D) 8. $\frac{8}{13} = 0.615384615384\dots$ ，觀察小數點後數字出現的規則，試求小數點後第 200 位數字為何？
 (A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 1
 8. $200 \div 6 = 33 \dots 2$ ，此數為 1
- (C) 9. 有一等差數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_9$ ，若 $a_1 + a_9 = 38$ ，求此數列和為多少？
 (A) 152 (B) 161 (C) 171 (D) 181
 9. $a_1 + a_9 = 2a_5 \Rightarrow a_5 = 19$
 \therefore 此數列和 $= 19 \times 9 = 171$
- (A) 10. 已知 $1, a, b, c, \frac{19}{3}, \dots$ 為一等差數列，則 $3(b-a)$ 之值可被下列何者整除？
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7
 10. $d = (\frac{19}{3} - 1) \div 4 = \frac{4}{3}$ ， $3(b-a) = 3d = 3 \times \frac{4}{3} = 4$ ，
 4 可被 2 整除

解題小備方 第 4 題：先求公差 (d)， $a_n = a_1 + (n-1) \times d < 0$ 。
 第 5 題： $a_{11} = 33, a_{21} = -33, a_{31} = ?$
 $\begin{array}{c} \xrightarrow{-66} \xrightarrow{-66} \\ -66 \quad -66 \end{array}$

(D) 11. 有一三角形的三內角度數成等差數列，若公差為 35° ，則此三角形為何種三角形？

- (A) 正三角形 (B) 等腰三角形
(C) 直角三角形 (D) 鈍角三角形

11. 設最小角為 a° ，則 $a + (a + 35) + (a + 70) = 180$ ，
 $3a + 105 = 180$ ， $3a = 75 \therefore a = 25$ ，三內角度數為 25° ，
 60° ， 95° ，故此三角形為鈍角三角形

(B) 12. 觀察以下分數的排列規則： $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{2}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{2}{9}$ 、 $\frac{3}{9}$ 、 $\frac{4}{9}$ ……，試求 $\frac{7}{14}$ 出現在第幾項？

- (A) 36 (B) 42 (C) 48 (D) 50

12. $(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 7 = 42$

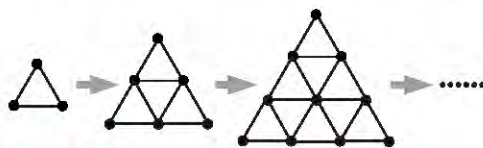
※(A) 13. 臺積電舉辦登山健行，員工排成一列行走，如果依序為男、男、女、男、女、男、男、女、男、女、……，則第 74 個員工的性別為何？

- (A) 男 (B) 女 (C) 可能是男也可能是女 (D) 無法判斷

13. 每 5 個人為一循環，
 $74 \div 5 = 14 \cdots 4$ 應為男性

(C) 14. 如右圖，將三角形依規律排列，1 個三角形有 3 個交點，4 個三角形有 6 個交點，則 36 個三角形有幾個交點？

- (A) 64 (B) 48
(C) 28 (D) 38

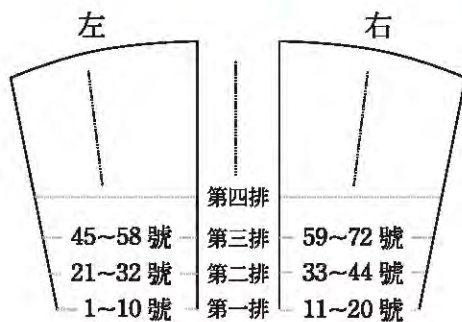


14. $36 = \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 2] \Rightarrow n = 6$ (層)

n 層有 $n+1$ 個交點， $1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 28$ (個)

※(C) 15. 華納電影院的座位表如右圖，即第一排左、右區各有 10 個座位，第二排左、右區各比第一排增加 2 個座位，以此類推……，若小鼎買的电影票座位號碼是 161 號，請問：他應坐在左區或右區第幾個位子上？

- (A) 左區第六排第 10 位 (B) 左區第六排第 1 位
(C) 右區第六排第 1 位 (D) 右區第六排第 9 位



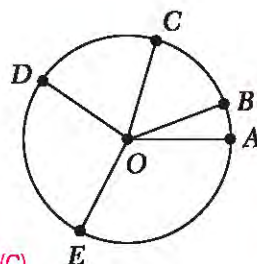
15. $S_5 = \frac{5}{2} [2 \times 20 + (5-1) \times 4] = 140$ 且 $a_6 = 20 + (6-1) \times 4 = 40 \therefore$ 位於右區第六排第 1 位



(C) 1. 如右圖，圓 O 上依序有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五點，且扇形 OAB 、 OBC 、 OCD 、 ODE 、 OEA 的面積恰成爲一等差數列。若 $\angle AOB = 24^\circ$ ，則 $\angle DOE = ?$

- (A) 72°
(B) 84°
(C) 96°
(D) 108°

1. 設公差為 $d^\circ \Rightarrow \angle COB = (24 + d)^\circ$ ， $\angle COD = (24 + 2d)^\circ$ ，
 $\angle DOE = (24 + 3d)^\circ$ ， $\angle EOA = (24 + 4d)^\circ$ ，
則 $24 + (24 + d) + (24 + 2d) + (24 + 3d) + (24 + 4d) = 360$
 $\Rightarrow 120 + 10d = 360$ ， $d = 24$ ，則 $\angle DOE = (24 + 3 \times 24)^\circ = 96^\circ$ ，故選(C)



(C) 2. 等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中，若 $a_3 - a_2 = 6$ ，則 $a_{330} - a_{20} = ?$

- (A) 6 (B) 1854
(C) 1860 (D) 1866

2. 公差 $= a_3 - a_2 = 6$ ，
 $a_{330} - a_{20} = (a_1 + 329d) - (a_1 + 19d) = 310d = 310 \times 6 = 1860$

(D) 3. 已知 $1 \sim 99$ 中有 49 個偶數，從這 49 個偶數中取出 48 個數，其平均數為 $49 \frac{5}{12}$ ，則未取的數字為何？

- (A) 20 (B) 28
(C) 72 (D) 78

3. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 98 = \frac{49 \times (2 + 98)}{2} = 2450$
又取出的 48 個偶數和 $= 49 \frac{5}{12} \times 48 = (50 - \frac{7}{12}) \times 48 = 2400 - 28 = 2372$
 \therefore 所求 $= 2450 - 2372 = 78$

(D) 4. 將 1~100 的正整數中，除以 4 餘 3 的數，由小到大排列。若第 15 個數為 a ，第 20 個數為 b ，則 $b - a = ?$

- (A) 11 (B) 15
(C) 16 (D) 20

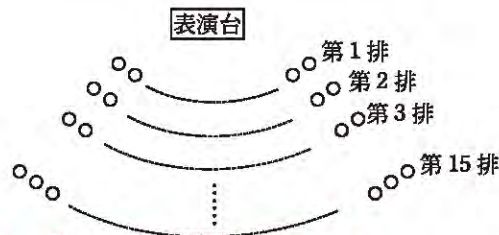
4. 在 1~100 的整數中，
被 4 除餘 3 的數有：3, 7, 11, 15, 19, …… 成等差數列，
 $a = a_{15} = 3 + (15 - 1) \times 4 = 59$, $b = a_{20} = 3 + (20 - 1) \times 4 = 79$,
 $b - a = 79 - 59 = 20$

87 基測二

※(C) 5. 如右圖，表演台前共有 15 排座位，其中第一排有 30 個，且每一排均比前一排多 2 個座位。若某校有 1~25 班，每班 20 人，並依下列方式安排學生入座：

- (1) 依班級順序先排第一班，安排完後再排下一班。
(2) 前排的座位排滿後，才排下一排座位。
請問哪一班的學生全部都坐在第 8 排？

- (A) 第 12 班 (B) 第 13 班 (C) 第 14 班 (D) 第 15 班



$$5. S_7 = \frac{7}{2} [2 \times 30 + (7 - 1) \times 2] = 252$$

$$a_8 = 30 + (8 - 1) \times 2 = 44, 252 + 44 = 296$$

$$252 \div 20 = 12 \cdots 12$$

所以第 13 班分散在第 7 排和第 8 排，第 14 班全部坐在第 8 排

87 基測二

(B) 6. 有一長條型鏈子，其外型由邊長為 1 公分的正六邊形排列而成。右圖表示此鏈之任一段花紋，其中每個黑色六邊形與 6 個白色六邊形相鄰。若鏈子上有 35 個黑色六邊形，則此鏈子共有幾個白色六邊形？



$$6. 6 + 4 \times (35 - 1) = 6 + 136 = 142$$

- (A) 140 (B) 142 (C) 210 (D) 212

87 基測一

(B) 7. 已知 $1^2 + 1 = 2^2 - 2$, $2^2 + 2 = 3^2 - 3$, $3^2 + 3 = 4^2 - 4$, …, $99^2 + 99 = 100^2 - 100$ 。若 $1123^2 + 1123 + 2248 + 1125 = a^2$ ，且 $a > 0$ ，則 $a = ?$

- (A) 1124 (B) 1125
(C) 1126 (D) 1136

7. $1123^2 + 1123 = 1124^2 - 1124$ ，又 $1124^2 + 1124 = 1125^2 - 1125$
 $a^2 = 1124^2 - 1124 + 2248 + 1125 = 1124^2 + 1124 + 1125$
 $= 1125^2 - 1125 + 1125 = 1125^2$

85 基測二

基測題

(C) 1. 有一個數列 $n + d$, $2n + 3d$, $3n + 5d$, …, n 和 d 都不是 0，且 $n \neq d$ ，有關這個數列的性質，請選出正確的敘述為何？

- (A) 此數列不是等差數列 (B) 此數列是等差數列，公差是 $n + d$
(C) 此數列是等差數列，公差是 $n + 2d$ (D) 此數列是等差數列，公差是 $2n - d$

(C) 2. 有一個很特別的數列如下： $\sqrt{0 + 1}$, $\sqrt{1 + 2}$, $\sqrt{2 + 3}$, …, 此數列的第 k 項為多少？

- (A) \sqrt{k} (B) $\sqrt{k + 1}$ (C) $\sqrt{2k - 1}$ (D) $\sqrt{2k + 1}$

$$2. a_k = \sqrt{(k - 1) + k} = \sqrt{2k - 1}$$

#(A) 3. 假設有數列為 $\frac{1 + 3}{5 + 7}$, $\frac{1 + 3 + 5}{7 + 9 + 11}$, $\frac{1 + 3 + 5 + 7}{9 + 11 + 13 + 15}$, … 則此數列的第 7 項為何呢？

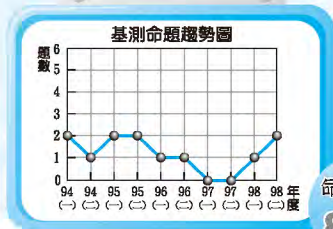
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{49}{161}$ (D) $\frac{64}{161}$

$$3. \text{第 7 項} = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15}{17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31}$$

$$= \frac{\frac{8}{2} \times (1 + 15)}{\frac{8}{2} \times (17 + 31)} = \frac{64}{192} = \frac{1}{3}$$

解題小方 第 3 題：找出規律： $\frac{a+b}{c+d}$, $\frac{a+b+c}{d+e+f}$, …。

- (C) 4. 右邊數列中：1、1、2、4、7、13、□、44，□內應填入哪個數呢？
 (A) 16 (B) 20
 (C) 24 (D) 28
 4. 經過觀察後可發現下述規則：自第四個數起，每個數均為前三個數之和，亦即 $4 = 1 + 1 + 2$ ； $7 = 1 + 2 + 4$ ； $13 = 2 + 4 + 7$ ；...以此類推空格處應為 $4 + 7 + 13 = 24$ ，再檢查 $44 = 7 + 13 + 24$ 符合
- (A) 5. 等差數列的第五項是 9，第十五項是 24，若 a_1 是首項， d 是公差，則坐標平面上點 $(a_1 + d, a_1 - d)$ 在第幾象限？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四
 5. $\because a_5 = 9, a_{15} = 24, \therefore \begin{cases} a_1 + 4d = 9 \\ a_1 + 14d = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$
 $\therefore (a_1 + d, a_1 - d) = (3 + \frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ 在第一象限
- (B) 6. 在 24 與 -8 之間，插入 11 個數使之成為等差數列，則所插入的第幾個數是 0？
 (A) 10 (B) 9
 (C) 8 (D) 7
 6. $\because -8 = 24 + (13 - 1)d, d = -\frac{8}{3}$ ，
 又 $0 = 24 + (n - 1) \times (-\frac{8}{3}) \Rightarrow n = 10$ \therefore 插入的第 $10 - 1 = 9$ 項
- (A) 7. 在坐標平面上，由點 $A_1(-47, 35)$ 向右移動 3 個單位長，再向下移動 2 個單位長，到達點 A_2 。繼續由點 A_2 同樣向右移動 3 個單位長，再向下移動 2 個單位長，到達點 A_3 。如此繼續移動，依次可到達點 A_4, A_5, A_6, \dots ，則點 A_{18} 在第幾象限內？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四
 7. A_{18} 的 x 軸坐標 $= -47 + 17 \times 3 = 4$ ，
 y 軸坐標 $= 35 + (-2) \times 17 = 1$ ， $\therefore A_{18}$ 為 $(4, 1)$
- (A) 8. 假設某戲院共有 30 排坐位，依次每一排比前一排多 2 個坐位，且最後一排有 82 個坐位，請問：第 1 排加上第 10 排共有多少個坐位？
 (A) 66 (B) 72
 (C) 78 (D) 84
 8. $\because a_{30} = 82, d = 2 \therefore 82 = a_1 + 29 \times 2 \Rightarrow a_1 = 24$
 又 $a_{10} = a_1 + 9d = 24 + 9 \times 2 = 42, \therefore a_1 + a_{10} = 24 + 42 = 66$
- # (B) 9. 設有兩等差級數，他們的第 n 項之比為 $(n + 4) : (2n - 8)$ ，試求此兩級數前 21 項和的比？
 (A) 14 : 15 (B) 15 : 14
 (C) 7 : 5 (D) 5 : 7
 9. $S_{21} : S'_{21} = \frac{21[a_1 + (a_1 + 20d_1)]}{2} : \frac{21[b_1 + (b_1 + 20d_2)]}{2}$
 $= (2a_1 + 20d_1) : (2b_1 + 20d_2) = (a_1 + 10d_1) : (b_1 + 10d_2)$
 $= a_{11} : b_{11} = (11 + 4) : (2 \times 11 - 8) = 15 : 14$
- (D) 10. 一等差數列首項為 a (a 為正整數)，公差為 -1 ，則第幾項是 $-a$ ？
 (A) a (B) $2a$
 (C) $a + 1$ (D) $2a + 1$
 10. 設第 a_n 項為 $-a$ ，
 則 $-a = a + (n - 1)(-1)$
 $\therefore -a = a - n + 1$ ，即 $n = 2a + 1$
- # (B) 11. 以 2, 8, 9 三數分別當做一個等差數列的首項、公差或項數，可任意安排，欲使數列的末項值最大，則需安排公差為何？
 (A) 2 (B) 8 (C) 9 (D) 無法確定
 11. 等差數列【公差值】及【項數】愈大則【末項】亦會愈大，故以 2 為首項，8 為公差，9 為項數
- (C) 12. 樓梯有 100 階，由下而上編號從 1 號編到 100 號，甲由 1 號階往上走，每步走 1 階，乙由 100 號階往下走，每步走 2 階，假設甲、乙兩人每步所用時間相同，已知中途兩人在同一階會合，則該階的號碼是幾號？
 (A) 14 (B) 24 (C) 34 (D) 44
 12. 設該階號碼為 n 號，
 則 $1 + (n - 1) \times 1 = 100 + (n - 1) \times (-2)$
 $\Rightarrow n = 100 - 2n + 2, n = 34$

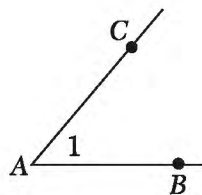


命題率 80%

能力一 幾何圖形與角

一 角的種類與性質

- 角**：有共同端點的兩射線可形成一個角，如右圖， \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{AC} 形成一個角，記為 $\angle A$ ，也可以記為 $\angle CAB$ 或 $\angle BAC$ 或 $\angle 1$ 。
- 銳角、直角、鈍角、平角與周角**：如果一個角的度數大於 0° 而小於 90° ，就稱為銳角；等於 90° ，稱為直角；大於 90° 而小於 180° ，稱為鈍角；等於 180° ，稱為平角；等於 360° ，則稱為周角。
- 補角與互補**：若 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，則稱 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為補角，或稱 $\angle A$ 和 $\angle B$ 兩角互補。
- 餘角與互餘**：若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，則稱 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為餘角，或稱 $\angle A$ 和 $\angle B$ 兩角互餘。
- 鄰角與對頂角**：兩直線相交時產生的四個角，其中相鄰的兩個角稱為一組鄰角，不相鄰的兩個角，稱為一組對頂角。



二 三角形的種類

依邊長	正三角形	如圖(一)，三角形的三邊等長，各內角均為 60°
	等腰三角形	如圖(二)，三角形的兩腰等長，兩底角相等
依內角	銳角三角形	如圖(三)，三角形的三個內角度數均小於 90°
	直角三角形	如圖(四)，三角形中有一內角度數為 90°
	鈍角三角形	如圖(五)，三角形中有一內角度數大於 90°

圖(一)

圖(二)

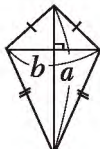
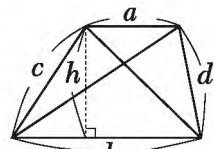
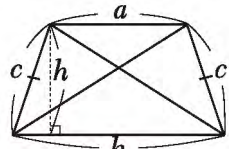
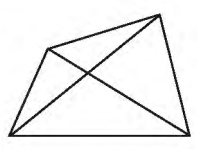
圖(三)

圖(四)

圖(五)

三 四邊形的種類

1. 平行四邊形					
	正方形	長方形	菱形	平行四邊形	
	名稱	性質		面積	周長
	正方形	四邊等長且四個內角都是直角的平行四邊形		a^2	$4a$
	長方形(矩形)	四個內角都是直角的平行四邊形		ab	$2(a+b)$
菱形	四邊等長的平行四邊形		$\frac{1}{2}ab$	$2\sqrt{a^2+b^2}$	
平行四邊形	兩雙對邊平行、等長且對角線互相平分的四邊形		ah	$2(a+b)$	

			
箏形	梯形	等腰梯形	任意四邊形
名稱	性質	面積	周長
箏形(鳶形)	兩組鄰邊等長的四邊形	$\frac{1}{2}ab$	略
梯形	一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形，此不平行的對邊稱為兩腰	$\frac{(a+b) \times h}{2}$	$a+b+c+d$
等腰梯形	為一梯形且兩腰等長	$\frac{(a+b) \times h}{2}$	$a+b+2c$
任意四邊形	內角和與外角和皆為 360°	略	略

2. 特殊四邊形

老師 傳授

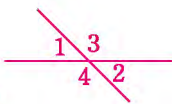
補角與對頂角

學生 習作

- 設有 A 、 B 兩角，其度數比為 $3:1$ ，且此兩角的補角度數比為 $3:5$ ，求此 A 、 B 兩角的度數？
- 兩直線相交於一點，若其中一組對頂角互餘，則另一組對頂角各為多少度呢？

解

- 設 $\angle A = 3x^\circ$ 、 $\angle B = x^\circ$
 則 $(180 - 3x) : (180 - x) = 3 : 5$ ，
 $540 - 3x = 900 - 15x$ ， $x = 30$
 故 $\angle A = 90^\circ$ 、 $\angle B = 30^\circ$
- $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$
 $\angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$
 $\therefore \angle 3 = \angle 4 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$



- 某角的餘角等於其補角的 $\frac{1}{6}$ ，求此角的度數？
- 若 $\angle B = 70^\circ$ ，且 $2\angle B$ 與 $5\angle A$ 互為補角，則 $\angle A$ 的對頂角是多少度？

解

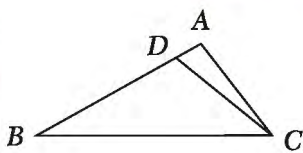
- 設此角的度數為 x°
 則 $90 - x = \frac{1}{6}(180 - x) \Rightarrow 540 - 6x = 180 - x$
 $\Rightarrow 360 = 5x \Rightarrow x = 72^\circ \Rightarrow$ 故此角為 72°
- $2\angle B + 5\angle A = 180^\circ$ ， $2 \times 70^\circ + 5\angle A = 180^\circ$
 $\angle A = 8^\circ$ ，故 $\angle A$ 的對頂角為 8°

2 老師 傳授

三角形

學生 習作

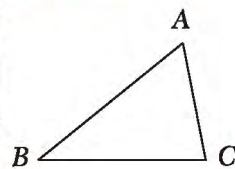
- 如圖， \overline{AD} 為 \overline{BD} 的 $\frac{1}{6}$ ，若 $\triangle ABC$ 的面積為 14，求 $\triangle ADC$ 的面積？



解

- $\therefore \overline{AD} = \frac{1}{6}\overline{BD} = \frac{1}{7}\overline{AB}$
 $\therefore \triangle ADC$ 面積 $= \frac{1}{7} \times 14 = 2$

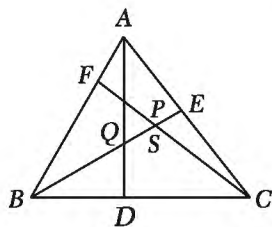
- 如圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 39^\circ$ ， $\angle C = 79^\circ$ ，則 $\triangle ABC$ 為鈍角、直角或銳角何種三角形呢？



解

- $\angle A = 180^\circ - (39^\circ + 79^\circ) = 62^\circ$ ，
 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 三內角均小於 90° ，
 故 $\triangle ABC$ 為 銳角三角形

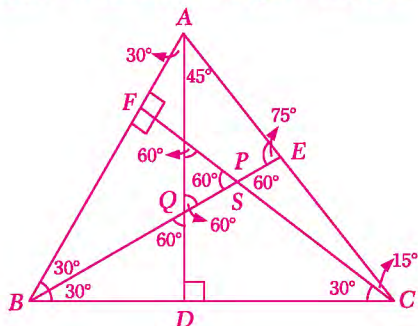
2. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，
 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， \overline{AD} 與 \overline{CF} 為高，且相交於 P ， $\angle ABC$ 的平分線 \overline{BE} 分別交 \overline{AD} 、 \overline{CF} 、 \overline{AC} 於 Q 、 S 、 E ，則圖中的等腰三角形有多少個？



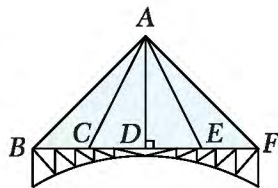
解

2. 等腰三角形有

$\triangle QAB$ 、 $\triangle SBC$ 、 $\triangle BAE$ 、 $\triangle PQS$ 、 $\triangle DAC$
 共 5 個



2. 如圖，南二高斜張橋，
 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$ ，
 其中 $\angle A = 90^\circ$ ，則圖中共有幾個鈍角三角形？
 銳角三角形？直角三角形？
 (只考慮有顏色的部分)



解

2. 鈍角三角形： $\triangle ABC$ 、 $\triangle AFE \Rightarrow$ 共 2 個
 銳角三角形：

$\triangle ABE$ 、 $\triangle ACE$ 、 $\triangle AFC \Rightarrow$ 共 3 個

直角三角形：

$\triangle ABF$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle AED$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle AFD$
 \Rightarrow 共 5 個

Let's Go!

同步 評量 1

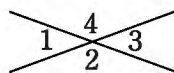
(B) 1. 若 $\angle A$ 的補角是 65° ， $\angle B$ 的餘角是 75° ，求 $\angle A - \angle B = ?$

- (A) 90° (B) 100° (C) 110° (D) 115°

$$1. \angle A - \angle B = (180^\circ - 65^\circ) - (90^\circ - 75^\circ) = 115^\circ - 15^\circ = 100^\circ$$

(D) 2. 如右圖，兩條直線相交於一點，則下列敘述何者有誤？

- (A) $\angle 2 = \angle 4$
 (B) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
 (C) 若 $\angle 1 + \angle 3 = 40^\circ$ ，則 $\angle 4 = 160^\circ$
 (D) 若 $\angle 2 + \angle 4 = 280^\circ$ ，則 $\angle 1 = 60^\circ$



$$2. (D) \text{ 若 } \angle 2 + \angle 4 = 280^\circ, \angle 2 = \angle 4 = 140^\circ, \angle 1 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

(C) 3. $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為餘角，且 $\angle A : \angle B = 7 : 8$ ，則 $\angle A = ?$

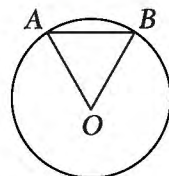
- (A) 38° (B) 40° (C) 42° (D) 48°

$$3. \angle A = 90^\circ \times \frac{7}{7+8} = 42^\circ$$

(D) 4. 如右圖，圖上 \overline{AB} 弦且 \overline{AB} 小於半徑 \overline{OA} 與 \overline{OB} 所形成的三角形必為何種三角形？

- (A) 正三角形 (B) 直角三角形
 (C) 等腰直角三角形 (D) 等腰三角形

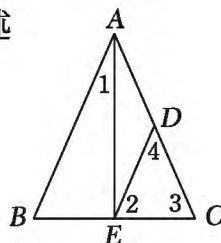
4. $\because \overline{OA} = \overline{OB} > \overline{AB}$
 $\therefore \triangle ABC$ 為等腰三角形



(C) 5. 如右圖， $\overline{BE} = \overline{EC}$ ， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ ， D 為 \overline{AC} 之中點，則下列敘述何者有誤？

- (A) $\triangle ABC$ 為等腰三角形 (B) $\angle B = \angle 3$
 (C) $\angle 3 = \angle 4$ (D) $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

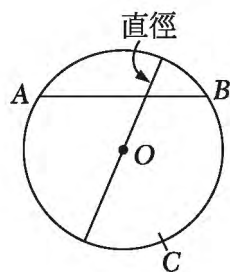
5. $\because \overline{BE} = \overline{EC}$ ，且 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ， $\therefore \triangle ABC$ 為等腰三角形
 $\angle 1 + \angle B = 90^\circ = \angle 1 + \angle 3 \Rightarrow \angle 3 = \angle B$



能力二 圓形與扇形

一 圓的定義與性質

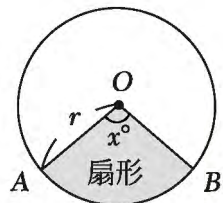
1. 圓：係指一封閉的平面曲線，其上的每一點都與一個指定的固定點等距離。
2. 圓面積 $= \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ 。(r : 半徑 ; d : 直徑)
3. 圓周長 $= 2\pi r = \pi d$ 。
4. 弧：圓上兩點 A 、 B 之間所包含的圓周長片段稱為弧，以 \widehat{AB} 表示，若 \widehat{AB} 占全圓的弧長較小者稱為「劣弧」。反之， \widehat{ACB} 所占弧長較長者稱為「優弧」。
5. 弦：連接圓上相異兩點的線段長，如 \overline{AB} ，最長弦為直徑。



二 扇形的相關性質

扇形：若有一圓 O ，其內有兩條半徑 \overline{OA} 、 \overline{OB} ，與 \widehat{AB} 所圍成的區域，即為扇形，如圖所示。若圓心角 $\angle AOB = x^\circ$ ，圓 O 半徑為 r ，則有下列關係：

1. \widehat{AB} 弧長： $\frac{\widehat{AB}}{x^\circ} = \frac{\text{圓周長}}{360^\circ} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ 。
2. 扇形面積： $\frac{\text{扇形面積}}{x^\circ} = \frac{\text{圓面積}}{360^\circ} \Rightarrow \text{扇形面積} = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ 。
3. 扇形周長： $\overline{OA} + \overline{OB} + \widehat{AB} = \text{直徑} + \widehat{AB}$ 。

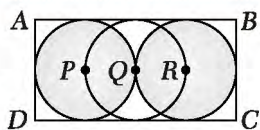


3 老師傳授

圓與四邊形的關係

學生習作

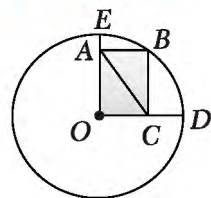
如圖，三個圓的圓心分別是 P 、 Q 、 R ，且均與矩形 $ABCD$ 相切，已知圓心 Q 的圓半徑為 1，且 P 、 Q 、 R 三點在同一線上，請問：矩形 $ABCD$ 面積為何呢？



解

\because 圓心 Q 的半徑為 1，直徑為 2
 \therefore 矩形 $ABCD$ 的寬 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$ ，
 長 $\overline{AB} = \overline{CD} = 4$ ，
 矩形 $ABCD$ 面積為 $2 \times 4 = 8$ (平方單位)

如圖，圓內的四邊形 $OABC$ 為一矩形，若圓 O 的直徑為 18 公分，試求 \overline{AC} 的長度為何？



解

\because $OABC$ 是矩形，對角線相等 $\Rightarrow \overline{OB} = \overline{AC}$
 $\therefore \overline{OB} = \overline{AC} = 9$ (公分)

解題小偏方

老師 3：矩形的長是 2 個圓形直徑。

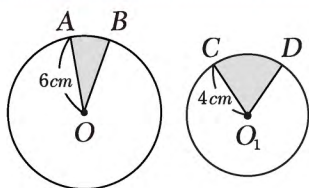
學生 3：矩形 $OACB$ 對角線等長，則 \overline{AC} 亦等同半徑。

4 老師 傳授

扇形面積與弧長

學生 習作 4

如圖，已知圓 O 與圓 O_1 的半徑為 6 公分與 4 公分，假設 $\angle AOB = 30^\circ$ ，且圖形中兩扇形面積相同，則 $\angle CO_1D = ?$



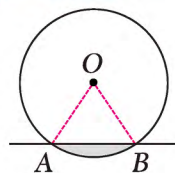
解

$$\text{扇形 } AOB \text{ 面積} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 6^2 = 3\pi,$$

$$\text{圓 } O_1 \text{ 的面積} = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

$$\angle CO_1D = \frac{3\pi}{16\pi} \times 360^\circ = \underline{67.5^\circ}$$

有一火車車輪如右圖所示，車輪部分在鐵軌之下，若 $\overline{AB} = 12$ ，車輪半徑亦為 12，請問： \widehat{AB} 的弧長為何呢？



解

連接 \overline{OA} ， \overline{OB} 可知， $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = 12$ ，

$\triangle OAB$ 為正三角形，

$$\therefore \widehat{AB} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2 \times 12\pi = \underline{4\pi}$$

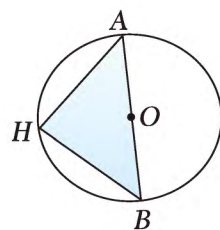
Let's Go! 同步 評量 2

(B) 1. 如右圖， \overline{AB} 為直徑， $\overline{AH} = \overline{BH}$ ，若圓 O 的面積為 4π ，試求 \widehat{AH} 的長度為何？

- (A) 1
- (B) π
- (C) 2π
- (D) 3π

$$1. \pi r^2 = 4\pi, r = \pm 2 \text{ (負不合),}$$

$$\widehat{AH} = 4\pi \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = \pi$$



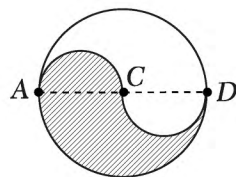
(B) 2. 如右圖， $\overline{AC} = \overline{CD} = 6$ ，求斜線部分的周長為何呢？

- (A) 6π
- (B) 12π
- (C) 18π
- (D) 24π

$$2. \widehat{AC} + \widehat{CD} = 2 \times 6\pi \times \frac{1}{2} = 6\pi$$

$$\widehat{AD} = 12\pi \times \frac{1}{2} = 6\pi$$

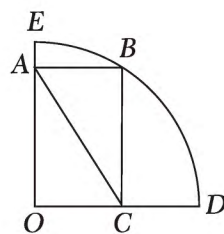
$$\text{斜線部分的周長為 } 6\pi + 6\pi = 12\pi$$



(C) 3. 如右圖，已知 $OABC$ 是長方形，扇形 OED 是 $\frac{1}{4}$ 圓， \overline{AC} 長是 5 公分，請問：圓 O 之面積為多少平方公分？

- (A) 9π
- (B) 16π
- (C) 25π
- (D) 36π

$$3. \overline{AC} = \overline{OB} = 5, \therefore \text{圓 } O \text{ 面積} = \pi \times 5^2 = 25\pi$$

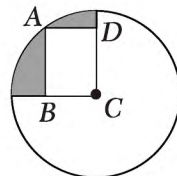


(A) 4. 如右圖， C 點為圓心， A 點為圓上一點，並使得 $ABCD$ 為一長方形，其長與寬分別是 8 與 6，求灰色部分面積為何呢？

- (A) $25\pi - 48$
- (B) $24\pi - 48$
- (C) $23\pi - 48$
- (D) $22\pi - 48$

$$4. \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

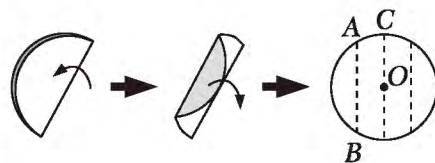
$$\text{灰色部分} = \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 - 8 \times 6 = 25\pi - 48$$



(B) 5. 有一圓如右圖的方法摺疊，則展開後 $\angle AOC$ 的角度為多少？

- (A) 15°
- (B) 30°
- (C) 45°
- (D) 60°

5. 做 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 交於 H ，
 令 $\overline{MH} = \overline{OH} = 1$ ，
 則 $\overline{OA} = \overline{OM} = 2$
 $\therefore \angle OAH = 30^\circ$ ，
 $\angle AOM = 60^\circ$ ， $\angle AOC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$



能力三 立體圖形

一 立體圖形的性質

名稱	圖形	性質
角柱體 (設 n 角柱)		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\Rightarrow V = a \times h$ 2. 側面有 n 個矩形 3. 共有 $n + 2$ 個面 4. 共有 $2n$ 個頂點 5. 共有 $3n$ 個邊
圓柱體		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\Rightarrow V = (\pi r^2) \times h$ 2. 表面積： $A = 2\pi r^2 + hl$ ，($l = 2\pi r$)
圓錐體		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\times \frac{1}{3} \Rightarrow V = a \times h \times \frac{1}{3}$ 2. 底圓周長： $l = 2\pi r$ 3. 錐體斜邊長： $R = \sqrt{h^2 + r^2}$
角錐體 (設 n 角錐)		1. 體積 = 底面積 \times 高 $\times \frac{1}{3} \Rightarrow V = a \times h \times \frac{1}{3}$ 2. 側面有 n 個等腰三角形 3. 面與頂點皆有 $n + 1$ 個 4. 共有 $2n$ 個邊
正六面體的 展開圖		

5 老師 傳授

多面體的性質

學生 寫作 5

1. 有一個十二角柱有 a 個頂點、 b 個邊、 c 個面。請問： $(a + c) - b = ?$
2. 若有一個七角錐的邊數比正四面體的邊數多 x 個，五角柱有 y 個面，則 $x + y = ?$

解

1. 十二角柱有 24 個頂點、36 個邊、14 個面，
 $(24 + 14) - 36 = 2$
2. $x =$ 七角錐邊數 $-$ 正四面體邊數
 $= 2 \times 7 - 2 \times 3 = 8$
 $y =$ 五角柱面數 $= 5 + 2 = 7$ ，
 $x + y = 8 + 7 = 15$

有一個五角錐形的巧克力，今天在角錐上切一刀，不可切到頂點也不可切到底面，可將巧克力分成兩個部分，請問：此兩部分的立體圖形共有多少個頂點、面與邊呢？

解

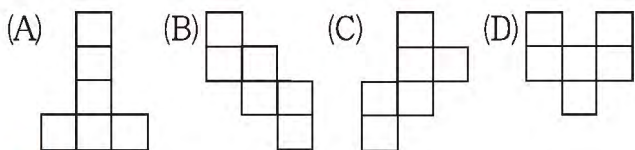
五角錐	頂點	面	邊
上半部	6	6	10
下半部	10	7	15
總計	16	13	25

6 老師 傳授

展開圖的判別

學生 寫作 6

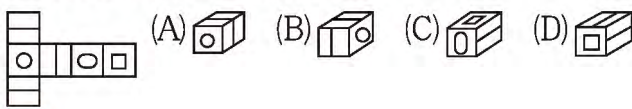
下列的展開圖中，何者不是正方體的展開圖呢？



解

(D) 無法形成正方體

下圖是一個正方體的展開圖，將它折成正方體之後的圖形是下列何者呢？



解

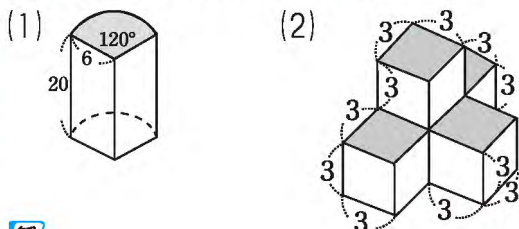


7 老師 傳授

體積的計算 I

學生 寫作 7

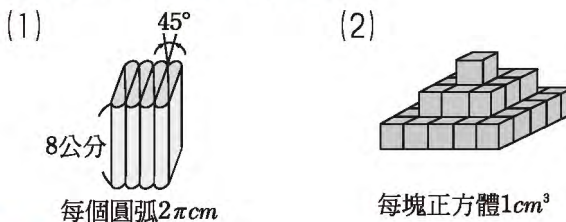
請求出下列各柱體的體積：



解

- (1) $\frac{120^\circ}{360^\circ} \times 6 \times 6 \times \pi \times 20 = 240\pi$ (單位³)
- (2) $3^3 \times 5 = 27 \times 5 = 135$ (單位³)

請求出下列圖形的體積：



解

- (1) $2\pi \times 8 = 16\pi$ ， $16\pi \div 2\pi = 8$ (半徑)
體積 $= (8 \times 8 \times \pi) \times 8 = 512\pi$ (cm³)
- (2) $1 + 9 + 25 = 35$ (塊)，每塊 1 cm³
共計 35 (cm³)

解題小備方 學生 7-(1)：有 8 個相同半徑的 45° 扇形，故底面積為一個圓面積。

8

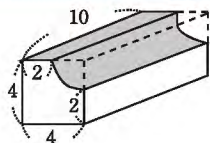
老師 傳授

體積的計算 II

學生 實作

8

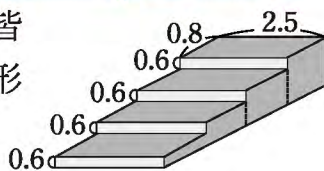
試求出右圖柱體的體積。



解

$$\begin{aligned} & (4 \times 4 - \frac{1}{4} \times 2 \times 2 \times \pi) \times 10 \\ & = (16 - \pi) \times 10 = \underline{160 - 10\pi} \text{ (單位}^3\text{)} \end{aligned}$$

右圖中每一階的長、寬皆相同，試求出此階梯圖形的體積。



解

$$\begin{aligned} & \text{體積} \\ & = (0.8 \times 2.5) \times (0.6 + 0.6 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.6 \times 4) \\ & = 2 \times 6 \\ & = \underline{12} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

9

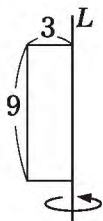
老師 傳授

旋轉後的立體圖形

學生 實作

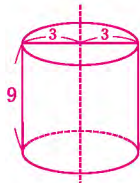
9

如圖，一個長方形紙板繞這直線 L 旋轉一周，得到一個圓柱，則其體積與表面積為何？

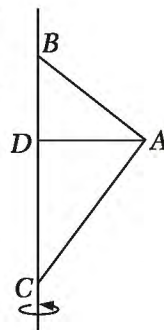


解

$$\begin{aligned} & \text{體積} = (3 \times 3 \times \pi) \times 9 \\ & \quad = \underline{81\pi} \text{ (立方單位)} \\ & \text{表面積} = 2(3 \times 3 \times \pi) + (6 \times \pi) \times 9 \\ & \quad = 18\pi + 54\pi \\ & \quad = \underline{72\pi} \text{ (平方單位)} \end{aligned}$$



如圖， $\overline{BC} = 30$ ， $\overline{AD} = 14$ ，以 \overline{BC} 為軸，將 $\triangle ABC$ 旋轉一圈，所得體積為何？



解

$$\begin{aligned} & \text{體積} = \frac{1}{3} \times 14^2 \times \pi \times 30 \\ & \quad = \underline{1960\pi} \text{ (立方單位)} \end{aligned}$$

解題小備方 學生 9：圓錐體體積 = $\frac{1}{3} \times$ 底圓面積 \times 圓錐體高。

Let's Go!

同步 評量

3

(C) 1. 下列有關直角柱的敘述哪一個不正確？

- (A) 有兩個全等的底面 (B) 側面與底面垂直
(C) 側面是等腰三角形 (D) 邊的個數是底面邊數的 3 倍

1. 角柱的側面是長方形

(A) 2. 小華用黏土捏了一個圓柱，但是他覺得柱高太高了，於是把柱高變為原柱高的 $\frac{1}{4}$ ，如果使體積不變，則底圓半徑為原半徑的多少倍？

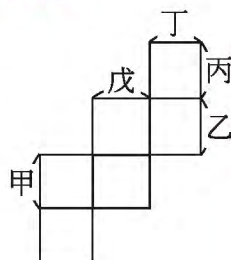
- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

$$2. \pi \times r^2 \times h = \pi \times n \times \frac{1}{4}h, n = (2r)^2$$

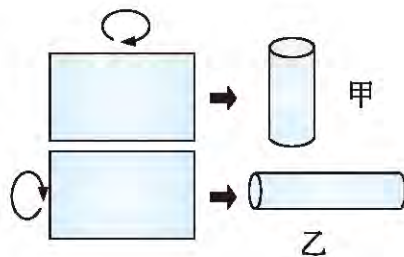
需為原半徑的 2 倍

(C) 3. 右圖是正方體的一個展開圖，當用它合成原來的正方體時，與甲邊重合的是哪一邊？

- (A) 乙 (B) 丙
(C) 丁 (D) 戊



(A) 4. 如右圖，有兩張相同的長方形厚紙板，分別對長、寬捲起成圓柱體而成為兩空心圓柱，若長方形紙板的長、寬分別為 80 cm 、 20 cm ，則甲、乙兩圓柱體哪一個體積較大？



(A) 甲

(B) 乙

(C) 一樣大

(D) 無解

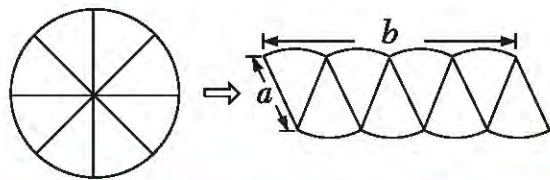
$$4. \because \text{甲} \Rightarrow 80 = 2\pi r, r = \frac{40}{\pi},$$

$$\text{體積} = \left(\frac{40}{\pi}\right)^2 \times \pi \times 20 = \frac{32000}{\pi} \text{ cm}^3$$

$$\text{乙} \Rightarrow 20 = 2\pi r, r = \frac{10}{\pi},$$

$$\text{體積} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \times \pi \times 80 = \frac{8000}{\pi} \text{ cm}^3 \therefore \text{甲} > \text{乙}$$

(B) 5. 小明將一蛋糕切成 8 等分，重新排列如右圖，並用尺量出 a 、 b 長度，則 $b \div a$ 最接近哪一個數？



(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

$$5. b = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r, a = r, b \div a = \frac{\pi r}{r} = \pi \approx 3.14$$

能力四 容積與容量

一 體積與容積單位換算表

容量	1 公秉 (kl)	1 公石	1 公斗	1 公升 (l)	1 分公升 (dl)	1 公勺	1 毫公升 (ml)
容積 (體積)	1 立方公尺 (m^3)	—	—	1000 立方公分 (cm^3)	100 立方公分 (cm^3)	—	1 立方公分 (cm^3)

二 不規則物體的體(容)積求法

不規則物體的體積 = 增高部分水量 = 柱體內部底面積 \times 水面上升高度。

三 長方體容器的容積

容積 = (內部的長) \times (內部的寬) \times (內部的高)

1. 有蓋的長方體容器：

內部的長、寬、高 = 外部的(長)、(寬)、(高) - (2 \times 容器壁的厚度)。

2. 無蓋的長方體容器：

內部的長、寬 = 外部的(長)、(寬) - (2 \times 容器壁的厚度)。

內部的高 = 外部的高 - 容器壁的厚度。

四 其它基本常識

1. 1 度水的水量 = 1 立方公尺的水 = 1000 公升的水量。

2. 降雨量：即一次下雨，從開始到結束所累積降雨的高度，通常以毫米(mm)表示。

3. 雨水體積：降雨量 \times 容器底面積。

10

老師傳授

容積的計算

學生習作

10

有一正方體的水槽，已知邊長為 30 公分，先注入深 20 公分的水，再放入一長方體的鐵塊其長、寬、高分別為 15 公分、12 公分、10 公分，則水上升多少公分呢？

解

$$\begin{aligned} \text{上升高度} &= (15 \times 12 \times 10) \div (30 \times 30) \\ &= 1800 \div 900 = \underline{2 \text{ (cm)}} \end{aligned}$$

用 1 公分厚的玻璃做成一個有底無蓋的水箱，從水箱外量得長、寬、高分別為 102 公分、52 公分、46 公分，請問：(1) 水箱容量是多少公升呢？(2) 水箱本身的體積是多少立方公分呢？

解

$$\begin{aligned} (1) & (102 - 2) \times (52 - 2) \times (46 - 1) \\ &= 100 \times 50 \times 45 = 225000 \text{ (cm}^3\text{)} = \underline{225 \text{ (l)}} \\ (2) & 102 \times 52 \times 46 - 225000 \\ &= 243984 - 225000 = \underline{18984 \text{ (cm}^3\text{)}} \end{aligned}$$

11

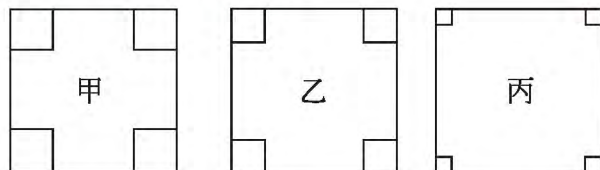
老師傳授

容量與體積的比較

學生習作

11

如圖，甲、乙、丙均是每邊長 20 公分的正方形厚紙板，分別將其四個角各剪去一個每邊長為 5 公分、4 公分、2 公分大小一樣的正方形後，做成沒有蓋子的紙盒，請問：做出來的紙盒哪一個容量最大呢？



解

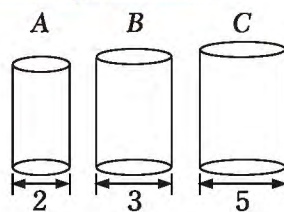
$$\text{甲} \Rightarrow (20 - 5 \times 2)^2 \times 5 = 500 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{乙} \Rightarrow (20 - 4 \times 2)^2 \times 4 = 576 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{丙} \Rightarrow (20 - 2 \times 2)^2 \times 2 = 512 \text{ (cm}^3\text{)}$$

由上可知：乙的容量最大

如圖，有 A、B、C 三個圓柱形容器，其直徑比為 2:3:5，某日下雨將三容器置於雨中，雨停後觀察，三個容器中水的體積比為何呢？



解

$$\text{體積公式 } V = (\pi r^2) \times h,$$

由公式可知，半徑或直徑的平方比 = 體積比，

$$\text{亦即 } V_A : V_B : V_C = r_A^2 : r_B^2 : r_C^2,$$

$$V_A : V_B : V_C = 2^2 : 3^2 : 5^2 = \underline{4 : 9 : 25}$$

Let's Go!

同步評量

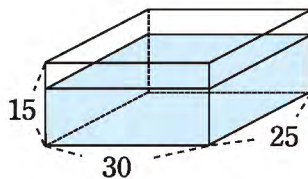
4

(A) 1. 如右圖，長方體內部長 30 公分、寬 25 公分、高 15 公分，把 9 公升的水倒入此容器裡，水深是幾公分呢？

(A) 12 (B) 13

(C) 14 (D) 15

$$1. 9000 = (30 \times 25) \times h, h = 12 \text{ (公分)}$$



(C) 2. 一個長 3 公尺、寬 2 公尺、高 1.2 公尺的長方體水塔，底部破了一個大洞且每分鐘漏出 24 公升的水。若水塔原本裝滿水，則幾分鐘後水會漏光呢？

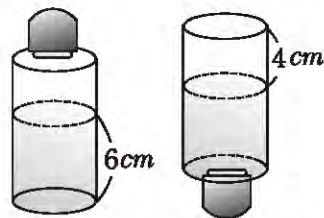
(A) 3 (B) 30

(C) 300 (D) 3000

$$2. 3 \times 2 \times 1.2 = 7.2 \text{ (公乘)} = 7200 \text{ (公升)}, \\ 7200 \div 24 = 300 \text{ (分鐘)}$$

3. 設底面積為 A , $60c.c. = 6 \times A$, $A = 10$,
 容積 $= A \times h = 10 \times 10 = 100 (c.c.)$

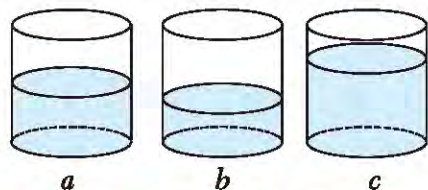
- (B) 3. 如右圖，有一圓柱形塑膠瓶子，裝了的 $60c.c.$ 的優酪乳，高度為 $6cm$ ，若將此瓶子倒立，瓶嘴部分不能裝優酪乳，此時優酪乳距離頂端 $4cm$ ，求此瓶子最多可裝優酪乳多少 $c.c.$ 呢？
 (A) 90 (B) 100 (C) 110 (D) 120



- (C) 4. 自來水廠有一個底面積 300 平方公尺、高 5 公尺的蓄水池，七月颱風來時降下豪雨，七月總雨量是 2000 毫米，請問：七月分此蓄水池儲存的水量總共可供應民眾幾度的水？(1 度的水 = 1 立方公尺的水)
 (A) 6 (B) 60 (C) 600 (D) 6000

4. 2000 毫米 = 200 公分 = 2 公尺，
 $300 \times 2 = 600 (m^3) = 600$ 度

- (D) 5. 將甲、乙、丙三種不同物體分別放入大小相同的 a 、 b 、 c 三容器中，水位高度一樣，再將物體拿出後，水位變成如右圖所示，下列何者為甲、乙、丙三物體體積的關係呢？
 (A) 甲 > 乙 > 丙 (B) 丙 > 甲 > 乙
 (C) 丙 > 乙 > 甲 (D) 乙 > 甲 > 丙



5. 物體體積與水位升高高度成正比，因為是先放入物體，再將水位調成一致後再拿起物體，故水位越低，則體積越大

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

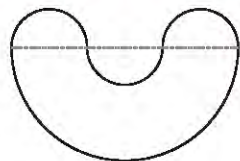
基本觀念題

- (C) 1. 一個四邊形不可能剛好有幾個直角？
 (A) 1 (B) 2
 (C) 3 (D) 4

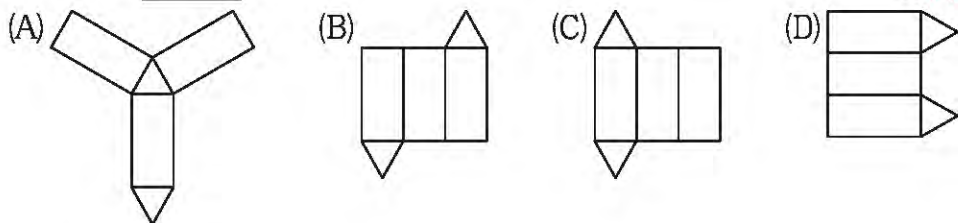
1. ∵ 四邊形內角和為 360° ，有三個直角時，第四個內角亦必為直角，故不可能剛好有 3 個直角

- (A) 2. 右圖是某組合玩具的造型，是由三個相同的半圓與一個大半圓所構成，若最大半圓的直徑是 12 公分，請問此圖案的面積為多少平方公分？
 (A) 20π (B) 22π
 (C) 23π (D) 24π

2. 面積 $= 18\pi - 2\pi + 4\pi = 20\pi$ (平方公分)



- (D) 3. 下列何者不可能是三角柱的展開圖？



3. (D) 兩個三角形不可在同一側

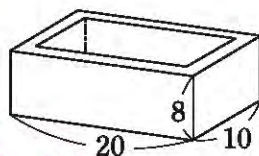
- (C) 4. 設長方體的體積為 48 立方公分，若其長、寬、高之比為 $1:2:3$ ，則此長方體的表面積為多少平方公分呢？
 (A) 80 (B) 84
 (C) 88 (D) 92

4. 設長為 r ，寬為 $2r$ ，高為 $3r$ ($r \neq 0$)
 $48 = 6r^3 \Rightarrow r = 2$
 表面積 $= (2 \times 4) \times 2 + (2 \times 6) \times 2 + (4 \times 6) \times 2$
 $= 16 + 24 + 48 = 88 (cm^2)$

- ※(B) 5. 如右圖，是放粉筆的盒子，其厚度皆為2公分，求此粉筆盒的體積為多少立方公分？

(A) 1216 (B) 1024
(C) 1020 (D) 1018

$$5. \text{體積} = (20 \times 8 \times 10) - [(20 - 2 \times 2) \times (10 - 2 \times 2) \times (8 - 2)] = 1600 - 576 = 1024 \text{ (立方公分)}$$

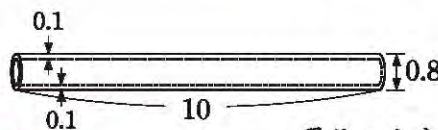


單位：公分

- ※(C) 6. 如右圖，是一支空心原子筆筆管，其體積為多少立方公分？

(A) 0.5π (B) 0.6π
(C) 0.7π (D) 0.8π

$$6. \text{體積} = [\pi(0.4)^2 \times 10] - [\pi(0.3)^2 \times 10] = (0.4^2 - 0.3^2) \times 10\pi = 0.7\pi \text{ (立方公分)}$$

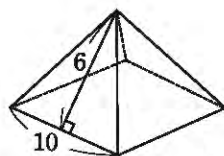


單位：公分

- (C) 7. 如右圖，有一個正四角錐，則其表面積為多少立方公分？

(A) 190
(B) 200
(C) 220
(D) 240

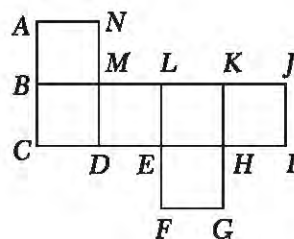
$$7. \text{表面積} = (10 \times 10) + 4(10 \times 6 \times \frac{1}{2}) = 100 + 120 = 220$$



單位：公分

- (C) 8. 右圖為一正方體之展開圖，若將此展開圖折回一正方體時，則 \overline{BC} 邊與何邊接合呢？

(A) \overline{ML}
(B) \overline{LK}
(C) \overline{JI}
(D) \overline{FG}



- (A) 9. 有一圓柱體的半徑增加 6 cm 時，其體積增加 y 立方公分；若高增加 6 cm 時，其體積亦增加 y 立方公分，已知原高為 2 cm，則原半徑為多少公分呢？

(A) 6 (B) 7
(C) 8 (D) 9

9. 設原半徑為 r cm

$$(r+6)^2 \times 2 = r^2 \times (2+6), r^2 + 12r + 36 = 4r^2, r^2 - 4r - 12 = 0, (r+2)(r-6) = 0, r = -2 \text{ 或 } 6 \text{ (負不合), 所以 } r = 6 \text{ (公分)}$$

- ※(B) 10. 施老師將 32.4 公升的酒精溶液倒入長、寬各為 30 cm、24 cm 的長方體容器中，酒精溶液的高度剛好比容器高度的 $\frac{2}{3}$ 多 5 cm，則此容器的高度為多少公分？

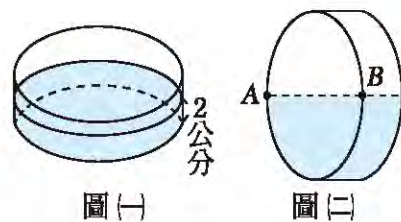
(A) 45 (B) 60
(C) 75 (D) 90

$$10. 32400 \div (30 \times 24) = 45, \text{ 設 } h \text{ 為容器的高度, } 45 = \frac{2}{3}h + 5, h = 60 \text{ (公分)}$$

- ※(D) 11. 如右圖(一)，在圓柱形容器內裝有 2 公分的水，若其底面圓形半徑 5 公分，柱高 4 公分，將容器豎立後，如右圖(二)，液面 \overline{AB} 寬多少公分呢？

(A) 2.5 (B) 5
(C) 7.5 (D) 10

11. 水的體積剛好是容器體積的一半



圖(一)

圖(二)

解題小幫手

第9題：

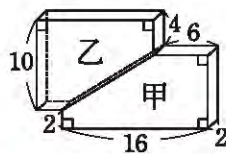
	半徑	高
體積增加 y	+ 6	
體積增加 y		+ 6

⇒ 條件不同，但體積皆相同增加 y 。

(A) 12. 如右圖，試求五角柱「甲」的體積為何？

- (A) 196 (B) 169
(C) 154 (D) 136

12. 甲體積 = (□ - ▽) × 高
 = [(16 × 8) - ($\frac{1}{2} \times 10 \times 6$)] × 2
 = (128 - 30) × 2 = 196 (立方單位)



(C) 13. 下列有關長方體的敘述，何者不正確？

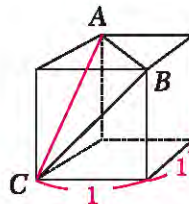
- (A) 相鄰的面互相垂直 (B) 相鄰的邊互相垂直
(C) 共同頂點的邊有 2 個 (D) 共同頂點的面有 2 個

13. (C) 共同頂點的邊有 3 個

(B) 14. 右圖為一個正方體，求 $\angle ABC = ?$

- (A) 45° (B) 60°
(C) 85° (D) 90°

14. $\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\therefore \triangle ABC$ 為正三角形



(D) 15. 下列何者不是柱體？

- (A) 魔術方塊 (B) 10 元硬幣
(C) 字典 (D) 甜甜圈

15. 甜甜圈非柱體

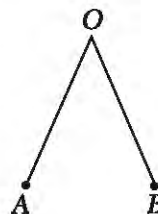
歷屆基礎題

(A) 1. 如右圖，將一根木棒的一端固定在 O 點，另一端綁一重物。小如將此重物拉到 A 點後放開，讓此重物由 A 點擺動至 B 點。若下列有一圖形為此重物移動的路徑，則此圖形應為何者？

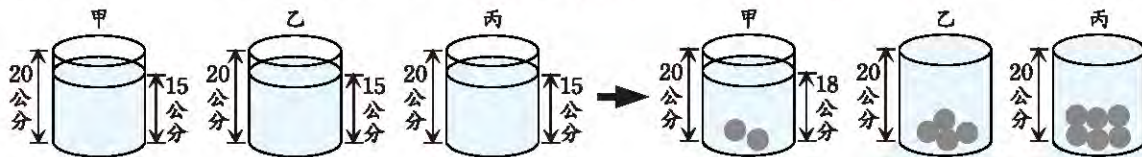
- (A) 弧 (B) 拋物線
(C) 傾斜直線 (D) 水平直線

1. \overline{OA} 為木棒 \Rightarrow 長度不變
 O 點為定點 \Rightarrow 重物與 O 點的距離恆固定，
 所以移動路徑為圓弧

98 基測二



※(D) 2. 如圖(一)，有甲、乙、丙三個大小相同的圓柱形杯子，杯深 20 公分，且各裝有 15 公分高的水。如圖(二)，將大小相同的彈珠丟入三個杯中(甲杯 2 顆，乙杯 4 顆，丙杯 6 顆)，結果甲的水位上升到 18 公分，乙、丙兩杯水滿溢出。求丙溢出的水量是乙溢出的幾倍？



圖(一)

圖(二)

- (A) 1.5 (B) 2
(C) 3 (D) 4

2. 由甲杯可知一顆彈珠可讓水位上升 $(18 - 15) \div 2 = 1.5$ 公分
 所以乙杯溢出 $4 \times 1.5 - (20 - 15) = 1$ 公分水位的水量
 丙杯溢出 $6 \times 1.5 - (20 - 15) = 4$ 公分水位的水量
 \Rightarrow 丙溢出的水量是乙溢出的 4 倍

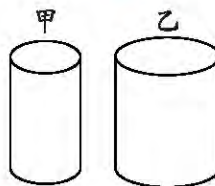
98 基測二

(C) 3. 如右圖，在水平桌面上有甲、乙兩個內部呈圓柱形的容器，內部底面積分別為 80cm^2 、 100cm^2 ，且甲容器裝滿水，乙容器是空的。若將甲中的水全部倒入乙中，則乙中的水位高度比原先甲的水位高度低了 8cm，求甲的容積為何？

- (A) 1280cm^3 (B) 2560cm^3
(C) 3200cm^3 (D) 4000cm^3

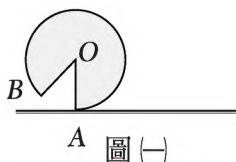
3. 甲設甲容器的高 = $x\text{cm}$
 $\therefore 80x = 100(x - 8)$, $20x = 800$, $x = 40$
 所求 = $80 \times 40 = 3200 (\text{cm}^3)$

98 基測一

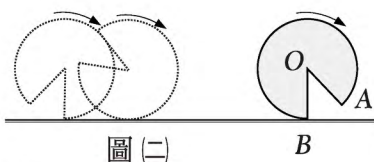


- (C) 4. 如圖(一)，水平地面上有一面積為 30π 平方公分的灰色扇形 OAB ，其中 \overline{OA} 的長度為 6 公分，且與地面垂直。若在沒有滑動的情況下，將圖(一)的扇形向右滾動至 \overline{OB} 垂直地面為止，如圖(二)所示，則 O 點移動多少公分？

96 基測一



圖(一)



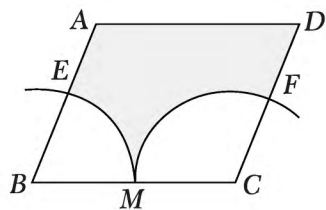
圖(二)

$$4. \therefore \text{共轉了 } \frac{30\pi}{\pi \times 6^2} \times 360^\circ = 300^\circ$$

$$\therefore O \text{ 點移動了 } 2 \times \pi \times 6 \times \frac{300^\circ}{360^\circ} = 10\pi \text{ (公分)}$$

- (A) 20 (B) 24 (C) 10π (D) 30π

- (B) 5. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BC} = 12$ ， M 為 \overline{BC} 中點， M 到 \overline{AD} 的距離為 8。若分別以 B 、 C 為圓心， \overline{BM} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 、 \overline{CD} 於 E 、 F 兩點，則圖中灰色區域面積為何？



- (A) $96 - 12\pi$
 (B) $96 - 18\pi$
 (C) $96 - 24\pi$
 (D) $96 - 27\pi$

$$5. \therefore \overline{BC} = 12, M \text{ 到 } \overline{AD} \text{ 的距離為 } 8$$

$$\therefore \text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積} = 12 \times 8 = 96$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$$

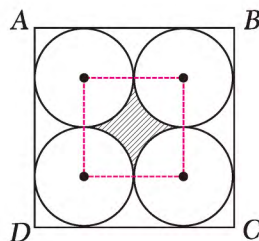
$$\therefore \text{扇形 } EBM \text{ 面積} + \text{扇形 } FCM \text{ 面積} = \text{半徑為 } 6 \text{ 的半圓面積} = \pi \times 6^2 \times \frac{1}{2} = 18\pi$$

$$\text{灰色區域面積} = 96 - 18\pi$$

96 基測一



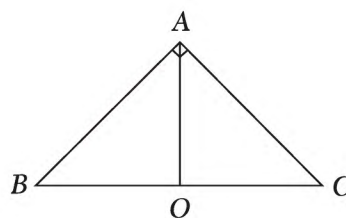
- (B) 1. 如右圖， $ABCD$ 為邊長 4 的正方形，內切四個互切的全等圓，則斜線部分面積為多少平方公分呢？



- (A) $4 + \pi$
 (B) $4 - \pi$
 (C) $2\pi + 4$
 (D) $2\pi - 4$

$$1. \text{ 如圖，斜線面積} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{4}\right)^2 \pi = 4 - \pi$$

- (D) 2. 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ， \overline{OA} 為 $\triangle ABC$ 的高，若 $\overline{OA} = 8$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為何？



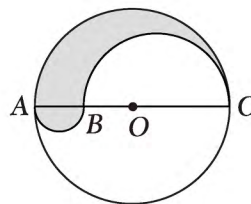
- (A) 23 (B) 32 (C) 46 (D) 64

$$2. \therefore \angle B = \angle BAO = \angle CAO = \angle C = 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 2 \times 8 = 16,$$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = 16 \times 8 \times \frac{1}{2} = 64 \text{ (平方單位)}$$

- # (B) 3. 如右圖， O 為大圓之圓心， $\overline{OA} = 6$ ， $\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ ，求灰色色塊周長為何？



- (A) 6π (B) 12π
 (C) 18π (D) 24π

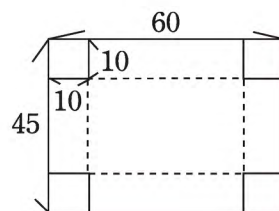
$$3. \text{ 灰色色塊周長}$$

$$= \widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{AB}$$

$$= \left(12\pi \times \frac{1}{2}\right) + \left(9\pi \times \frac{1}{2}\right) + \left(3\pi \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= 12\pi$$

- (A) 4. 將長 60 cm、寬 45 cm 的鋁片，四個角落都減掉一邊長 10 cm 的正方形，然後沿虛線摺起成一長方體容器，此容器的容積是多少公升呢？



- (A) 10 (B) 100
 (C) 1000 (D) 10000

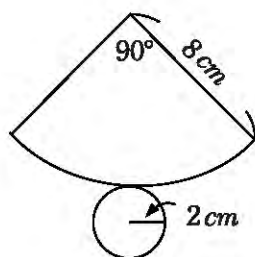
$$4. (60 - 10 \times 2) \times (45 - 10 \times 2) \times 10$$

$$= 10000 \text{ (cm}^3\text{)} = 10 \text{ (公升)}$$

(C) 5. 右圖是圓錐的展開圖，扇形的半徑為 8 公分，圓心角為 90° ，求這個圓錐的表面積為多少平方公分？

- (A) 12π
- (B) 16π
- (C) 20π
- (D) 22π

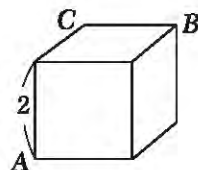
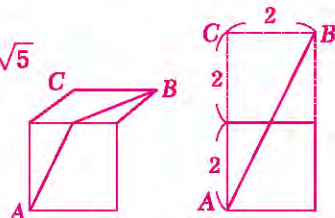
5. 圓錐表面積 = 扇形面積 + 底圓面積
 $= \frac{1}{4}(\pi \times 8^2) + \pi \times 2^2$
 $= 16\pi + 4\pi = 20\pi (\text{cm}^2)$



(B) 6. 如右圖，邊長為 2 的正方體，如果在正方體表面移動，從 A 走到 B，請問：最短的距離為何？

- (A) $\sqrt{5}$
- (B) $2\sqrt{5}$
- (C) $3\sqrt{5}$
- (D) $4\sqrt{5}$

6. $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



※ (C) 7. 長 40 公尺、寬 20 公尺的游泳池，若每分鐘注水 2000 公升，則需幾個小時才能使水深增加 60 公分？

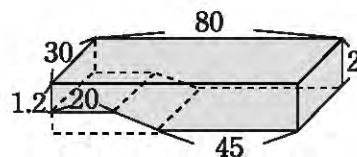
- (A) 3 小時 50 分鐘
- (B) 3 小時 55 分鐘
- (C) 4 小時
- (D) 4 小時 5 分鐘

7. $\because 60 \text{ 公分} = 0.6 \text{ 公尺}$ ，總需水量 = $40 \times 20 \times 0.6 = 480 \text{ m}^3$ ，
 又 2000 公升水的體積 = 2 m^3 。 \therefore 共需注水 $480 \div 2 = 240$ 分鐘 = 4 小時

※ (B) 8. 遊樂區興建一座游泳池，內部的長、寬各為 80 公尺、30 公尺，兒童戲水區水深 1.2 公尺，長度為 20 公尺，成人游泳區水深 2 公尺，長度為 45 公尺，兩區之間以斜坡銜接，則游泳池的容積為多少立方公尺？

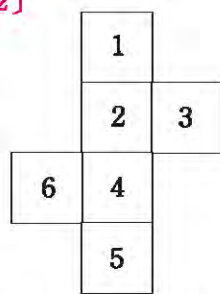
- (A) 4040
- (B) 4140
- (C) 4240
- (D) 4340

8. 由游泳池的側邊看去可將其視為一六角柱，
 游泳池側邊的面積 = $80 \times 2 - [(20 + 35) \times (2 - 1.2) \div 2]$
 $= 160 - 22 = 138 (\text{立方公尺})$
 游泳池容積 = $138 \times 30 = 4140 (\text{立方公尺})$



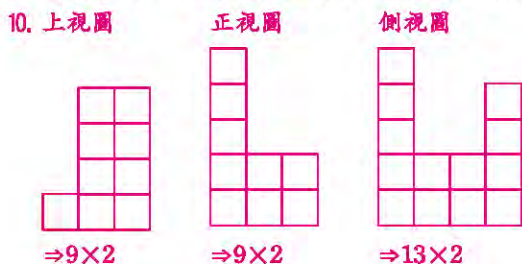
(C) 9. 有一個正立方體盒子，在各面上分別以 1~6 的數字標示，其展開圖如右圖，請問：下面哪一個才是正確的正立方體盒子？

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

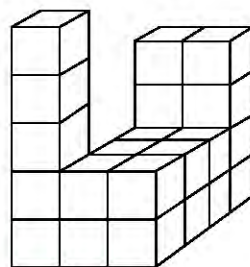


(B) 10. 如右圖，共若干個正立方體積木所堆成，若小積木每邊長 1 公分，請問：圖形的「全部表面積」為多少平方公分？

- (A) 50
- (B) 62
- (C) 70
- (D) 72



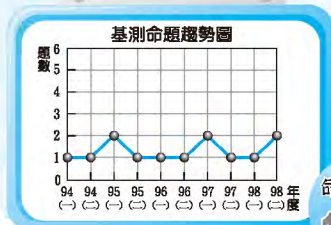
故全部表面積 = $18 + 18 + 26 = 62$



解題小幫手

第 6 題：求 \overline{AB} 最短距離，要將此正方體視為平面。

第 10 題：全部表面積 = $2 \times (\text{正視圖面積} + \text{上視圖面積} + \text{側視圖面積})$ 。



命題率 100%

能力一

尺規作圖與垂直、平分性質

一 尺規作圖

運用直尺（沒有刻度）、圓規繪製幾何圖形稱為尺規作圖。

尺規作圖的七大方法

等線段作圖	等角作圖	中垂線作圖	角平分線作圖	直線上一點作垂線	直線外一點作垂線	直線外一點作平行線
-------	------	-------	--------	----------	----------	-----------

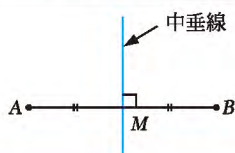
二 垂直

兩條直線或線段相交，其所成的夾角為直角（ 90° ）時，則稱這兩條直線或線段互相垂直，而其交點稱為「垂足」。

三 平分

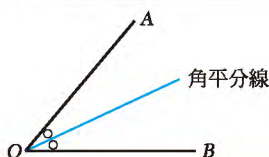
垂直平分線（中垂線）

在平面上，過一線段的中點，且垂直於這一線段的直線，稱做這個線段的中垂線。若要將一線段 2^n 等分，線段中點作圖需作 $(2^n - 1)$ 次。



角平分線

將一角平分為兩等角的直線，稱為角平分線或分角線。將一角分為 2^n 等分，需作角平分線 $(2^n - 1)$ 次。



老師傳授

等線段作圖 / 等角作圖

學生習作

已知：兩線段 a 、 b （如圖）

求作：作一線段，使其長等於 $a - b$

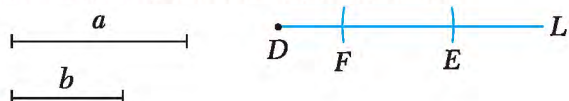
作法：(a) 以 D 為圓心， a 為半徑向右畫弧，交 L 於 E 點。

(b) 畫一直線 L ，並在 L 上任意取一點 D 點。

(c) 以 E 為圓心， b 為半徑向左畫弧，交 L 於 F 點。

(d) 則 DF 即為所求。

請將上面作法按照作圖順序排列出來。



解

(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)

如圖，請利用等角作圖方式，在 \overline{BC} 上找一點 P ，使得 $\angle PAB = \angle PBA$ 。

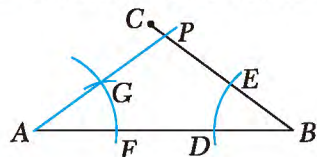
作法：(a) 連接 \overline{AG} 並延長，交 \overline{BC} 於 P 點，則 $\angle PAB = \angle PBA$ 。

(b) 以 A 點為圓心， \overline{BD} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 F 點。

(c) 以 F 為圓心， \overline{DE} 為半徑畫弧，交前弧於 G 點。

(d) 以 B 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\angle B$ 的兩邊於 D 、 E 兩點。

請將作法按照作圖順序排列出來。



解

(d) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)

2 老師 傳授

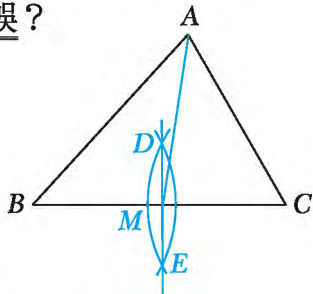
中垂線作圖 / 角平分線作圖

學生 習作 2

如圖，已知 $\triangle ABC$ ，請在 \overline{BC} 上找一點 M ，使得 $\triangle ABM$ 與 $\triangle ACM$ 的面積相等。

- 作法：(a) 分別以 B 、 C 兩點為圓心。
 (b) 適當長為半徑畫弧。
 (c) 此兩弧交於 D 、 E 兩點。
 (d) 連接 \overline{DE} 交 \overline{BC} 於 M ，即為所求。

上述作法哪一個步驟有誤？



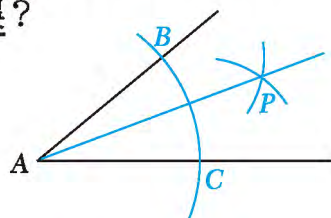
解

(b) 有誤，應為「以大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 長為半徑畫弧。」

如圖，已知 $\angle A$ ，求作 $\angle A$ 的角平分線。

- 作法：(a) 以 A 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 為半徑畫弧，交 $\angle A$ 的兩邊於 B 、 C 兩點。
 (b) 分別以 B 、 C 為圓心，適當長為半徑畫弧，兩弧交於 P 點。
 (c) 連接 P 、 A 兩點， \overline{PA} 即為所求。

上述作法哪些步驟有誤？



解

- (a) 有誤，應以 A 為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\angle A$ 的兩邊於 B 、 C 兩點
 (b) 有誤，應分別以 B 、 C 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 為半徑畫弧，兩弧交於 P 點

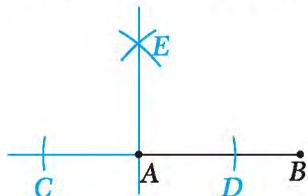
3 老師 傳授

過直線上一點作垂線 / 過直線外一點作垂線

學生 習作 3

如圖，已知 \overline{AB} ，求作過 A 點且垂直於 \overline{AB} 之垂線。

- (a) 向 _____ 側延長 \overline{AB} 。
 (b) 以 _____ 點為圓心，_____ 長為半徑畫弧，交直線於 _____、_____ 兩點。
 (c) 分別以 C 、 D 為圓心，以 _____ 的長為半徑畫弧，兩弧交於 _____ 點。
 (d) 連接 _____、_____ 兩點，則 \overline{EA} 即為所求。

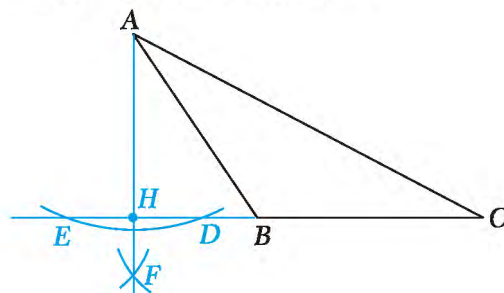


解

- (a) 左
 (b) A 、適當、 C 、 D
 (c) 大於 $\frac{1}{2}\overline{CD}$ 、 E
 (d) E 、 A

如圖，求作 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的高。

- (a) 向左側延長 _____。
 (b) 以 A 為圓心，_____ A 到 \overline{BC} 延長線的垂直距離為半徑畫弧，交於 _____、_____ 兩點。
 (c) 分別以 D 、 E 兩點為圓心，大於 _____ 的長為半徑畫弧，兩弧交於 _____ 點。
 (d) 連接 _____、_____ 兩點，且交於 \overline{BC} 延長線於 _____ 點，則 \overline{AH} 即為所求。



解

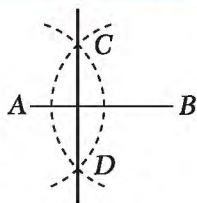
- (a) \overline{BC}
 (b) 大於、 D 、 E
 (c) $\frac{1}{2}\overline{DE}$ 、 F
 (d) A 、 F 、 H

4 老師 傳授

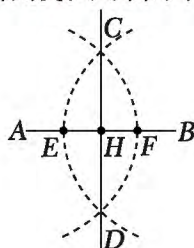
垂直與平分

學生 習作 4

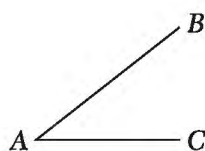
- 如圖，以 A 點為圓心， a 為半徑畫一弧，然後，以 B 點為圓心， b 為半徑畫一弧（設 $a \neq b$ ），若此弧交於 C 、 D 二點，請問： \overline{CD} 與 \overline{AB} 的關係為何？
- 若將已知線段分成兩段，且比例為 $1:31$ ，請問：最少要做幾次（條）中垂線？



- 下圖(一)是利用尺規作圖繪製 \overline{AB} 之中垂線，請問：哪些線段的長度等於 \overline{AC} 呢？
- 下圖(二) $\angle CAB$ ，若要將其平分為八等分，至少要做幾次（條）角平分線呢？



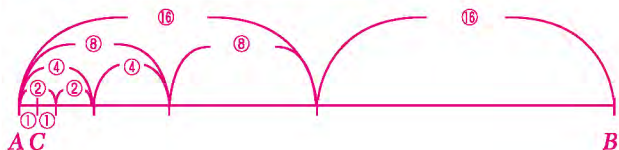
圖(一)



圖(二)

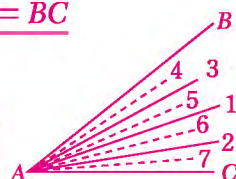
解

- \because 半徑 $a \neq b \therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$ 但 \overline{CD} 不平分 \overline{AB}
- $\because \overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 31$
 $\therefore (1 + 31) = 32 = 2^5$
 需最少做 **5 次（條）中垂線**



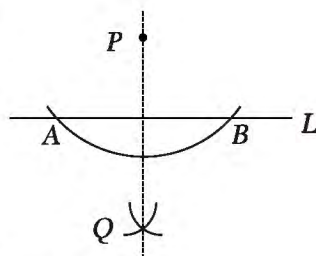
解

- $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AF} = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{BC}$
- 8 等分 $= 2^3$ 等分
 \Rightarrow 作 $2^3 - 1 = 7$ 次角平分線



Let's Go! 同步 評量 1

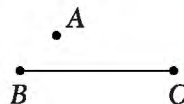
- (D) 1. 如右圖，以尺規作圖， P 點為直線 L 外的一點，若要畫一直線通過 P 點，且與 L 垂直，以下是作圖的步驟，請依照順序排列出來。



- 甲：作 \overrightarrow{PQ} ，即為所求的直線。
 乙：以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 L 於 A 、 B 兩點。
 丙：分別以 A 、 B 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 為半徑畫弧，兩弧交於 Q 點。

- (A) 乙 \rightarrow 甲 \rightarrow 丙 (B) 甲 \rightarrow 乙 \rightarrow 丙 (C) 丙 \rightarrow 乙 \rightarrow 甲 (D) 乙 \rightarrow 丙 \rightarrow 甲

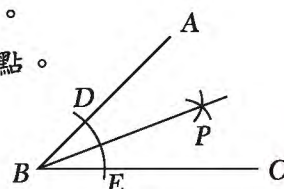
- (A) 2. 如右圖，已知一點 A 及一線段 \overline{BC} ，請在 \overline{BC} 上找出一點 D ，使得 $\overline{BD} = \overline{AB}$ ，則下列作圖何者正確呢？



- (A) (B) (C) (D)

- (C) 3. 如右圖，已知 $\angle ABC$ ，要作其角平分線，其步驟如下所示：

- 甲：以 B 點為圓心，以 x 為半徑畫弧，交 \overline{BA} 、 \overline{BC} 於 D 、 E 兩點。
 乙：分別以 D 、 E 兩點為圓心，以 y 為半徑畫弧，設兩弧交於 P 點。
 丙：連接 \overrightarrow{BP} ，則 \overrightarrow{BP} 即為所求。



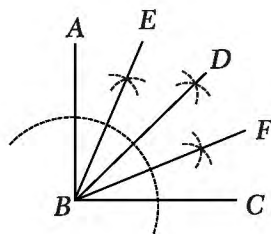
下列有關 x 、 y 的敘述何者正確？

- (A) x 、 y 均有最短的限制 (B) x 、 y 均無長度限制
 (C) x 無長度限制、 y 需有最短的限制 (D) x 需有最短的限制、 y 無長度限制

(B) 4. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，求 $\angle EBF = ?$

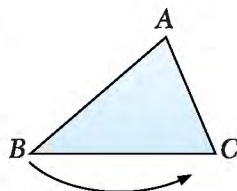
- (A) 35°
- (B) 45°
- (C) 55°
- (D) 65°

$$4. \angle EBF = \frac{1}{2} (\angle CBD + \angle ABD) = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$



(B) 5. 如右圖，求 $\triangle ABC$ 中，將 B 點摺疊到 C 點，再展開，而得到一條摺線 L ，請問： L 是下列何者呢？

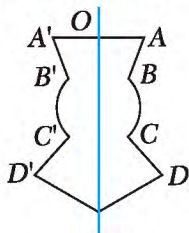
- (A) \overline{BC} 的高
- (B) \overline{BC} 的中垂線
- (C) $\angle BAC$ 的角平分線
- (D) \overline{BC} 的中線



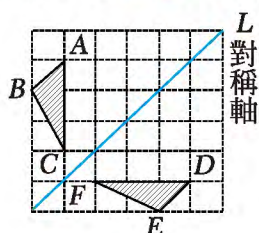
能力 二 線對稱與點對稱圖形

一 線對稱圖形與點對稱圖形

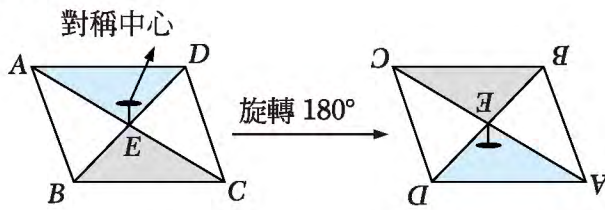
1. 如果一個圖形沿著某一條直線對摺後，摺線兩邊的圖形會完全疊合在一起，我們就稱這個圖形為**線對稱圖形**，而摺線就是**對稱軸**（如下圖一）。
2. 當兩個圖形對於一條直線成對稱時，可稱其中一個圖形是另一個圖形相對於此直線的**鏡射圖形**，而此直線正是這兩個鏡射圖形的**對稱軸**（如下圖二）。
3. 在平面上，如果一個圖形能找到一點為中心，繞此點旋轉 180° 後能和原圖形完全重合，那麼就稱它為**點對稱圖形**，旋轉中心點稱做**對稱中心**（如下圖三）。
4. 點對稱圖形中，對稱中心平分兩對稱點的連線段。



(圖一)



(圖二)



(圖三)

二 線對稱與點對稱圖形的簡易判別

1. 凡是**正 n 邊形**皆為**線對稱圖形**。
2. 凡是**平行四邊形**（包括正方形、矩形及菱形等）皆為**點對稱圖形**。
3. 正 n 邊形中，若 n 為偶數則為**點對稱圖形**；若 n 為奇數則非**點對稱圖形**。

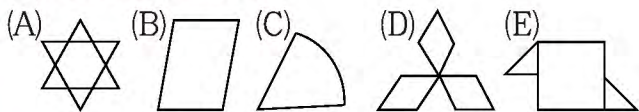
5 老師 傳授

對稱圖形

學生 實作

5

下列的圖形中，哪些是線對稱的圖形呢？哪些是點對稱的圖形呢？



解

線對稱圖形：(A)、(C)、(D)

點對稱圖形：(A)、(B)

請選出下列圖形中同時具有線對稱性質與點對稱性質的圖形？

① A ② N ③ F ④ H ⑤ S ⑥ E

解

線對稱圖形：①、④、⑥

點對稱圖形：②、④、⑤

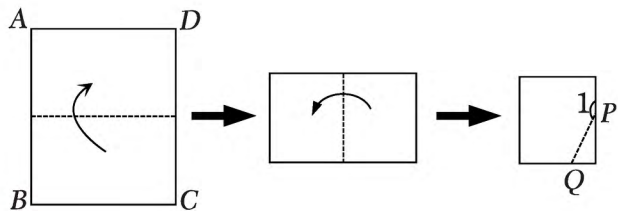
同時具有兩項性質的是④

6 老師 傳授

圖形的摺疊與角度

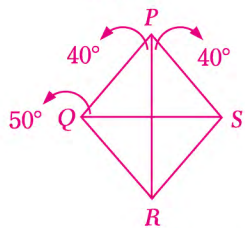
學生 實作 6

秀蓮要在矩形 $ABCD$ 內部正中央剪出一個一內角為 80° 的菱形，她將 $ABCD$ 先上下對摺，再左右對摺，如下圖所示，然後在右下角沿著 \overline{PQ} 剪下，則 $\angle 1$ 可為多少度？

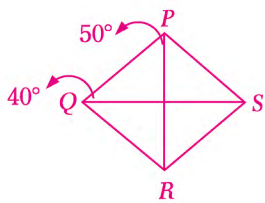


解

(1) $\angle 1 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$



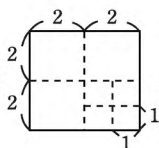
(2) $\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$



$\therefore \angle 1$ 可為 140° 或 130°

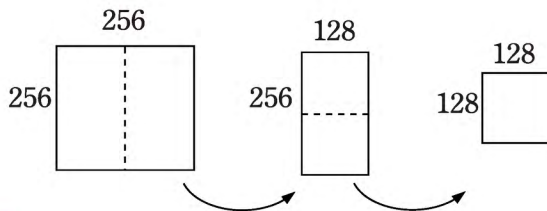
解題小偏方

學生 6：由題幹得知規律



$\Rightarrow 4 \times 4 = 2^2 \times 2^2 \Rightarrow 2 + 2 = 4$ (次)。

假設有一張長 4 公分、寬 4 公分的紙，對摺一次後變成長 4 公分、寬 2 公分，對摺兩次後變成長 2 公分、寬 2 公分，對摺三次後變成長 2 公分、寬 1 公分，對摺四次後變成長 1 公分、寬 1 公分。若有一張紙長 256 公分、寬 256 公分，請問：此張紙要對摺幾次才會變成長 1 公分、寬 1 公分的正方形呢？



解

$\because 256 = 2^8 \Rightarrow 256 \times 256 = 2^8 \times 2^8$

$\therefore 8 + 8 = 16$ (次)

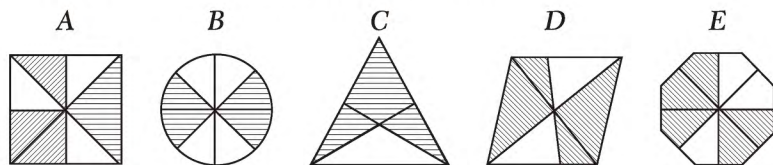
Let's Go! 同步 評量 2

(D) 1. 下列何者為點對稱圖形？

- (A) 正三角形 (B) 等腰直角三角形 (C) 梯形 (D) 平行四邊形

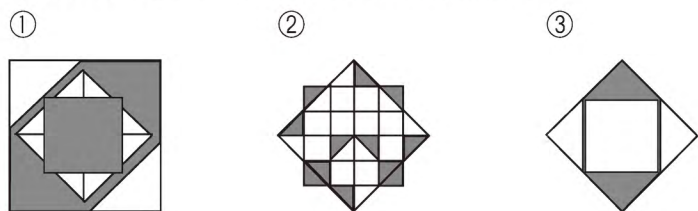
1. 具有對稱點之圖形，稱為點對稱圖形，故凡是平行四邊形皆為點對稱圖形

(B) 2. 下面的圖形何者是線對稱圖形呢？



- (A) A、B (B) B、C (C) C、D (D) D、E

(D) 3. 下面的圖形中，各有幾條線對稱軸呢？

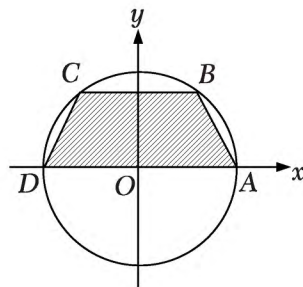


- (A) (4, 1, 2) (B) (2, 1, 4) (C) (4, 2, 0) (D) (2, 0, 2)

(C) 4. 如右圖，梯形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，若 A 點坐標為 $(5, 0)$ ， C 點坐標為 $(-3, 4)$ ，請問： $\overline{BC} = ?$

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

4. $\because \overline{BC} \parallel x$ 軸，且 y 軸為 \overline{BC} 、 \overline{AD} 中垂線，
 $\therefore B$ 點坐標 $(3, 4)$ ，則 $\overline{BC} = |-3 - 3| = 6$



(A) 5. 下列是四個等腰三角形的頂角，哪一種等腰三角形無法用旋轉方式來拼出正多邊形呢？

- (A) 35° (B) 40° (C) 60° (D) 90°

5. 只有 35° 無法整除 360°

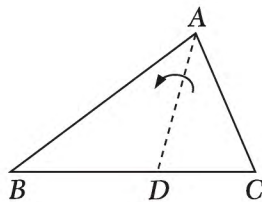
實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(C) 1. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，摺疊使 \overline{AC} 、 \overline{AB} 在同一直線上，再展開，得到一條摺痕 \overline{AD} ，則 \overline{AD} 為何？

- (A) \overline{BC} 的高 (B) \overline{BC} 的中垂線
- (C) $\angle A$ 的角平分線 (D) $\angle A$ 的對角線



(C) 2. 下列何者是線對稱圖形？

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

(D) 3. 下列何者不是線對稱圖形？

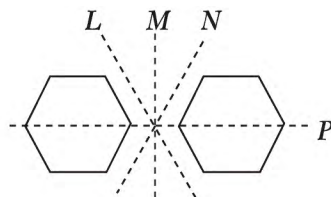
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

(C) 4. 下列何者的對稱軸有 16 條？

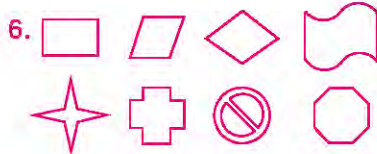
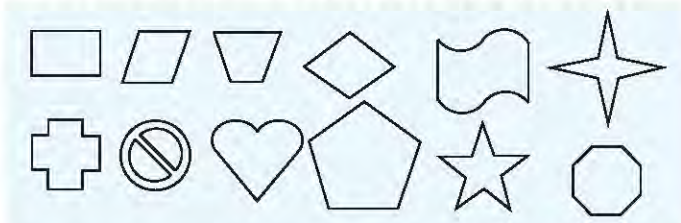
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

(D) 5. 如右圖，兩個正六邊形互為鏡射圖形，則其對稱軸是圖中哪一條虛線呢？

- (A) P (B) L
- (C) N (D) M



(B) 6. 下列 12 個圖形中，點對稱的圖形有幾個呢？



- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

(D) 7. 有一個線對稱圖形， A 、 B 兩點是對稱點， C 、 D 兩點也是對稱點。

甲說： \overline{AB} 平行於 \overline{CD}

乙說： \overline{AB} 垂直於對稱軸

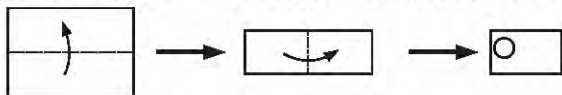
丙說： \overline{AC} 和 \overline{BD} 的長度相等

丁說：對稱軸會經過 \overline{AB} 的中點，也會經過 \overline{CD} 的中點

請問：誰的說法是正確的？

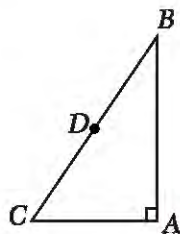
- (A) 只有甲、乙的說法正確 (B) 只有甲、丁的說法正確
(C) 只有甲的說法正確 (D) 四個人的說法都正確

(B) 8. 如下圖，一張長方形的紙，由下往上對折，再由左往右對折，最後於左上角剪了一個小洞，請問：何圖為這張紙展開的樣子？



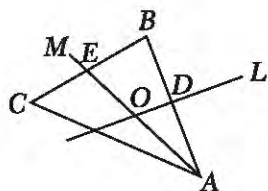
- (A) (B) (C) (D)

(A) 9. 如右圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形，已知： $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， D 點為 \overline{BC} 的中點。求作：在 \overline{AB} 上取一點 E ，使得 $\overline{DE} \parallel \overline{CA}$ 。則下列的做法何者是正確的呢？



- (A) 取 \overline{AB} 中點 E ，連接 \overline{DE}
(B) 以 B 點為圓心， \overline{BD} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 E 點，連接 \overline{DE}
(C) 作 $\angle C$ 之角平分線交 \overline{AB} 於 E 點，連接 \overline{DE}
(D) 過 D 點作一直線垂直 \overline{BC} ，交 \overline{AB} 於 E 點，連接 \overline{DE}

(B) 10. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，直線 L 為 \overline{AB} 的中垂線，直線 M 為 $\angle BAC$ 的平分線，兩直線相交於 O 點，則下列敘述何者正確？



- (A) $\overline{OA} = \overline{OC}$
(B) $\overline{OA} = \overline{OB}$
(C) $\overline{OB} = \overline{OC}$
(D) $\overline{OD} = \overline{OE}$

10. $\because L$ 為 \overline{AB} 的中垂線，
 $\therefore \overline{OA} = \overline{OB}$

解題小備方 第 10 題： L 為 \overline{AB} 中垂線 $\Rightarrow \overline{BD} = \overline{DA}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OA}$ ， M 為 $\angle BAC$ 角平分線 $\Rightarrow M$ 線上任一點到兩邊垂直距離相同。

(D) 11. 下列哪一種四邊形有四條對稱軸？

- (A) 菱形 (B) 箏形 (C) 長方形 (D) 正方形

11. 正方形有四條對稱軸

(B) 12. 下列敘述何者正確？

- (A) 只有鈍角才有角平分線 (B) 一條線段有很多垂線
(C) 一條線段有 2 條中垂線 (D) 過直線外一點，不只有一直線垂直於此直線

12. (B) 正確，一條線段有無限多條垂線

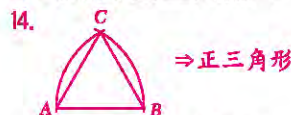
(A) 13. 已知 $\overline{AB} = 10$ ，要做 \overline{AB} 中垂線時，分別以 A、B 為圓心畫弧，試問下列哪一個不能為其半徑呢？

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

13. 所取半徑長必須大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$

(D) 14. 在 \overline{AB} 上分別以 A、B 為圓心， \overline{AB} 為半徑化兩弧交於 C 點，則 $\triangle ABC$ 為何種三角形？

- (A) 鈍角三角形 (B) 等腰直角三角形
(C) 直角三角形 (D) 正三角形



(C) 15. 已知 C 為 \overline{AB} 的中點，D 為 \overline{AC} 的中點，E 為 \overline{CD} 的中點，F 為 \overline{BC} 的中點，則 $\overline{EF} : \overline{AB} = ?$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{4}{9}$

$$\begin{aligned} 15. \overline{EC} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{1}{8}\overline{AB}, \\ \overline{EF} &= \frac{1}{8}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{3}{8}\overline{AB} \\ \Rightarrow \overline{EF} : \overline{AB} &= 3 : 8 \end{aligned}$$



歷屆基礎題

(A) 1. 若下列有一圖形為線對稱圖形，則此圖形為何者？



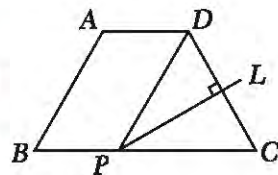
88 基測二

1. (A) 選項的圖形沿著某一條直線對折後，直線兩側的部分能完全重疊

(B) 2. 如右圖，等腰梯形 ABCD 中， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 7$ ， $\overline{BC} = 13$ ，且 \overline{CD} 之中垂線 L 交 \overline{BC} 於 P 點，連接 \overline{PD} 。求四邊形 ABPD 的周長為何？

- (A) 24
(B) 25
(C) 26
(D) 27

88 基測一



$$\begin{aligned} 2. \because L \text{ 為 } \overline{CD} \text{ 的中垂線, } \overline{PD} &= \overline{PC} \\ \therefore \text{周長} &= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PD} + \overline{AD} = 7 + (\overline{BP} + \overline{PC}) + 5 \\ &= 12 + \overline{BC} = 12 + 13 = 25 \end{aligned}$$

(C) 3. 如右圖， $\angle A$ 的兩邊分別與圓相切於 B、C 兩點。以下是甲、乙兩人找出圓心的作法：

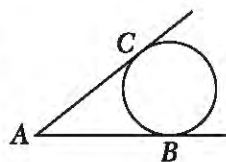
甲：(1) 過 B 點作一直線 L 垂直直線 AB。
(2) 連接 \overline{BC} ，作 \overline{BC} 中垂線交 L 於 O 點，O 點即為所求。

乙：(1) 作 $\angle A$ 的平分線 L。

(2) 以 A 為圓心， \overline{AB} 長為半徑畫弧交 L 於 O 點，O 點即為所求。

對於兩人的做法，下列哪一個判斷是正確的？

- (A) 兩人都正確 (B) 兩人都錯誤
(C) 甲正確，乙錯誤 (D) 甲錯誤，乙正確



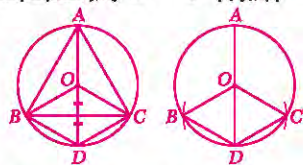
3. \because 過切點垂直切線的直線和弦的中垂線皆會通過圓心
 \therefore 甲是對的！
 $\because \overline{OA} > \overline{AB}$ ($\triangle OAB$ 為直角 \triangle)
 \therefore 乙是錯的！

87 基測二

(A) 4. 如右圖， \overline{AD} 為圓 O 的直徑。甲、乙兩人想在圓上找 B 、 C 兩點，作一個正三角形 ABC ，其作法如下：

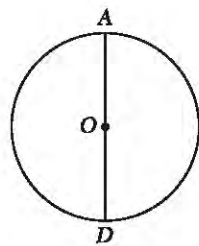
甲：(1) 作 \overline{OD} 中垂線，交圓於 B 、 C 兩點

(2) 連 \overline{AB} 、 \overline{AC} ， $\triangle ABC$ 即為所求。



乙：(1) 以 D 為圓心， \overline{OD} 長為半徑畫弧，交圓於 B 、 C 兩點

(2) 連 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} ， $\triangle ABC$ 即為所求。



對於甲、乙兩人的作法，下列判斷何者正確？

(A) 甲、乙皆正確

(B) 甲、乙皆錯誤

(C) 甲正確、乙錯誤

(D) 甲錯誤、乙正確

4. 甲：(1) $\because \overline{BC}$ 為 \overline{OD} 之中垂線， $\therefore \overline{BO} = \overline{BD}$ ， $\overline{CO} = \overline{CD}$ ，
又 $\overline{OB} = \overline{OC}$ (半徑相等) $= \overline{OD}$ $\therefore \triangle OBD$ 、 $\triangle OCD$ 皆為正三角形
(2) $\therefore \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ \dots ①$ ，又 \overline{AD} 為 \overline{BC} 之中垂線，
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AC} \dots ②$ ，由 ①、② $\Rightarrow \triangle ABC$ 為正三角形
乙：(1) \because 以 D 為圓心， \overline{OD} 為半徑畫弧交圓於 B 、 C ， $\therefore \overline{BD} = \overline{DO} = \overline{DC}$
又 $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ (半徑相等)， $\therefore \triangle OBD$ 、 $\triangle OCD$ 皆為正三角形
(2) $\therefore \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ \dots ①$ ，又 \overline{AD} 為 \overline{BC} 之中垂線，
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AC} \dots ②$ ，由 ①、② $\Rightarrow \triangle ABC$ 為正三角形

37 基測一



(A) 1. 下列對稱圖形中，對稱軸最少的圖形是下列何者？

(A) 長方形 (B) 正五邊形 (C) 正三角形 (D) 正方形

(D) 2. 在同一平面上，一角的兩邊分別平行於另一角之兩邊，則此兩角角度的關係為下列何者呢？

(A) 相等 (B) 互補或互餘 (C) 相等或互餘 (D) 相等或互補

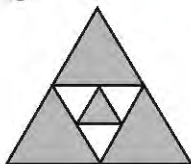
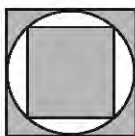
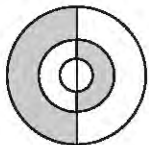
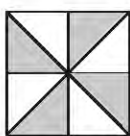
(A) 3. 如下圖，請問：線對稱圖形的個數與點對稱圖形的個數的差為多少呢？

①

②

③

④



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 線對稱圖形：②、③、④
點對稱圖形：①、③
共 $3 - 2 = 1$ (個)

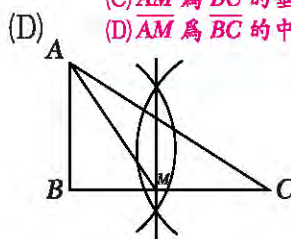
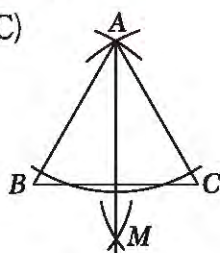
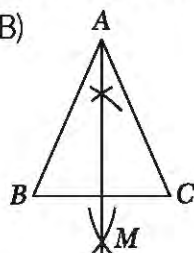
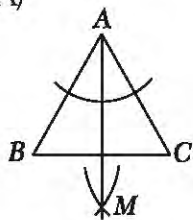
(A) 4. 下列哪一個是 $\triangle ABC$ 角平分線的作圖痕跡？

(A)

(B)

(C)

(D)



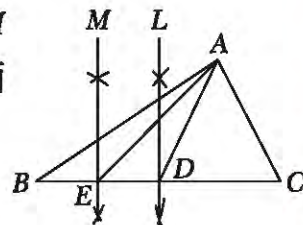
4. (A) \overline{AM} 為 $\angle A$ 的角平分線
(B) \overline{AM} 為 \overline{BC} 的中線
(C) \overline{AM} 為 \overline{BC} 的垂線
(D) \overline{AM} 為 \overline{BC} 的中線

(C) 5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 L 為 \overline{BC} 之垂直平分線交 \overline{BC} 於 D ， M 為 \overline{BD} 之垂直平分線交 \overline{BD} 於 E 點，則 $\triangle ABE$ 面積： $\triangle ACD$ 面積之比為何？

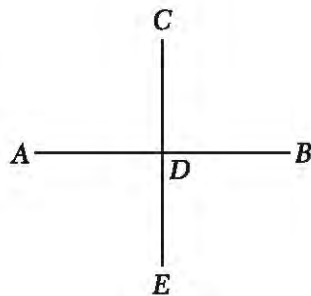
(A) 1 : 4 (B) 1 : 3

(C) 1 : 2 (D) 1 : 1

5. 令 $\overline{BE} = k$ ，則 $\overline{BE} = \overline{ED} = k$ ，且 $\overline{CD} = 2k$
 $\triangle ABE$ 面積： $\triangle ACD$ 面積 $= k : 2k = 1 : 2$



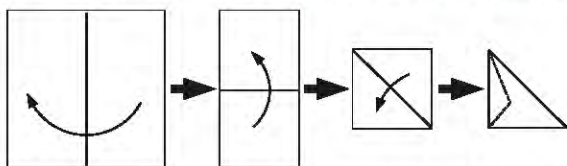
(D) 6. 如右圖，已知直線 CE 為 \overline{AB} 的中垂線，且交 \overline{AB} 於 D 點，則下列敘述有幾個是正確的呢？



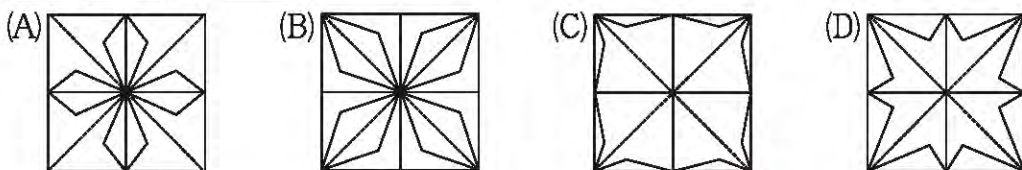
- (甲) 以 A 點為圓心， \overline{AB} 為半徑畫圓，則圓必通過 C 點
 - (乙) 以 B 點為圓心， \overline{AC} 為半徑畫圓，則圓必通過 C 點
 - (丙) 以 C 點為圓心， \overline{BC} 為半徑畫圓，則圓必通過 A 點
 - (丁) 以 D 點為圓心， \overline{AD} 為半徑畫圓，則圓必通過 B 點
- (A) 甲、乙 (B) 乙、丙
(C) 甲、丙、丁 (D) 乙、丙、丁

6. 除了(甲)敘述不一定之外，其餘皆正確

(D) 7. 將一張正方形色紙依照下列步驟對摺後，再沿虛線剪下，下列何者是其展開圖形呢？

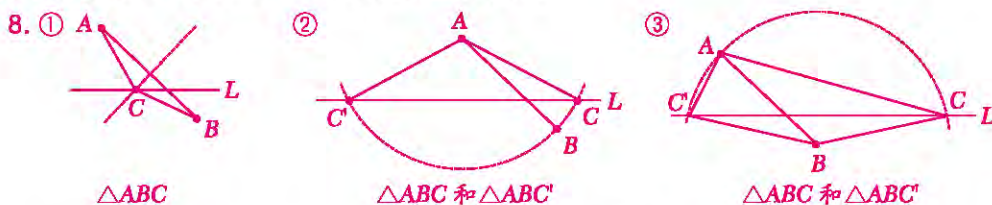


7. (A)(B)不符合對稱、(C)角度相反，僅有(D)最適當



(C) 8. 如右圖， A 、 B 在直線 L 的兩側，且 \overline{AB} 中點不在 L 上，則最多可在 A 上找到幾個交點 C ，使 $\triangle ABC$ 為等腰三角形？

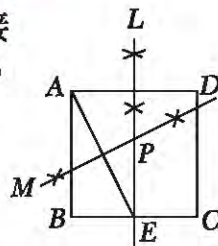
- (A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 6



(C) 9. 如右圖，在正方形 $ABCD$ 中，作 \overline{AD} 之中垂線 L 交 \overline{BC} 於 E 點，連接 \overline{AE} ，作 \overline{AE} 之中垂線 M ，則 M 與 L 交於 P 點，請問下列敘述何者錯誤？

- (A) $\overline{PA} = \overline{PD}$
(B) $\overline{PA} = \overline{PE}$
(C) $\overline{PD} = \overline{PC}$
(D) $\overline{PE} = \overline{PD}$

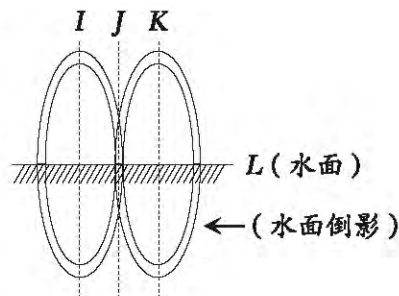
9. \therefore 中垂線上任一點到兩端點等距
 $\therefore \overline{PA} = \overline{PD} = \overline{PE}$



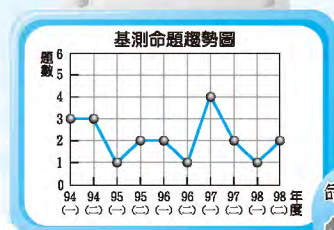
* (B) 10. 如右圖，麥當勞招牌矗立在水面上，形成對稱的倒影，請問這個圖形共有多少條對稱軸？

- (A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

10. 只有 J 、 L 為對稱軸



解題小 第8題：(1) 連接 \overline{AB} (2) 找 \overline{AB} 中垂線 (3) 分別以 A 、 B 兩點為圓心，交 L 於兩點。
第9題：中垂線上任一點到兩端點等距。



命題率 100%

能力 — 內角與外角

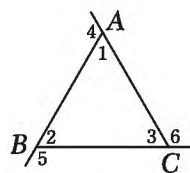
一 三角形的內角與外角定理

1. 三角形的內角和定理：任一三角形的三個內角和為 180° 。
2. 三角形的外角和定理：任一三角形的一組外角和為 360° 。
3. 三角形的外角定理：任一三角形的一外角等於不相鄰的兩內角之和。

例 1：如右圖， $\triangle ABC$ 中的三內角分別為 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ，

其中一組外角為 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ ，則：

- (1) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ； $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$ ， $\angle 5 = \angle 1 + \angle 3$ ， $\angle 6 = \angle 1 + \angle 2$ 。
- (2) $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$ 。



4. 等腰三角形的每一底角度數 = $(180^\circ - \text{頂角度數}) \div 2$ 。
5. 等腰三角形的頂角度數 = $180^\circ - 2 \times \text{底角度數}$ 。
6. 直角三角形中，兩個銳角度數的和 = 90° 。

圖(一)凹四邊形(或“V字型”或“飛鏢型”)	圖(二)“八字型”或“蝴蝶結”
<p>圖(一)</p>	<p>圖(二)</p>
$\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

二 三角形內、外角平分線的性質

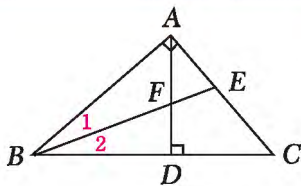
1. 內角平分		$\triangle ABC$ 中， I 為 $\angle B$ 、 $\angle C$ 內角平分線交點 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ $\Rightarrow \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$
2. 外角平分		$\triangle ABC$ 中， P 為 $\angle B$ 、 $\angle C$ 外角平分線交點 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ $\Rightarrow \angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$
3. 內外角平分線交點		$\triangle ABC$ 中， O 為 $\angle B$ 內角平分線與 $\angle C$ 外角平分線的交點 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ $\Rightarrow \angle BOC = \frac{1}{2}\angle A$

1 老師 傳授

三角形的內角與外角度數

學生 寫作

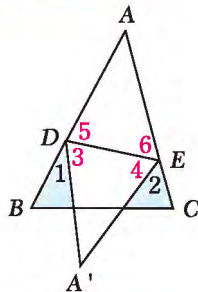
如圖， \overline{AD} 為直角 $\triangle ABC$ 斜邊 \overline{BC} 上的高，又 $\angle B$ 的平分線交於 \overline{AC} 於 E ，交 \overline{AD} 於 F ，若 $\angle C = 50^\circ$ ，則 $\angle AEF = ?$



解

$\because \triangle ABC$ 為直角 $\triangle \therefore \triangle ABE$ 亦為直角 \triangle
 又 $\angle C = 50^\circ$ ， $\therefore \angle B = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ，
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 40^\circ \div 2 = 20^\circ$
 $\Rightarrow \angle AEF = 90^\circ - 20^\circ = \underline{70^\circ}$

如圖，銳角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的任一點，若以 \overline{DE} 為對稱軸，將 A 折向 A' ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C = ?$



解

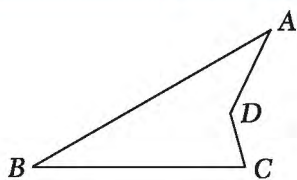
$(\angle 1 + \angle 3) + (\angle 2 + \angle 4) + \angle B + \angle C = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + (\angle 3 + \angle 4) = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + (\angle 5 + \angle 6) = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + (180^\circ - \angle A) = 360^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C + 130^\circ = 360^\circ$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C = \underline{230^\circ}$

2 老師 傳授

V字型與八字型的內外角度數

學生 寫作

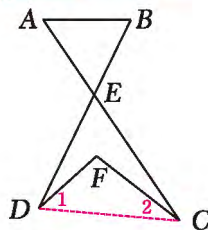
如圖，若 $\angle ADC = 140^\circ$ ，
 $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ ，
 則 $\angle B = ?$



解

$\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$
 $140^\circ = 35^\circ + \angle B + 75^\circ$
 $\angle B = \underline{30^\circ}$

如圖，若 $\angle A = 56^\circ$ ， $\angle B = 64^\circ$ ， $\angle C = 18^\circ$ ， $\angle D = 22^\circ$ ，試求 $\angle CFD = ?$



解

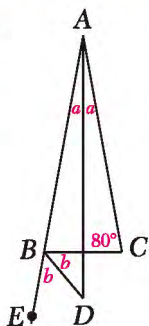
連接 \overline{CD} ，
 則 $56^\circ + 64^\circ = 18^\circ + 22^\circ + \angle 1 + \angle 2$
 $120^\circ = 40^\circ + \angle 1 + \angle 2$ ， $\angle 1 + \angle 2 = 80^\circ$
 $\angle CFD = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - 80^\circ$
 $= \underline{100^\circ}$

3 老師 傳授

三角形內外角度數的應用

學生 寫作

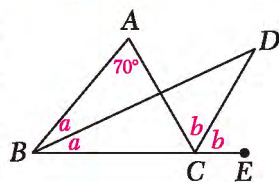
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 80^\circ$ ， $\angle A$ 的角平分線 \overline{AD} 與 $\angle B$ 的外角平分線 \overline{BD} ，交於 D 點，求 $\angle ADB = ?$



解

令 $\angle DAB = a$ ， $\angle CBD = b$
 $\angle CBE = \angle BAC + \angle C$
 $\Rightarrow 2b = 80 + 2a$ ， $b - a = 40$
 $\angle DBE = \angle BAD + \angle ADB$
 $\Rightarrow b = a + \angle ADB$ ， $\angle ADB = b - a = \underline{40^\circ}$

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B$ 的平分線 \overline{BD} 與 $\angle C$ 外角的角平分線 \overline{CD} 交於 D 點，求 $\angle BDC = ?$



解

令 $\angle DBC = a$ ， $\angle ACD = b$
 $\angle ACE = \angle A + \angle ABC$
 $2b = 70^\circ + 2a$ ， $b - a = 35^\circ$
 $\angle DCE = \angle CBD + \angle BDC$
 $\Rightarrow b = a + \angle BDC$ ， $\angle BDC = b - a = \underline{35^\circ}$

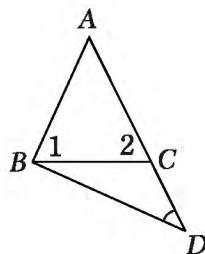
Let's Go! 同步 評量 1

(B) 1. 如右圖，已知 $\angle 1 = \angle 2 = 70^\circ$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ ，則 $\angle D$ 的度數為何呢？

- (A) 45°
- (B) 50°
- (C) 55°
- (D) 60°

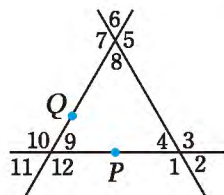
$$1. \because \angle 1 = \angle 2 = 70^\circ \therefore \angle A = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$$

$$\text{又 } \overline{BD} \perp \overline{AB} \therefore \angle D = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$



(D) 2. 如右圖，自 P 點出發，若依照逆時針方向沿著三角形的各邊行走，最後到達 Q 點，則其轉角的順序何者正確？

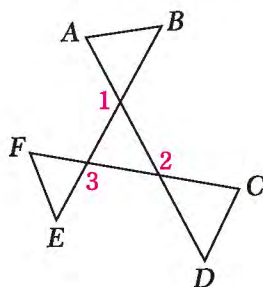
- (A) $\angle 2 \rightarrow \angle 6$ (B) $\angle 2 \rightarrow \angle 7$
- (C) $\angle 3 \rightarrow \angle 8$ (D) $\angle 3 \rightarrow \angle 7$



(C) 3. 如右圖， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = ?$

- (A) 180°
- (B) 270°
- (C) 360°
- (D) 540°

$$3. \begin{cases} \angle 1 = \angle A + \angle B \\ \angle 2 = \angle C + \angle D \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ \\ \angle 3 = \angle E + \angle F \end{cases}$$

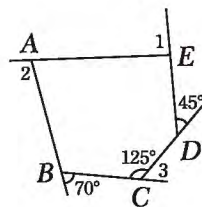


(B) 4. 如右圖，試求 $\angle 1 + \angle 2 = ?$

- (A) 180°
- (B) 190°
- (C) 200°
- (D) 210°

$$4. \angle 3 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 70^\circ - 55^\circ - 45^\circ = 190^\circ$$



(A) 5. 如右圖， \overline{BD} 、 \overline{CD} 平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ， \overline{BE} 、 \overline{CE} 平分 $\angle DBC$ 、 $\angle DCB$ ， $\angle A = 50^\circ$ ，求 $\angle BDC + \angle BEC = ?$

- (A) 262.5°
- (B) 265°
- (C) 265.5°
- (D) 272.5°

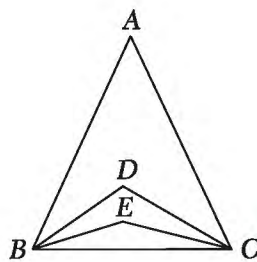
$$5. \angle DBC + \angle DCB = (180^\circ - 50^\circ) \times \frac{1}{2} = 65^\circ,$$

$$\angle BDC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

$$\angle EBC + \angle ECB = (180^\circ - 115^\circ) \times \frac{1}{2} = \frac{65^\circ}{2}$$

$$\angle BEC = 180^\circ - \frac{65^\circ}{2} = \frac{295^\circ}{2}$$

$$\angle BDC + \angle BEC = 115^\circ + \frac{295^\circ}{2} = \frac{230^\circ + 295^\circ}{2} = 262.5^\circ$$

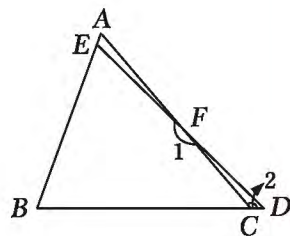


(C) 6. 如右圖， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ ，求 $\angle 1 = ?$

- (A) 155°
- (B) 165°
- (C) 175°
- (D) 185°

$$6. \angle 2 = \angle A + \angle B = 130^\circ$$

$$\angle 1 = \angle 2 + \angle D = 130^\circ + 45^\circ = 175^\circ$$



解題小 備方 第3題：三角形兩內角和等於另一角的外角。
第5題： $2\angle DBC + 2\angle DCB = 180^\circ - \angle A$ 。

能力二 多邊形的內角與外角

一 多邊形的角度與對角線公式

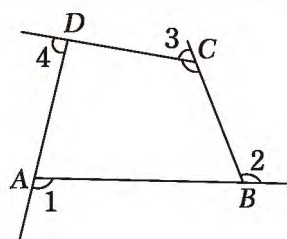
1. 任意 n 邊形的內角和	$(n - 2) \times 180^\circ$
2. 正 n 邊形的每一內角皆相等	$\frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$
3. 任意 n 邊形的外角和	360°
4. 正 n 邊形的每一外角皆相等	$\frac{360^\circ}{n}$
5. 任意 n 邊形的對角線總數	$\frac{n(n - 3)}{2}$ 條

4 老師傳授

四邊形的角度

學生寫作

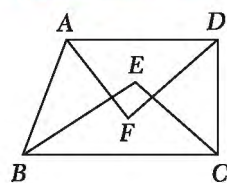
如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 110^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ，請問： $\angle 4 = ?$



解

$$\begin{aligned} \angle 3 &= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \\ \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 &= 360^\circ \\ \angle 4 &= 360^\circ - (100^\circ + 110^\circ + 60^\circ) = \underline{90^\circ} \end{aligned}$$

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線相交於 E 點， $\angle A$ 、 $\angle D$ 的角平分線相交於 F 點，若 $\angle BEC = 100^\circ$ ，則 $\angle AFD = ?$



解

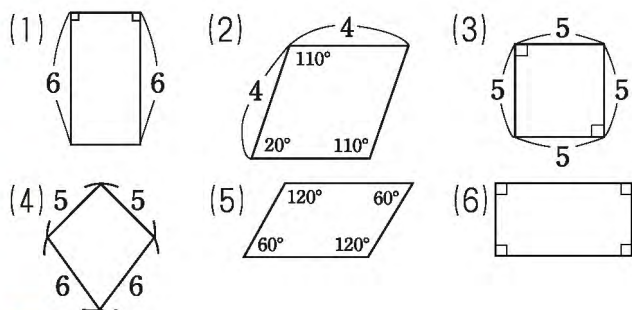
$$\begin{aligned} \because \angle B + \angle C &= 2 \times (180^\circ - \angle BEC) = 160^\circ \\ \therefore \angle AFD &= 180^\circ - \frac{(\angle A + \angle D)}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{(360^\circ - 160^\circ)}{2} = \underline{80^\circ} \end{aligned}$$

5 老師傳授

四邊形的對角線

學生寫作

長方形具有兩條對角線會等長且互相平分的性質，請問：下列哪些四邊形也具有相同的性質呢？



解

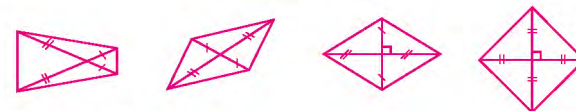
符合此一性質的四邊形分別是矩形、正方形。

選擇(1)(3)(6)

下列四組交叉線段各代表一種四邊形的兩條對角線，請由左至右寫出最適當的四邊形名稱。



解



等腰梯形、平行四邊形、菱形、正方形

Let's Go! 同步 評量 2

(C) 1. 一個四邊形最多有幾個內角是鈍角呢？

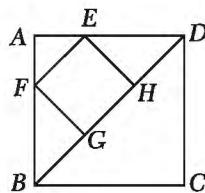
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1. \therefore 4個角皆是鈍角，則內角和大於 360°
 \therefore 最多有3個內角是鈍角

(C) 2. 如右圖， $ABCD$ 為一正方形， $EFGH$ 也是正方形， $G、H$ 在 \overline{BD} 上，
 $E、F$ 兩點分別在 $\overline{AD}、\overline{AB}$ 上，且 $\overline{HD} = 4$ ，則 $\overline{BD} + \overline{EH} = ?$

- (A) 12 (B) 14
 (C) 16 (D) 18

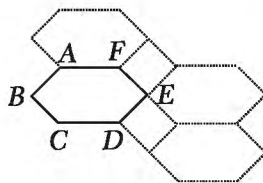
2. $\overline{BD} + \overline{EH} =$ 正方形 $EFGH$ 周長 $= 16$



(C) 3. 右圖為人行步道上地磚的局部圖形，在六邊形 $ABCDEF$ 中，
 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ， $\angle A = \angle C = \angle D = \angle F$ ，請問： $\angle A$ 等
 於多少度？

- (A) 133° (B) 134°
 (C) 135° (D) 136°

3. 六邊形內角和 $= (6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$
 $720^\circ - (2 \times 90^\circ) = 540^\circ$ ， $540^\circ \div 4 = 135^\circ$

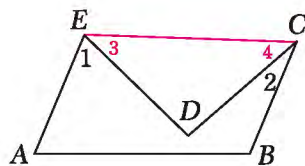


(B) 4. 如右圖， $\angle A + \angle B + \angle 1 + \angle 2 = 275^\circ$ ，求 $\angle CDE = ?$

- (A) 85°
 (B) 95°
 (C) 105°
 (D) 115°

4. 連接 \overline{EC}

$\angle A + \angle B + \angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 = 360^\circ$
 $(\angle A + \angle B + \angle 1 + \angle 2) + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$
 $\angle 3 + \angle 4 = 360^\circ - 275^\circ = 85^\circ$
 $\angle CDE = 180^\circ - (\angle 3 + \angle 4) = 95^\circ$



(B) 5. 在五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\angle B = 120^\circ$ ，其餘四個內角度數相同，求 $\angle A = ?$

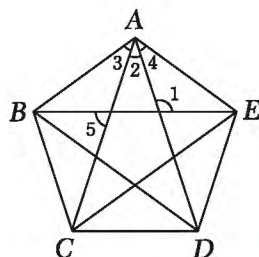
- (A) 95° (B) 105° (C) 110° (D) 115°

5. $\frac{(5-2) \times 180^\circ - 120^\circ}{4} = \frac{540^\circ - 120^\circ}{4} = 105^\circ$

(C) 6. 如右圖，正五邊形 $ABCDE$ 中，下列敘述何者不正確？

- (A) $\angle 1 = 108^\circ$
 (B) $\angle 2 = 36^\circ$
 (C) $\angle 5 = 62^\circ$
 (D) $\angle 2 + \angle 3 = \angle 5$

6. $\angle 1 = 180^\circ - 36^\circ \times 2 = 108^\circ$
 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 108^\circ \div 3 = 36^\circ$
 $\angle 5 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$



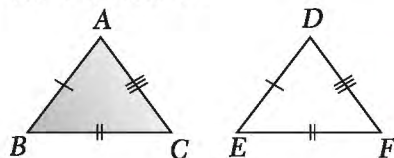
能力 三 三角形的全等

一 三角形全等的定義

若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合後， $\angle A$ 與 $\angle D$ 、 $\angle B$ 與 $\angle E$ 及 $\angle C$ 與 $\angle F$ 可以完全重合，則可稱 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，簡記為 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且此兩三角形具有下列性質：

1. 各對應角相等。($\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$)
2. 各對應邊相等。($\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$)
3. 面積相等。($\triangle ABC$ 面積 $= \triangle DEF$ 面積)

註：兩三角形面積相等，但不一定全等。



二 三角形的全等性質一覽表

假設：任意兩三角形 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$

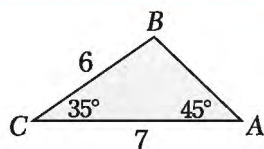
全等性質簡稱	條件	例圖
SSS	$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}, \overline{BC} = \overline{EF}$	
SAS	$\angle A = \angle D, \overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}$	
ASA	$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \overline{AB} = \overline{DE}$	
AAS	$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \overline{BC} = \overline{EF}$	
RHS (僅適用於直角三角形)	$\angle B = \angle E = 90^\circ,$ 斜邊： $\overline{AC} = \overline{DF},$ 任一股： $\overline{BC} = \overline{EF}$ (或 $\overline{AB} = \overline{DE}$)	
SSA (非全等性質)	若 $\overline{AB} = \overline{DE}, \angle B = \angle E,$ (1) $\overline{AC} = \overline{DF} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (2) $\overline{AC} = \overline{DG} \Rightarrow \triangle ABC \not\cong \triangle DEG$	

6 老師傳授

全等性質的判別

學生習作 6

如右圖，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle C = 35^\circ$ 、 $\overline{AC} = 7$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，則下列哪一個



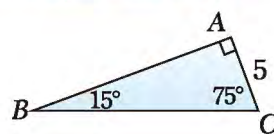
選項中的圖形與 $\triangle ABC$ 全等呢？

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

解

(D)的圖形與 $\triangle ABC$ 全等，根據 AAS 性質

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 15^\circ$ 、 $\angle C = 75^\circ$ 、 $\overline{AC} = 5$ ，請問：下列哪一個三角形與 $\triangle ABC$ 全等呢？



- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

解

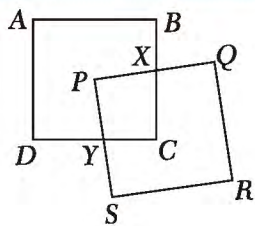
(C)根據已知條件可知 $\angle A = 90^\circ$ ，
所以 $\triangle ABC \cong \triangle NMP$ (AAS or ASA)

7 老師傳授

全等三角形的應用

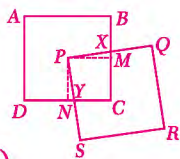
學生習作 7

四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $PQRS$ 是邊長為 10 公分的兩正方形，如圖所示， P 點位於正方形 $ABCD$ 的中心， $\overline{BX} = 4$ 公分，試問四邊形 $PXCY$ 的面積為多少平方公分呢？

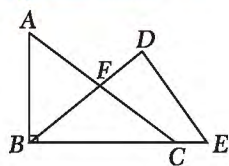


解

作輔助線，由 P 點分別對 \overline{BC} 及 \overline{CD} 作垂線交於 M, N 兩點， $\therefore \overline{PM} = \overline{PN}$ 且 $\angle XPM = \angle NPY$ ，又 $\angle PNY = \angle PMX = 90^\circ$
 $\therefore \triangle PXM \cong \triangle PYN$ (ASA)
 \Rightarrow $PXCY$ 面積 = $PMCN$ 面積
 $= 5^2 = 25$ (平方公分)



如圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle EDB$ 為全等的三角形，其中 $\overline{AB} = 9$ 公分， $\overline{BC} = 12$ 公分， $\overline{AC} = 15$ 公分，請問：(1) $\overline{FD} = ?$
 (2) 四邊形 $CEDF$ 的面積 = ?



解

(1) $\because \triangle ABC$ 與 $\triangle EDB$ 為全等三角形，
 $\therefore \angle FCB = \angle FBC, \angle FAB = \angle FBA$
 $\therefore \triangle BCF$ 與 $\triangle ABF$ 均為等腰三角形
 $\Rightarrow \overline{BF} = \overline{CF}, \overline{AF} = \overline{BF}$
 $\Rightarrow \overline{AF} = \overline{CF} = \overline{BF} = \frac{15}{2}$
 $\Rightarrow \overline{FD} = \overline{BD} - \overline{BF} = 12 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$ (公分)

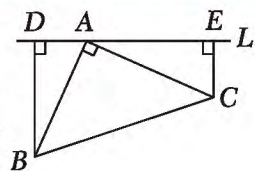
(2) 四邊形 $CEDF$ 面積 = $\triangle BDE$ 面積 - $\triangle BCF$ 面積
 $= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 - \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 9 \times 12)$
 $= 27$ (平方公分)

8 老師傳授

三角形全等的證明

學生習作 8

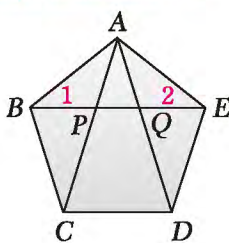
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ, \overline{AB} = \overline{AC}$ ， L 是過 A 點的直線， $\overline{BD} \perp L, \overline{CE} \perp L$ 。試證： $\triangle ABD \cong \triangle CAE$ 。



解

$\because \overline{BD} \perp L, \overline{CE} \perp L \therefore \angle ADB = \angle CEA = 90^\circ$
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ \therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$ ，
 又 $\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$ ，
 $\angle ABD + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle CAE$ ，在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CAE$ 中，
 $\therefore \angle ADB = \angle CEA, \angle ABD = \angle CAE,$
 $\overline{AB} = \overline{AC} \therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$ (AAS)

如圖，正五邊形 $ABCDE$ 的對角線 \overline{AC} 和 \overline{AD} 分別交 \overline{BE} 於 P 與 Q 。試證： $\overline{BP} = \overline{QE}$ 。



解

(1) $\because ABCDE$ 為正五邊形
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AE}, \overline{BC} = \overline{DE}, \angle ABC = \angle AED$
 (2) $\triangle ABC \cong \triangle AED$ (SAS) $\therefore \angle BAC = \angle EAD$
 (3) $\triangle ABE$ 中， $\because \overline{AB} = \overline{AE} \therefore \angle 1 = \angle 2$
 (4) $\triangle BAP \cong \triangle EAQ$ (ASA) $\therefore \overline{BP} = \overline{QE}$

Let's Go! 同步評量 3

(C) 1. 兩直角三角形在下列何種情況時不一定全等？

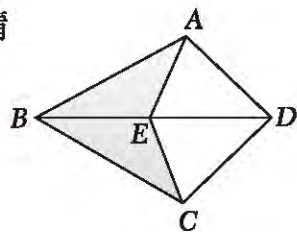
- (A) 斜邊及一股對應相等
- (B) 斜邊及一銳角對應相等
- (C) 二銳角對應相等
- (D) 二股對應相等

- 1. (A) RHS 全等 (B) AAS 全等
- (C) AAA 相似 (D) SAS 全等

(A) 2. 如右圖, $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 且 E 點為 \overline{BD} 上的任何一點, 請問: 此圖形中有幾組全等三角形呢?

- (A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6

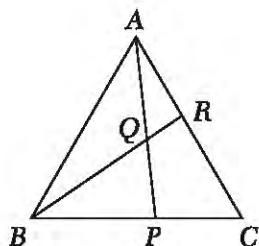
2. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$; $\triangle AED \cong \triangle CED$; $\triangle ABE \cong \triangle CBE$



(B) 3. 如右圖, 正三角形 ABC , $\overline{AR} = \overline{CP}$, 假設 $\angle CAP = 25^\circ$, 請問: $\angle BQP = ?$

- (A) 45°
(B) 60°
(C) 75°
(D) 80°

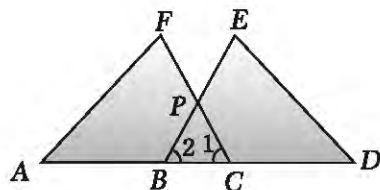
3. 因為 $\overline{AR} = \overline{CP}$, $\angle BAC = \angle ACP$, $\overline{AB} = \overline{AC}$,
所以 $\triangle BAR \cong \triangle ACP$ (SAS), 得 $\angle PAC = \angle ABR = 25^\circ$
 $\angle BQP = \angle ABR + \angle BAQ = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$



(D) 4. 如右圖, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{PB} = \overline{BC}$, $\angle A = \angle D$, $\angle 1 = \angle 2$, 若 $\angle A = 45^\circ$, 請問: $\angle E = ?$

- (A) 60°
(B) 65°
(C) 70°
(D) 75°

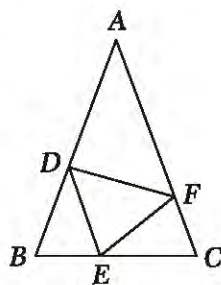
4. 因為 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CD}$, $\angle A = \angle D$,
 $\angle 1 = \angle 2$, $\triangle AFC \cong \triangle DEB$ (ASA),
在 $\triangle PBC$ 中, $\angle 1 = \angle 2$ 且 $\overline{PB} = \overline{BC}$,
故 $\triangle PBC$ 為正三角形, $\angle E = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$



(D) 5. 如右圖, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{CE}$, $\overline{BE} = \overline{CF}$, 根據何種全等性質, 可得 $\triangle DBE \cong \triangle ECF$ 呢?

- (A) SSS (B) SAS
(C) AAS (D) ASA

5. $\because \overline{AB} = \overline{AC} \therefore \angle B = \angle C$
且 $\overline{BD} = \overline{CE}$, $\overline{BE} = \overline{CF}$
故 $\triangle DBE \cong \triangle ECF$ (SAS)



能力四 三角形的邊角關係

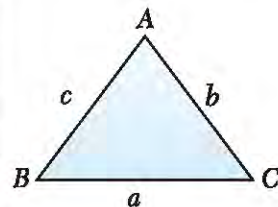
一 三角形的組成性質

1. 兩邊和、差關係

若 a 、 b 表示 $\triangle ABC$ 之兩邊長, 令第三邊長為 c , 如右圖。
則 $|a - b| < c < a + b$, 即 **兩邊差 < 第三邊 < 任意兩邊和**。

2. 內角與外角關係

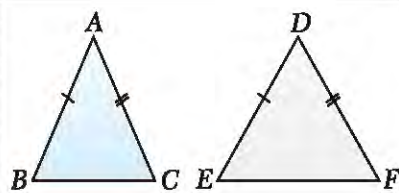
- (1) 任意三角形的三個內角和為 180° , 三個外角和為 360° 。
(2) 任意三角形的一外角等於其內對角的和。



二 三角形的邊角關係

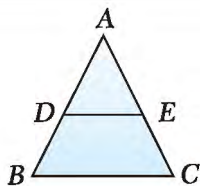
如右圖, 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中, $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$, 則:

- (1) 若 $\angle A < \angle D$, 則 $\overline{BC} < \overline{EF}$ 。
(2) 若 $\overline{BC} < \overline{EF}$, 則 $\angle A < \angle D$ 。
(3) 任意一個三角形中, 具有**大邊對大角**, **小邊對小角**的性質。



三 三角形的中點連線性質

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點，則
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 。



9

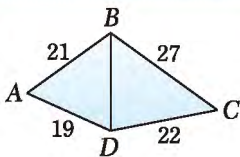
老師 傳授

三角形的三邊關係(一)

學生 實作

9

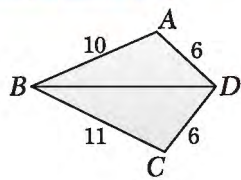
如圖，在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 中， $\overline{AB} = 21$ ， $\overline{AD} = 19$ ， $\overline{CD} = 22$ ， $\overline{BC} = 27$ ， $\overline{BD} = x$ ，試求 x 的範圍為何？



解

$\because x$ 、 21 、 19 為 $\triangle ABD$ 之邊長，
 $|21 - 19| < x < (21 + 19) \Rightarrow 2 < x < 40 \cdots \textcircled{1}$
 $\because x$ 、 22 、 27 為 $\triangle BCD$ 之邊長，
 $|22 - 27| < x < (22 + 27) \Rightarrow 5 < x < 49 \cdots \textcircled{2}$
 由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 知， $5 < x < 40$

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 11$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{AD} = 6$ ，求 \overline{BD} 的範圍為何？



解

$\triangle ABD$ 中， $10 - 6 < \overline{BD} < 10 + 6$
 $\Rightarrow 4 < \overline{BD} < 16$
 $\triangle BCD$ 中， $11 - 6 < \overline{BD} < 11 + 6$
 $\Rightarrow 5 < \overline{BD} < 17$
 由以上可知 $5 < \overline{BD} < 16$

10

老師 傳授

三角形的邊角關係(二)

學生 實作

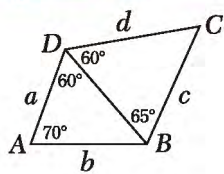
10

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} > \overline{BC}$ ，且 $\angle B = 60^\circ$ ，則 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的大小為何？

解

$\because \overline{AB} > \overline{BC} \Rightarrow \angle C > \angle A$
 $\because \angle B = 60^\circ$ ， $\angle A + \angle C = 120^\circ$
 $\therefore \angle C > 60^\circ$ ， $\angle A < 60^\circ$
 $\Rightarrow \underline{\angle C > \angle B > \angle A}$

如圖，連接四邊形 $ABCD$ 的對角線 \overline{BD} ，若 $\angle ADB = \angle CDB = 60^\circ$ ， $\angle DAB = 70^\circ$ ， $\angle DBC = 65^\circ$ ，則四邊長 a 、 b 、 c 、 d 的大小關係為何呢？



解

$\triangle ABD$ 中， $\angle DBA = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$
 $\because 70^\circ > 60^\circ > 50^\circ$ ， $\therefore \overline{BD} > b > a$
 $\triangle BDC$ 中， $\angle DCB = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$
 $\because 65^\circ > 60^\circ > 55^\circ$ ， $\therefore d > c > \overline{BD}$
 由以上可知，
 $d > c > \overline{BD} > b > a \Rightarrow \underline{d > c > b > a}$

解題小 備方

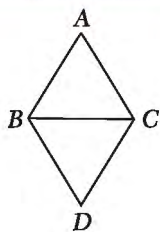
學生 10：利用 \overline{BD} 為共同邊求解，先比較 $\triangle ABD$ 三邊大小，再比較 $\triangle CBD$ 三邊大小，最後再整合比較。

11 老師 傳授

四邊形的邊角關係

學生 習作

1. 如圖，用兩個相同的正三角形組合成一個四邊形，若正 $\triangle ABC$ 周長為 24，則四邊形 $ABDC$ 是哪一種四邊形呢？周長為何呢？又 $\angle ACD = ?$

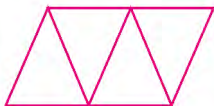


2. 承上題，以相同的 4 個三角形所排出的圖形中，若為四邊形，則必為哪種四邊形？

解

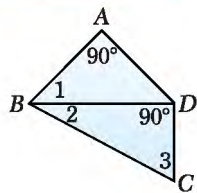
1. $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DC} = \overline{AC}$ ，且 $\angle BAC = 60^\circ$ ，
 $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$ ，
 $\therefore ABDC$ 為菱形
 $24 \div 3 = 8$ ，
 $ABDC$ 周長 $= 8 \times 4 = 32$ (單位)

2. 如圖，平行四邊形



解題小偏方 學生 11：使用等腰直角三角形比例性質，再以商高定理求解。

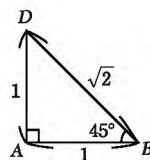
1. 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，
 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\angle BDC = \angle A = 90^\circ$ ， $\overline{BD} > \overline{CD}$ 。請問： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 的大小關係為何呢？



2. 承上題，若 $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \frac{13}{5}\overline{AB}$ ，試求四邊形 $ABCD$ 之周長？

解

1. 已知 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $\angle 1 = (180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 45^\circ$ ，
 $\overline{BD} > \overline{CD}$
 $\therefore \angle 3 > \angle 2$ ， $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$ ，
 $\Rightarrow \angle 3 > 45^\circ$ ， $\angle 2 < 45^\circ$
 $\Rightarrow \angle 3 > \angle 1 > \angle 2$
 2. $\therefore \angle A = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$
 $\therefore \triangle ABD$ 為等腰直角三角形
 $\overline{AB} = \overline{AD} = 5$ ， $\overline{BC} = \frac{13}{5}\overline{AB} = 13$ ，
 $\overline{CD} = \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$
 周長 $= (2 \times 5) + 13 + \sqrt{119}$
 $= 23 + \sqrt{119}$ (單位)



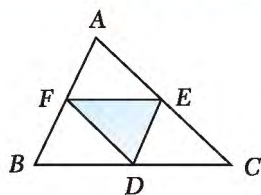
可求出 $\overline{AD} = 5 = \overline{AB}$ ，

12 老師 傳授

三角形兩邊中點連線性質

學生 習作

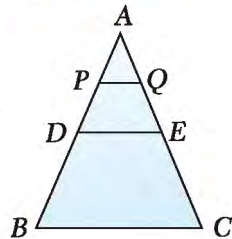
如圖， D 、 E 、 F 分別為 $\triangle ABC$ 三邊的中點，若 $\overline{AB} = 6\text{ cm}$ ， $\overline{BC} = \overline{AC} = 8\text{ cm}$ ，則 $\triangle DEF$ 的周長為何呢？



解

$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$
 $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$
 $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$
 $\therefore \triangle DEF$ 的周長 $= 3 + 4 + 4 = 11$ (cm)

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點， P 、 Q 分別為 \overline{AD} 、 \overline{AE} 的中點，若 $\overline{BC} = 10$ ，求 $\overline{PQ} = ?$



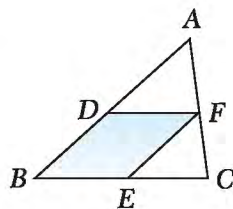
解

$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$
 $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$ (單位)

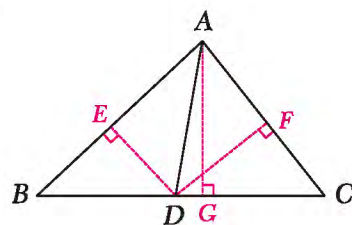
Let's Go! 同步評量 4

- (D) 1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，則下列敘述何者正確呢？
 (A) $\angle A$ 為最小角 (B) $\angle B$ 為最大角
 (C) \overline{AB} 為最大邊 (D) \overline{BC} 為最大邊
1. 由 $\overline{AB} > \overline{AC}$ 知 $\angle C > \angle B \Rightarrow 60^\circ > \angle B$ ，
 $\angle C = 60^\circ$ ， $\angle B < 60^\circ \Rightarrow \angle A > 60^\circ$
 故 $\angle A$ 為最大角， \overline{BC} 為最大邊
- (C) 2. 等腰三角形的三邊長都是整數，周長為 15，則此種等腰三角形共有幾個呢？
 (A) 2 (B) 3
 (C) 4 (D) 5
2. $\because 15 \div 2 = 7.5 \therefore$ 兩腰的和 > 7.5
 \Rightarrow ① 4, 4, 7 ② 5, 5, 5 ③ 6, 6, 3 ④ 7, 7, 1
- (D) 3. 若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle A$ 比 $\angle B$ 的2倍少 4° ，求 $\triangle ABC$ 各內角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的度數為何？
 (A) $86^\circ, 47^\circ, 47^\circ$ (B) $84^\circ, 48^\circ, 48^\circ$
 (C) $82^\circ, 49^\circ, 49^\circ$ (D) $88^\circ, 46^\circ, 46^\circ$
3. $\because \overline{AB} = \overline{AC} \therefore \angle B = \angle C$ ，設 $\angle B = \angle C = x^\circ$ ，
 則 $\angle A = (2x - 4)^\circ \Rightarrow (2x - 4) + 2x = 180^\circ$ ，
 $x = 46^\circ$ ， $\angle A = (2 \times 46^\circ - 4) = 88^\circ$

- (B) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是各邊的中點，若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 7$ ，請問：四邊形 $DBEF$ 的周長為何呢？
 (A) 17 (B) 18
 (C) 19 (D) 20
4. $\overline{DF} = 8 \div 2 = 4$ ， $\overline{EF} = 10 \div 2 = 5$
 \Rightarrow 周長 $= (4 + 5) \times 2 = 18$



- (C) 5. 如右圖， \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ，則 \overline{BD} 與 \overline{CD} 的大小關係為何？
 (A) $\overline{BD} < \overline{CD}$
 (B) $\overline{BD} = \overline{CD}$
 (C) $\overline{BD} > \overline{CD}$
 (D) $\overline{BD} \leq \overline{CD}$
5. $\because \overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線
 $\therefore \overline{DE} = \overline{DF}$ ，且 $\overline{AB} > \overline{AC}$
 $\therefore \triangle ABD$ 面積 $>$ $\triangle ADC$ 面積
 $\Rightarrow \overline{BD} \times \overline{AG} > \overline{CD} \times \overline{AG} \Rightarrow \overline{BD} > \overline{CD}$



實力評量

基本觀念題

- (C) 1. 下列敘述何者錯誤？
 (A) 兩個三角形中，若有兩角及一對應邊相等，則必全等
 (B) 兩個直角三角形的一邊與一銳角對應相等，則必全等
 (C) 兩個三角形中，若有兩邊及一對應角相等，則必全等
 (D) 兩個等腰三角形中，若有一組對應邊及一組對應角相等，則必全等
- (A) 2. $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 中，若 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，而且 $\angle A = \angle D = 100^\circ$ ，則此兩個三角形全等性質為何？
 (A) SAS (B) SSS (C) RHS (D) ASA
- 生活應用題※，本書特有題◎，難題#
 1. (A)屬於AAS或ASA
 (B)屬於ASA或AAS
 (C)屬於SAS或SSA，但SSA非全等性質
 (D)屬於ASA
 2. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS全等)

(C) 3. 一個四邊形不可能剛好有幾個直角？

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

3. \because 四邊形內角和為 360° ，有三個直角時，第四個內角亦必為直角，故不可能剛好有 3 個直角

(A) 4. 已知三角形兩邊長為 2、7，若第三邊長是奇數，則這三角形的周長是多少呢？

- (A) 16 (B) 17
(C) 18 (D) 19

4. $\because 7 - 2 < \text{第三邊} < 7 + 2$ ，且第三邊為奇數
 \therefore 第三邊為 7，周長 = $2 + 7 + 7 = 16$

(C) 5. 下列四組數，可成為三角形三邊長的共有多少組呢？

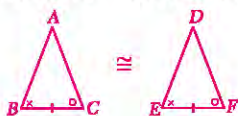
- Ⓐ 0.3、0.5、0.5 Ⓑ 5、9、14 Ⓒ $2\sqrt{2}$ 、1、3 Ⓓ 2、99、100

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

5. 只有 Ⓓ 不符合！
 $\because 5 + 9 = 14$ 無法構成三角形

(A) 6. 兩個等腰三角形中，若底邊及一底角對應相等，則這兩個等腰三角形有何種關係？

- (A) ASA 全等 (B) 不全等
(C) 面積不同 (D) RHS 全等



6. $\because \overline{BC} = \overline{EF}$ 且 $\angle C = \angle F$ ，
則 $\angle B = \angle E$ ，
故 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA)

(D) 7. 若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{EF} = 13$ ， $\overline{AC} = 5$ ，則 $\triangle DEF$ 的周長為何？

- (A) 25 (B) 27
(C) 28 (D) 30

7. 周長 = $12 + 13 + 5 = 30$

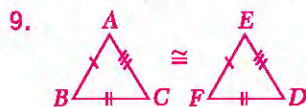
(B) 8. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{QR}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PQ}$ ，則再加上下列何種條件可判定 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 為全等三角形呢？(甲) $\angle B = \angle R$ 、(乙) $\angle C = \angle P$ 、(丙) $\angle A = \angle Q$ 、(丁) $\overline{BC} = \overline{PR}$ 。

- (A) 甲或乙 (B) 丙或丁
(C) 甲或丁 (D) 乙或丙

8. (甲) SSA (非全等性質)
(乙) SSA (非全等性質)
(丙) SAS 全等
(丁) SSS 全等

(C) 9. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{EF}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ， $\overline{AC} = \overline{DE}$ ，則下列何者正確？

- (A) $\angle A = \angle D$ (B) $\angle C = \angle F$
(C) $\angle B = \angle F$ (D) $\angle D = \angle E$



(C) 10. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle C$ 的外角為 110° ，則 $\triangle ABC$ 為何種三角形呢？

- (A) 直角三角形 (B) 鈍角三角形
(C) 銳角三角形 (D) 任意三角形

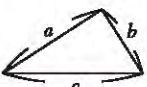
10. $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，
 $\angle B = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$
可知其為銳角三角形

(A) 11. 已知三角形的三個外角度數比是 3 : 4 : 5，則此三角形的最大內角是多少？

- (A) 90° (B) 100°
(C) 110° (D) 120°

11. 最小外角 = $360^\circ \times \frac{3}{3+4+5} = 90^\circ$ ，
最大內角 = 90°

解題小秘方

第 5 題： $\Rightarrow |a - b| < c < a + b$

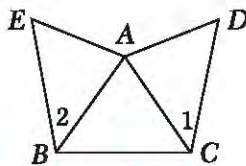
(B) 12. 設 $\triangle ABC$ 中， $2\angle A : 3\angle B = 8 : 9$ ， $2\angle B : \angle C = 6 : 5$ ，則 $\angle A + \angle B = ?$

- (A) 100°
- (B) 105°
- (C) 110°
- (D) 115°

12. $2\angle B : \angle C = 6 : 5$, $2\angle A : 3\angle B = 8 : 9$,
 $4\angle A : 6\angle B : 3\angle C = 16 : 18 : 15$, $\angle A = 4r$, $\angle B = 3r$, $\angle C = 5r$,
 $\angle A + \angle B = 180^\circ \times \frac{4+3}{4+3+5} = 105^\circ$

(C) 13. 如右圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{CD} = \overline{BE}$ ， $\angle D = \angle E$ ，那麼下列敘述何者錯誤？

- (A) $\overline{AB} = \overline{AC}$
- (B) $\angle ABC = \angle ACB$
- (C) $\overline{AC} = \overline{AE}$
- (D) $\triangle ABC$ 是等腰三角形

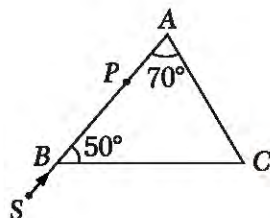


13. 因為 $\angle 1 = \angle 2$ ，
 $\overline{CD} = \overline{BE}$ ， $\angle D = \angle E$ ，
 所以 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ (ASA) $\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \neq \overline{AE}$

* (D) 14. 如右圖，若小華由 S 點出發，只准前進不准後退，依照 $S \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow P$ 的順序走到 P 點，小華共轉了幾度呢？

- (A) 125°
- (B) 150°
- (C) 250°
- (D) 280°

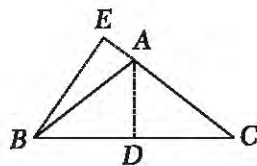
14. $50^\circ + 120^\circ + 110^\circ = 280^\circ$



(A) 15. 如右圖， $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 16$ ，且 $\overline{BE} \perp \overline{AE}$ ，求 $\overline{BE} = ?$

- (A) $\frac{48}{5}$
- (B) $\frac{24}{5}$
- (C) $\frac{16}{5}$
- (D) $\frac{36}{5}$

15. $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 10 = \overline{AB}$
 $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DE}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = \frac{1}{2} \times 10 \times \overline{BE}$, $\overline{BE} = \frac{48}{5}$

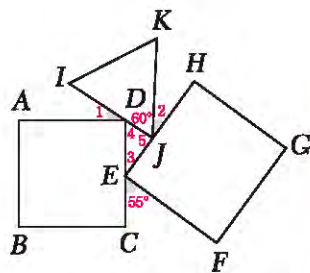


歷屆 基測題

(C) 1. 右圖為兩正方形 $ABCD$ 、 $EFGH$ 與正三角形 IJK 的位置圖，其中 D 、 E 、 J 三點分別在 \overline{IJ} 、 \overline{CD} 、 \overline{EH} 上。若 $\angle CEF = 55^\circ$ ，則 $\angle IDA$ 與 $\angle KJH$ 的角度和為何？

- (A) 55°
- (B) 60°
- (C) 65°
- (D) 70°

1. 由圖可知 $\angle 3 = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$
 $\angle IDA + \angle KJH = \angle 1 + \angle 2 = (180^\circ - 90^\circ - \angle 4) + (180^\circ - 60^\circ - \angle 5)$
 $= 210^\circ - (\angle 4 + \angle 5) = 210^\circ - (180^\circ - \angle 3) = 210^\circ - 145^\circ = 65^\circ$
 故選(C)



(C) 2. 若 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 為純角，且 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，則下列何者可能為 \overline{AC} 之長度？

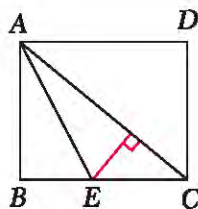
- (A) 5
- (B) 8
- (C) 11
- (D) 14

2. (1) 若 $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ， $\therefore \angle B > 90^\circ$ ， $\overline{AC} > 10$
 (2) 兩邊之和大於第三邊， $\therefore 6 + 8 > \overline{AC}$
 由(1)(2)得 $10 < \overline{AC} < 14$

88 基測一

解題小方 第12題： $a\angle A : b\angle B = c : d \Rightarrow \angle A : \angle B = \frac{c}{a} : \frac{d}{b}$

(B) 3. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， E 點在 \overline{BC} 上，且 \overline{AE} 平分 $\angle BAC$ 。
若 $\overline{BE} = 4$ ， $\overline{AC} = 15$ ，則 $\triangle AEC$ 面積為何？

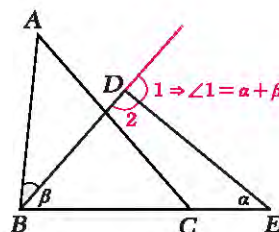


36 基測一

- (A) 15
- (B) 30
- (C) 45
- (D) 60

3. $\because E$ 在 $\angle BAC$ 的角平分線上
又 E 到 \overline{AC} 的距離 $= \overline{EB} = 4$
 \therefore 所求 $= \frac{1}{2} \times 15 \times 4 = 30$

(D) 4. 右圖是 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 重疊的情形，其中 C 在 \overline{BE} 上，且 $\overline{AC} = \overline{BE} = 9$ 、 $\overline{AB} = \overline{ED} = 7$ 、 $\overline{BC} = \overline{BD} = 6$ 。若 $\angle DEB = \alpha$ ， $\angle DBE = \beta$ ，則 $\angle ABD = ?$



37 基測二

- (A) $\frac{\alpha - \beta}{2}$
- (B) $\alpha - \beta$
- (C) $180^\circ - \alpha - \beta$
- (D) $180^\circ - \alpha - 2\beta$

4. 延長 \overline{BD} 得 $\angle 1$ ， $\angle 1 = \alpha + \beta$ ，
 $\angle 2 = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDB$ (SSS 全等)
 $\therefore \angle ABC = \angle 2$
 $\therefore \angle ABD = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \beta = 180^\circ - \alpha - 2\beta$

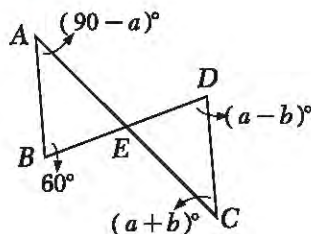
基測 趨勢題

(B) 1. 一多邊形各內角為 $2x^\circ$ 、 $3x^\circ$ 、 $4x^\circ$ 、 $4x^\circ$ 、 $5x^\circ$ ，則其最小角為多少度呢？

- (A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 160°

1. $(5-2) \times 180^\circ = 18x^\circ \Rightarrow 540^\circ = 18x^\circ \Rightarrow x = 30$
 \therefore 最小內角 $= 2x^\circ = 60^\circ$

(B) 2. 如右圖， $\overline{AE} = \overline{EC}$ ， $\overline{BE} = \overline{ED}$ ，試求 $\frac{a}{b} = ?$



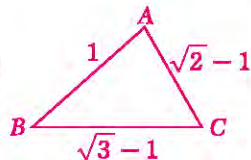
- (A) $-\frac{1}{5}$
- (B) -5
- (C) $\frac{1}{5}$
- (D) 5

2. 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle CDE$ 中，
 $\because \overline{AE} = \overline{EC}$ ， $\overline{BE} = \overline{ED}$ ，且 $\angle AEB = \angle CED$ ，
故 $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (SAS)，
 $\begin{cases} a + b = 90 - a \\ a - b = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 50 \\ b = -10 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{50}{-10} = -5$

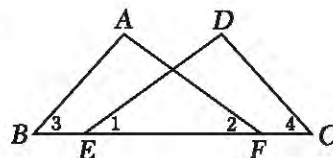
(C) 3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3} - 1$ ， $\overline{AC} = \sqrt{2} - 1$ ，則 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之大小的關係為下列何者呢？

- (A) $\angle C > \angle B > \angle A$
- (B) $\angle B > \angle C > \angle A$
- (C) $\angle C > \angle A > \angle B$
- (D) $\angle A > \angle B > \angle C$

3. 大角對大邊，小角對小邊，
 $\overline{AC} < \overline{BC} < \overline{AB}$ ， $\angle B < \angle A < \angle C$



(D) 4. 如右圖，若 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， $\overline{BE} = \overline{CF}$ ，根據何種全等性質可證明 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 呢？



- (A) AAS (B) SSS
- (C) RHS (D) ASA

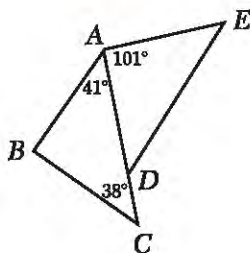
4. 因為 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，
且 $\overline{BE} + \overline{EF} = \overline{CF} + \overline{EF} \Rightarrow \overline{BF} = \overline{CE}$
故 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ (ASA)

解題小幫手 第 2 題：先判斷 $\triangle ABE$ 與 $\triangle CDE$ 是否全等，若全等即可列式 $\begin{cases} a + b = 90 - a \\ a - b = 60 \end{cases}$ 。

(A) 5. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{AE} = \overline{BC}$ ，求 $\angle DEA = ?$

- (A) 38°
- (B) 41°
- (C) 55°
- (D) 60°

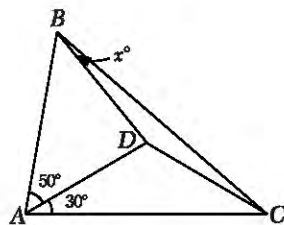
5. $\because \overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{AE} = \overline{BC}$ ，
且 $\angle ABC = 180^\circ - (41^\circ + 38^\circ) = 101^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DAE$ ，故 $\angle DEA = 38^\circ$



(B) 6. 如右圖， $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ ，則 $x^\circ = ?$

- (A) 5°
- (B) 10°
- (C) 15°
- (D) 20°

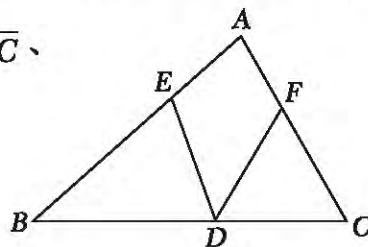
6. 在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$
 $\therefore \angle BAD = \angle ABD = 50^\circ$ ，
 $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$ ，
 $\angle DBC = \angle DCB = x^\circ$
 $\Rightarrow x^\circ = (180^\circ \div 2) - 50^\circ - 30^\circ = 10^\circ$



(A) 7. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ， D 、 E 、 F 點分別在 \overline{BC} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，且 $\overline{BD} = \overline{BE}$ ， $\overline{CD} = \overline{CF}$ ，則 $\angle EDF = ?$

- (A) 50°
- (B) 52°
- (C) 54°
- (D) 56°

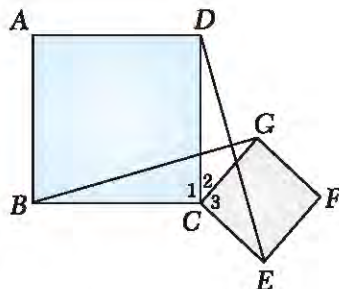
7. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle C = 100^\circ$ ，
 $\angle B = 180^\circ - 2\angle BDE$ ， $\angle C = 180^\circ - 2\angle FDC$ ，
 $\angle B + \angle C = 360^\circ - 2(\angle BDE + \angle FDC)$ ，
 $\angle BDE + \angle FDC = 130^\circ \Rightarrow \angle EDF = 50^\circ$



(B) 8. 如右圖， $ABCD$ 和 $CEFG$ 都是正方形，若 $\angle 2 = 30^\circ$ ， $\angle CED = 25^\circ$ ，則 $\angle GBC$ 為多少度呢？

- (A) 25°
- (B) 35°
- (C) 45°
- (D) 55°

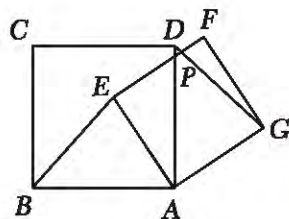
8. 因為 $\angle 1 = \angle 3 = 90^\circ$ ，
 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 120^\circ$ ，且 $\overline{BC} = \overline{CD}$ ， $\overline{CG} = \overline{CE}$
故 $\triangle BCG \cong \triangle DCE$ (SAS)，
 $\angle GBC = 180^\circ - (120^\circ + 25^\circ) = 35^\circ$



(C) 9. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 與 $AEFG$ 皆為正方形， \overline{DG} 交 \overline{EF} 於 P ，已知 $\angle AEB = 75^\circ$ ，求 $\angle DPE = ?$

- (A) 105°
- (B) 95°
- (C) 75°
- (D) 65°

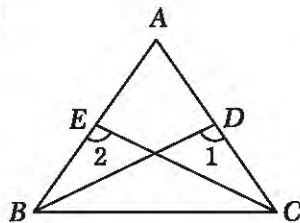
9. $\because \overline{AB} = \overline{AD}$ ，
 $\angle BAE = \angle DAB - \angle DAE = \angle EAG - \angle DAE = \angle DAG$
且 $\overline{AE} = \overline{AG}$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS)
 $\Rightarrow \angle AEB = \angle AGD = 75^\circ \Rightarrow \angle FGP = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$
 $\Rightarrow \angle DPE = \angle FPG = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$



(D) 10. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 70^\circ$ ， \overline{BD} 、 \overline{CE} 分別為 $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 之角平分線，則 $\angle 1 + \angle 2 = ?$

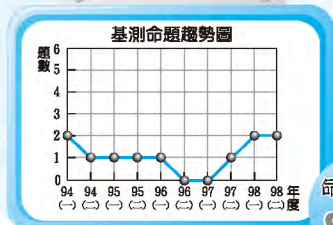
- (A) 165°
- (B) 175°
- (C) 185°
- (D) 195°

10. $\because \angle 1$ 為 $\triangle ABD$ 的外角，
 $\angle 1 = \angle A + \angle ABD = \angle A + \frac{1}{2}\angle ABC$
 $\angle 2$ 為 $\triangle ACE$ 的外角，
 $\angle 2 = \angle A + \angle ACE = \angle A + \frac{1}{2}\angle ACB$
 $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) + 2\angle A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) + 2\angle A = \frac{3}{2}\angle A + 90^\circ = 195^\circ$



解題小方

第7題：請留意 $\overline{BD} = \overline{BE} \Rightarrow \angle BDE = \angle BED$ ， $\overline{CD} = \overline{CF} \Rightarrow \angle CDF = \angle CFD$ 。
第8題：請留意 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$ ，再判斷 $\triangle BCG$ 與 $\triangle DCE$ 是否全等。

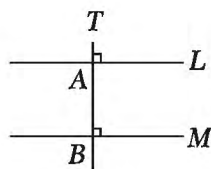


命題率 80%

能力一 平行

一 平行線的意義

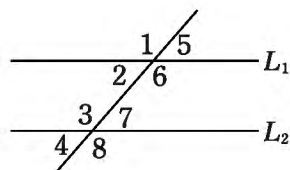
係指在同一平面上，如果兩條直線同時垂直於另一直線，則稱這兩條直線為平行線。如右圖， L 、 M 、 T 是同一平面上的三條直線， $L \perp T$ 、 $M \perp T$ ，則 L 與 M 為兩平行線，記為 $L \parallel M$ 。



二 平行線與截角

在同一平面上，若兩平行線被一直線所截，則會形成：

1. 同位角相等： $\angle 1 = \angle 3$ 、 $\angle 5 = \angle 7$ 、 $\angle 2 = \angle 4$ 、 $\angle 6 = \angle 8$ 。
2. 內錯角相等： $\angle 2 = \angle 7$ 、 $\angle 3 = \angle 6$ 。
3. 同側內角互補： $\angle 2 + \angle 3 = \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$ 。



三 兩平行線被一直線所截，則有下列情形

1. 一組同位角的平分線必互相 平行	2. 一組內錯角的平分線必互相 平行	3. 一組同側內角的平分線必互相 垂直

四 兩平行線之間的距離處處相等（以三角形的面積為例）

1. $L \parallel M$ ，同底等高	2. $L \parallel M$ ，同底等高 ($\overline{BC} = \overline{CD}$)	3. $L \parallel M$ ，同底等高 ($\overline{BC} = \overline{BG} + \overline{GH} + \overline{HC}$)
$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle DBC$ 面積 $\triangle ABO$ 面積 = $\triangle CDO$ 面積	$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle ACD$ 面積	$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle DBG$ 面積 + $\triangle EGH$ 面積 + $\triangle FHC$ 面積

五 在一平面上，若有兩角的兩邊互相平行，則有下列情形出現

1. 相等： $\angle 1 = \angle 2$		2. 互補： $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
(1)	(2)	(1)
(3)	(4)	(2)

六 平行線的應用

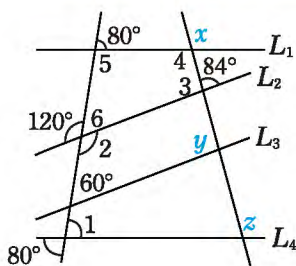
1. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	2. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$
3. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$	4. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 540^\circ$

老師 傳授

平行線的判別

學生 習作

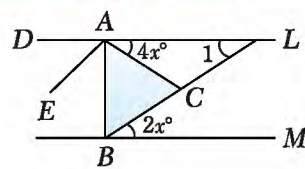
如圖，有四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 ，請問：哪幾條互相平行呢？又 $\angle x, \angle y, \angle z$ 的度數分別是多少呢？



解

- (1) $\because \angle 1 = 80^\circ \therefore L_1 \parallel L_4$ (同位角相等)
 $\because \angle 2 + 60^\circ = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ ，
 $\therefore L_2 \parallel L_3$ (同側內角互補)
- (2) $\angle 3 = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ = \angle y$ ，
 $\angle 5 = 100^\circ, \angle 6 = 60^\circ$ ，
 $\angle 4 = 360^\circ - 96^\circ - 100^\circ - 60^\circ$
 $= 104^\circ = \angle x = \angle z$

如圖， $L \parallel M$ ， $\triangle ABC$ 為正三角形，且 \overline{AE} 平分 $\angle BAD$ ，請問： \overline{AE} 是否平行 \overline{BC} 呢？ $\angle 1$ 的度數為何呢？



解

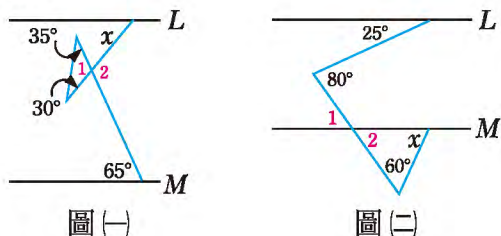
- (1) $\because L \parallel M, \therefore \angle ACB = 4x^\circ + 2x^\circ$ ，
 $60^\circ = 4x^\circ + 2x^\circ, x^\circ = 10^\circ$
 $\Rightarrow \angle BAD = 180^\circ - 60^\circ - (4 \times 10^\circ) = 80^\circ$
 $\therefore \overline{AE}$ 平分 $\angle BAD$
 $\therefore \angle EAB = 80^\circ \div 2 = 40^\circ$
 $\therefore \angle EAB \neq \angle ABC$ ，故 不平行
- (2) $\angle 1 = 2x^\circ = 20^\circ$

2 老師傳授

平行線間的角度關係

學生寫作 2

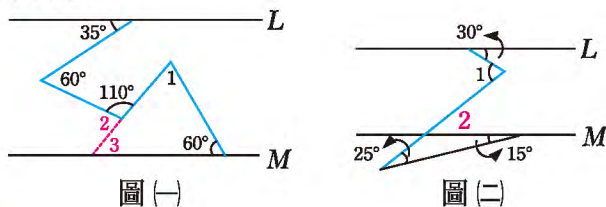
如圖(一)、(二)，當 $L \parallel M$ 時，請求出 $\angle x$ 的度數為何呢？



解

- (1) $\because \angle 2 = \angle 1 = 180^\circ - 35^\circ - 30^\circ = 115^\circ$
 $\Rightarrow 65^\circ + \angle x = 115^\circ \therefore \angle x = 50^\circ$
- (2) $\because L \parallel M \therefore 25^\circ + \angle 1 = 80^\circ, \angle 1 = 55^\circ$
 $\Rightarrow \angle 2 = \angle 1 = 55^\circ,$
 $\angle x = 180^\circ - 60^\circ - \angle 2 = 65^\circ$

如圖(一)、(二)，當 $L \parallel M$ 時，請求出 $\angle 1$ 的度數為何呢？



解

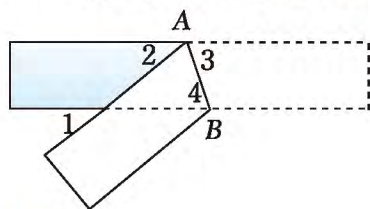
- (1) $\angle 2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ,$
 $35^\circ + \angle 2 = 60^\circ + \angle 3,$
 $35^\circ + 70^\circ = 60^\circ + \angle 3 \Rightarrow \angle 3 = 45^\circ,$
 $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3 - 60^\circ$
 $= 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$
- (2) $\angle 2 = 15^\circ + 25^\circ = 40^\circ$
 $\angle 1 = 30^\circ + \angle 2 = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$

3 老師傳授

平行線的應用

學生寫作 3

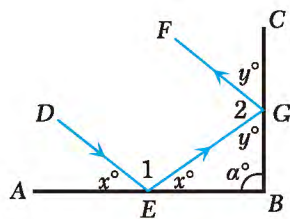
如圖，將長方形紙條沿 AB 摺疊，若 $\angle 1 = 30^\circ$ ，請問： $\angle 4$ 的度數為何呢？



解

- $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ (同位角相等)，
 $\angle 3 = \angle 4 = (180^\circ - \angle 2) \div 2$
 $= (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$

如圖， \overline{AB} 與 \overline{BC} 是兩面呈現 α° 的鏡子，已知 \overline{DE} 光線射向 \overline{AB} 面的鏡子，經過兩次反射之後，入射光線 \overline{DE} 與反射光線 \overline{FG} 平行，請問： α° 是多少？



生活題

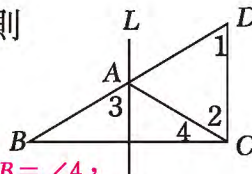
解

- \because 入射角 = 反射角，且 $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \angle 1 + 2x^\circ = 180^\circ,$
 $\angle 2 + 2y^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle 1 + 2x^\circ + \angle 2 + 2y^\circ = 360^\circ,$
 $2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ, x^\circ + y^\circ = 90^\circ$
 $\therefore \alpha^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Let's Go! 同步評量 1

(D) 1. 如右圖， \overline{BC} 的垂直平分線 L 交 \overline{BD} 於 A ， $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，則下列敘述何者錯誤呢？

- (A) $\angle 3 + \angle B = \angle 2 + \angle 4$ (B) $\angle 2 = \angle 3$
 (C) $\angle 1 = \angle 2$ (D) $\angle 1 = \angle 4$



1. $\angle 3 + \angle B = 90^\circ$ ，已知 $\angle B = \angle 4$ ， $\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ ， $\therefore \angle 2 = \angle 3$

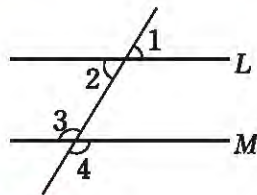
(B) 2. 如右圖，下列有關平行線的敘述，何者正確？

(A) 若 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，可知 $L \parallel M$

(B) 若 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$ ，可知 $L \parallel M$

(C) 若 $\angle 1 = \angle 4$ ，可知 $L \parallel M$

(D) 若 $\angle 2 = \angle 4$ ，可知 $L \parallel M$



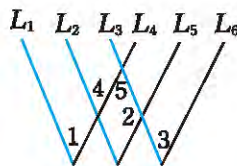
2. $\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$,
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow L \parallel M$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ \Rightarrow L \parallel M$

(C) 3. 如右圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ， $L_4 \parallel L_5 \parallel L_6$ ，已知 $\angle 1 = 52^\circ$ ，請問：

$\angle 2 - \angle 3 = ?$

(A) 84° (B) 80°

(C) 76° (D) 72°



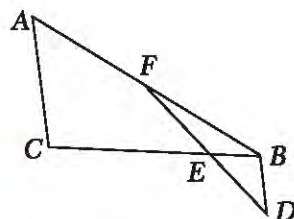
3. $\therefore \angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 3$,
 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 5 = 128^\circ$,
 $\angle 2 - \angle 3 = 128^\circ - 52^\circ = 76^\circ$

(A) 4. 如右圖， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ， $\angle BDF = 45^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，

$\angle ACB = 100^\circ$ ，請問： $\angle BFE = ?$

(A) 15° (B) 25°

(C) 35° (D) 45°



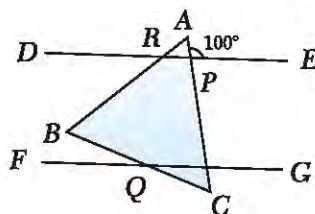
4. $\therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$
 $\therefore \angle BAC + \angle ABD = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD = 120^\circ$
 $\triangle BFD$ 中， $\angle BFE + 120^\circ + 45^\circ = 180^\circ$
 $\therefore \angle BFE = 15^\circ$

(B) 5. 如右圖， $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ ，若 $\triangle ABC$ 為正三角形，且 $\angle APE = 100^\circ$ ，

請問： $\angle BQF = ?$

(A) 15° (B) 20°

(C) 25° (D) 30°



5. $\angle ARP + \angle A = 100^\circ$,
 $\angle ARP = 40^\circ = \angle DRB$,
 $\angle DRB + \angle BQF = \angle RBQ$,
 $40^\circ + \angle BQF = 60^\circ$, $\angle BQF = 20^\circ$

解題小秘方

第5題： $\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = \angle 1$, $\Rightarrow L \parallel M$, $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1$.

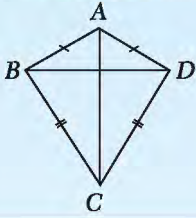
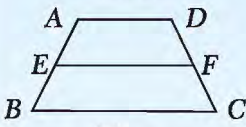
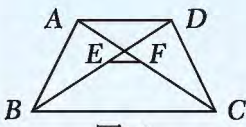
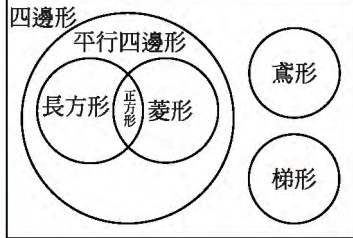
能力二

平行四邊形與其他四邊形

一 平行四邊形家族 (平行四邊形、正方形、矩形、菱形)

<p>(一) 平行四邊形</p>	<p>性質：(1) 任一對角線可將平行四邊形分為兩個全等的三角形 (2) 兩組對邊相等且平行</p> <p>判別：(1) 一組對邊平行且相等 (2) 兩雙對邊分別平行 (3) 兩組對角相等 (4) 兩對角線互相平分</p>
<p>(二) 菱形</p>	<p>定義：四邊相等的四邊形為菱形</p> <p>性質：(1) 對角線平分其頂角 (2) 對角線互相垂直平分 (3) 四邊相等</p> <p>判別：菱形與正方形的判別在於正方形四個角皆為直角。 (正方形是菱形的一種)</p> <p>其它：假設菱形的對角線長為 a、b</p> <p>(1) 菱形面積 = $a \times b \times \frac{1}{2}$ (2) 菱形周長 = $2\sqrt{a^2 + b^2}$</p>

二 特殊四邊形家族 (鳶形、梯形)

<p>(一) 鳶 (箏) 形</p> 	<p>性質：兩對角線互相垂直，其中一對角線被另一對角線所平分</p> <p>判別：鳶形與菱形的判別在於鳶形的兩對角線不互相平分，且不是四邊都等長且兩雙鄰邊相等的四邊形</p> <p>其它：鳶形面積 = 對角線的乘積 $\times \frac{1}{2}$</p>
<p>(二) 梯形</p>  <p>圖一</p>  <p>圖二</p>	<p>定義：一組對邊平行，而另一組對邊不平行的四邊形</p> <p>性質：1. 以等腰梯形為例： (1) 兩底角相等 (2) 兩腰相等 (3) 兩對角線相等 2. 梯形的中線平行於兩底，且其長等於兩底和的一半 $\overline{EF} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC})$ (如圖一) 3. 梯形兩對角線中點所成的線段平行於兩底，且其長等於兩底差的絕對值的一半，$\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AD} - \overline{BC}$ (如圖二)</p> <p>其它：梯形面積 = (上底 + 下底) \times 高 $\times \frac{1}{2}$ = 中線長 \times 高</p>
<p>四邊形的家譜 (文氏圖)</p>	

4

老師

傳授

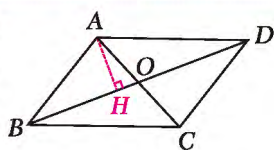
平行四邊形的角度、周長與面積

學生

富作

4

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點，若 $\angle BAD$ 的兩倍比 $\angle ABC$ 的三倍多 85° ，且 $\overline{AC} = 8\text{ cm}$ ， $\overline{BD} = 10\text{ cm}$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，請問：

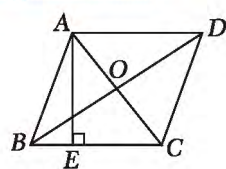


- $\angle BCD - \angle ADC = ?$
- 平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？

解

- 設 $\angle ABC$ 為 x° ， $2\angle BAD = 3\angle ABC + 85^\circ$ ，
 又 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，
 $\therefore x + (3x + 85^\circ) \div 2 = 180^\circ$ ，
 $x = \angle ABC = 55^\circ$ ， $\angle BAD = 125^\circ$ ，
 故 $\angle BCD - \angle ADC = 125^\circ - 55^\circ = 70^\circ$
- 做輔助線 $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ ，
 在 $\triangle AOH$ 中， $\angle AOH = 60^\circ$
 $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 4$ ， $\therefore \overline{AH} = 2\sqrt{3}$
 $\Rightarrow ABCD$ 面積 = $2\triangle ABD$ 面積
 $= 2 \times 10 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 20\sqrt{3} (\text{cm}^2)$

如圖， $ABCD$ 為平行四邊形， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AE} = 12\text{ cm}$ ， $\overline{CD} = 13\text{ cm}$ ，且 $\triangle AOD$ 面積 = 51 cm^2 ，若 $3\angle BCD = 4\angle ABC + 71^\circ$ ，請問：



- $\angle BAD - \angle ADC = ?$
- 平行四邊形 $ABCD$ 的周長為何？

解

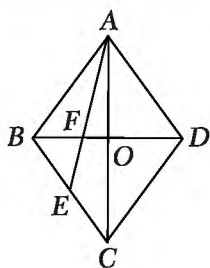
- 設 $\angle ABC = x^\circ$ ， $3\angle BCD = 4x + 71^\circ$
 $\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ， $\angle BCD = 180^\circ - x^\circ$
 $3(180^\circ - x^\circ) = 4x + 71^\circ$ ，
 $x^\circ = 67^\circ = \angle ABC = \angle ADC$ ，
 $\angle BAD = 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$ ；
 $\angle BAD - \angle ADC = 113^\circ - 67^\circ = 46^\circ$
- $ABCD$ 面積
 $= 4\triangle AOD$ 面積 = $4 \times 51 = 204 (\text{cm}^2)$
 $\overline{BC} = 204 \div 12 = 17 (\text{cm})$ ，
 平行四邊形 $ABCD$ 周長
 $= 2 \times (17 + 13) = 60 (\text{cm})$

5 老師 傳授

菱形的周長與面積

學生 習作 5

如圖， $ABCD$ 為菱形， E 點為 \overline{BC} 的中點，且 $\overline{BF} : \overline{FO} = 2 : 1$ ，若 \overline{OF} 的長為 5 公分，菱形 $ABCD$ 面積為 600 平方公分，請問：此菱形的周長為何呢？



解

$$\begin{aligned} \because \overline{BF} : \overline{FO} &= 2 : 1 \\ \therefore \overline{BO} &= 3\overline{OF} = 15, \overline{BD} = 30 \\ \because \overline{AC} \times \overline{BD} \times \frac{1}{2} &= 600, \overline{AC} \times \overline{BD} = 1200, \\ \therefore \overline{AC} &= 1200 \div 30 = 40 \\ \text{菱形 } ABCD \text{ 周長} \\ &= 2\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2} = 2\sqrt{40^2 + 30^2} = \underline{100 \text{ (公分)}} \end{aligned}$$

假設菱形的周長為 60 公分，兩對角線長為 18 公分與 x 公分，請問：(1) $x = ?$ (2) 菱形的面積為何？

解

$$\begin{aligned} (1) \text{ 菱形的一邊長} &= 60 \div 4 = 15, \\ \text{根據商高定理} & \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 15^2, \\ 81 + \frac{x^2}{4} &= 225, \frac{x^2}{4} = 144, x^2 = 576, \\ x &= \pm 24 \text{ (負不合)} \\ (2) \text{ 菱形面積} &= (24 \times 18) \times \frac{1}{2} = \underline{216 \text{ (平方公分)}} \end{aligned}$$

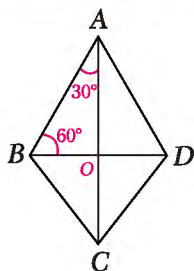


6 老師 傳授

梯形與鳶形

學生 習作 6

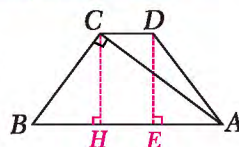
如圖，鳶形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AD} = 12$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = 10$ ，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ，請問：鳶形 $ABCD$ 的面積為何呢？



解

$$\begin{aligned} \triangle ABD \text{ 中, } \because \overline{AB} &= \overline{AD}, \\ \angle BAD &= 60^\circ, \triangle ABD \text{ 為正三角形,} \\ \Rightarrow \overline{AB} &= \overline{AD} = \overline{BD} = 12, \\ \text{在直角 } \triangle ABO \text{ 中依照商高數比例可知,} \\ \overline{AO} &= 6\sqrt{3}, \text{ 在 } \triangle BOC \text{ 中,} \\ \overline{CO} &= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8, \\ \therefore \overline{AC} &= \overline{AO} + \overline{CO} = 6\sqrt{3} + 8, \overline{BD} = 12 \\ \text{鳶形面積} &= 12(6\sqrt{3} + 8) \div 2 \\ &= \underline{36\sqrt{3} + 48 \text{ (平方單位)}} \end{aligned}$$

如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 15$ ， $\overline{AB} = 25$ ，請問：梯形 $ABCD$ 的面積為何呢？

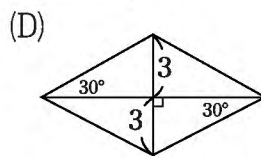
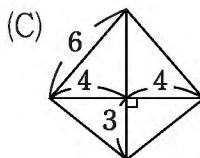
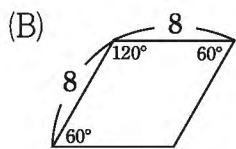
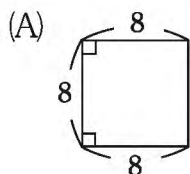


解

$$\begin{aligned} \text{作輔助線 } \overline{CH}, \overline{DE}, \text{ 分別垂直 } \overline{AB}, \\ \overline{AC} &= \sqrt{25^2 - 15^2} = 20, \\ \overline{CH} &= (15 \times 20) \div 25 = 12, \\ \overline{AE} &= \overline{BH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9, \\ \therefore \overline{CD} &= \overline{HE} = 25 - 18 = 7, \\ \text{梯形面積} &= (7 + 25) \times 12 \times \frac{1}{2} \\ &= \underline{192 \text{ (平方單位)}} \end{aligned}$$

Let's Go! 同步 評量 2

(C) 1. 若「四邊等長的四邊形稱為菱形」，則下列哪一個四邊形不一定是菱形呢？



1. (C) 為菱形

(A) 2. 若 $ABCD$ 為平行四邊形, $\overline{AB} = x + y$, $\overline{BC} = x - 2y + 40$, $\overline{CD} = 2x - 18$, $\overline{AD} = x + 3y$, 請問: $ABCD$ 的周長為何呢?

- (A) 168 (B) 186 (C) 164 (D) 146

2. $x + 3y = x - 2y + 40 \Rightarrow y = 8$,
 $x + y = 2x - 18 \Rightarrow x = 26$,
 周長 = $(34 + 50) \times 2 = 168$

(B) 3. 一等腰梯形腰長 13 公分, 高 12 公分, 上底長 8 公分, 則其面積為多少平方公分?

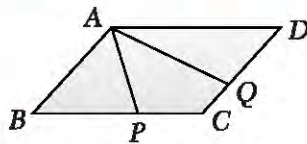
- (A) 165 (B) 156 (C) 184 (D) 148

3. 面積 = $(8 + 18) \times 12 \times \frac{1}{2} = 156$

(D) 4. 如右圖, $ABCD$ 為平行四邊形, 分別在 \overline{BC} 、 \overline{CD} 上取 P 、 Q 兩點, 使得 $\angle APC$ 與 $\angle AQC$ 互補, 若 $\angle PAQ = 48^\circ$, 請問: $\angle ABC$ 的度數為何呢?

- (A) 42° (B) 44°
 (C) 46° (D) 48°

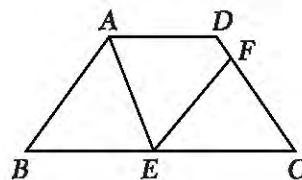
4. $\angle C = 360^\circ - (180^\circ + 48^\circ) = 132^\circ$,
 $\angle ABC = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$



(C) 5. 如右圖, 等腰梯形 $ABCD$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{CD}$, $\overline{BE} = \overline{CF}$, $\angle ADC = 110^\circ$, $\angle DAE = 60^\circ$, 請問: $\angle DFE = ?$

- (A) 100° (B) 110°
 (C) 120° (D) 130°

5. $\angle C = \angle B = 70^\circ$, $\angle BAE = 50^\circ$
 因為 $\overline{AB} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{CF}$
 所以 $\angle CFE = 60^\circ$, 故 $\angle DFE = 120^\circ$



解題小備方 第 2 題: 平行四邊形兩組對邊平行且相等。

能力三 三角形與四邊形中點連線

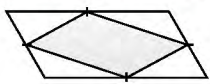
一 幾何圖形的中點連線性質

<p>1. 三角形的中點連線性質</p>		<p>如圖, 在 $\triangle ABC$ 中, D 點、E 點分別是 \overline{AB}、\overline{AC} 的中點, 則有下列性質:</p> <p>(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$</p> <p>(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$</p> <p>(3) $\triangle ADE$ 面積 = $\frac{1}{4} \triangle ABC$ 面積</p>
<p>2. 梯形的中點連線性質</p>		<p>如圖, 在梯形 $ABCD$ 中, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, E 點、F 點分別是 \overline{AB}、\overline{DC} 的中點, 則有下列性質:</p> <p>(1) $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$</p> <p>(2) $\overline{EF} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC})$</p>
<p>3. 四邊形的中點連線性質</p>		<p>如圖, 任意四邊形 $ABCD$, 其各邊中點為 P、Q、R、S, 則有下列性質:</p> <p>(1) $PQRS$ 必為平行四邊形</p> <p>(2) $PQRS$ 的周長 = $\overline{AC} + \overline{BD}$</p> <p>(3) $PQRS$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times \square ABCD$ 面積</p>

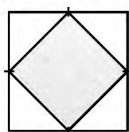
二 四邊形綜合性質歸納

構成 四邊形	1. 連接各邊中點	2. 角平分線圍成的形狀
平行四邊形	平行四邊形 (圖一)	矩形 (圖七)
正方形	正方形 (圖二)	無
矩形	菱形 (圖三)	長方形 (圖八)
菱形	矩形 (圖四)	無
鳶形	矩形 (圖五)	無
等腰梯形	菱形 (圖六)	鳶形 (圖九)

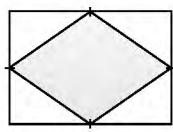
1. 連接各邊中點所成圖形



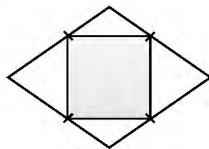
圖一



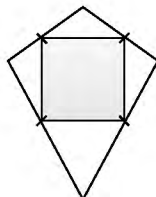
圖二



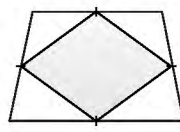
圖三



圖四

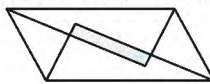


圖五

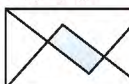


圖六

2. 各角平分線圍成的圖形



圖七



圖八



圖九

7 老師傳授

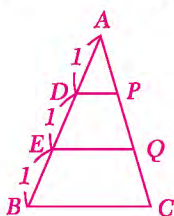
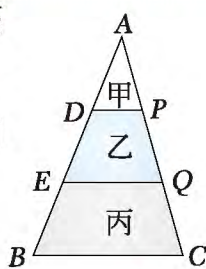
三角形中點連線性質

學生寫作

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 將 \overline{AB} 平均三等分，且 $\overline{DP} \parallel \overline{EQ} \parallel \overline{BC}$ ，請問：甲、乙、丙的面積比為何呢？

解

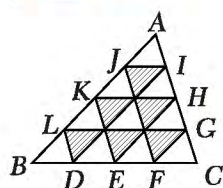
∵ D 、 E 將 \overline{AB} 平均三等分，
 ∴ 假設 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB} = 1$ ，
 ∴ 由圖可知，令 $\overline{DP} = 1$
 根據三角形中點連線性質，
 則 $\overline{EQ} = 2$ ， $\overline{BC} = 2 \times 2 - 1 = 3$ ，
 甲面積：乙面積：丙面積
 = $1^2 : (2^2 - 1^2) : (3^2 - 2^2) = 1 : 3 : 5$



如圖， $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC}$ ， $\overline{LD} \parallel \overline{KE} \parallel \overline{JF} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{GF} \parallel \overline{HE} \parallel \overline{ID} \parallel \overline{AB}$ ，已知 $\overline{AB} = 9$ 、 $\overline{BC} = 8$ 、 $\overline{AC} = 7$ ，請問：斜線部分所有三角形周長的總和為多少呢？

解

$$\begin{aligned}
 \text{周長總和} &= 6\overline{JI} + 6\overline{LD} + 6\overline{GF} \\
 &= 6 \times \frac{\overline{BC}}{4} + 6 \times \frac{\overline{AC}}{4} + 6 \times \frac{\overline{AB}}{4} \\
 &= \frac{3}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \\
 &= \frac{3}{2} \times 24 = 36 \text{ (單位)}
 \end{aligned}$$



解題小備方 老師7：面積比 = 邊長的平方比。

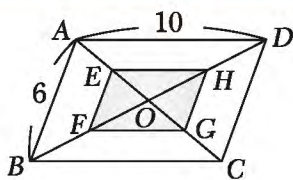
學生7：∵ $\overline{GF} \parallel \overline{HE} \parallel \overline{ID} \parallel \overline{AB}$ ，∴ $\overline{GF} = \frac{1}{2}\overline{HE} = \frac{1}{3}\overline{ID} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ ，其餘依此類推。

8 老師 傳授

四邊形中點連線性質

學生 實作

如圖，平行四邊形 $ABCD$ ， E 、 F 、 G 、 H 分別是 \overline{OA} ， \overline{OB} ， \overline{OC} ， \overline{OD} 的中點，
 假設 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 10$ ，請問：

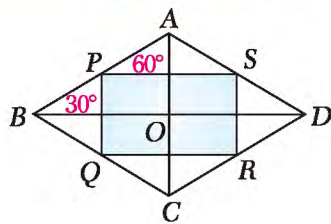


- (1) 四邊形 $EFGH$ 的周長為何呢？
- (2) $EFGH$ 面積與 $ABCD$ 面積的比值為何呢？

解

- (1) $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3$ ， $\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 5$ ，
 $\therefore EFGH$ 周長 $= 2(3 + 5) = 16$ (單位)
- (2) \therefore 面積比 $=$ 邊長的平方比 $=$ 周長的平方比，
 $\therefore EFGH$ 周長 $: ABCD$ 周長 $= 16 : 32 = 1 : 2$
 $\Rightarrow EFGH$ 面積 $: ABCD$ 面積
 $= 1^2 : 2^2 = 1 : 4 \Rightarrow$ 比值為 $\frac{1}{4}$

假設菱形 $ABCD$ 的周長為 32 公分， $\angle A = 120^\circ$ ，請問：菱形 $ABCD$ 四邊中點 P 、 Q 、 R 、 S 所連成的四邊形 $PQRS$ 的周長與面積為何呢？



解

- \therefore 由商高數的比例可知 $\overline{AO} = 4$ ， $\overline{BO} = 4\sqrt{3}$
 $PQRS$ 的周長 $= \overline{AC} + \overline{BD} = 8 + 8\sqrt{3}$ (cm)
 $ABCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ (cm²)
 $PQRS$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 32\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (cm²)

Let's Go! 同步 評量 3

(B) 1. 依序連接一等腰梯形四邊中點所圍成的四邊形為下列何者呢？

- (A) 正方形 (B) 菱形 (C) 矩形 (D) 等腰梯形

1. 菱形



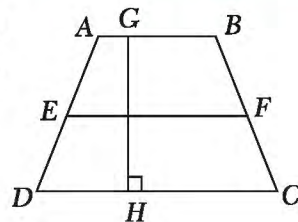
(B) 2. 如右圖， $ABCD$ 為一梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 E 、 F 分別為兩腰 \overline{AD} 與 \overline{BC} 之中點， \overline{GH} 為此梯形的高，則下列哪一個選項可表示為梯形 $ABCD$ 的面積呢？

- (A) $\overline{AB} \times \overline{GH}$ (B) $\overline{EF} \times \overline{GH}$
 (C) $(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{GH}$ (D) $(\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{EF}$

2. 梯形面積

$$= (\overline{AB} + \overline{DC}) \times \frac{1}{2} \times \overline{GH}$$

$$= \overline{EF} \times \overline{GH}$$



(C) 3. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，作 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的內角平分線，交於 P 、 Q 、 R 、 S 四點，則四邊形 $PQRS$ 一定是下列哪一種圖形？

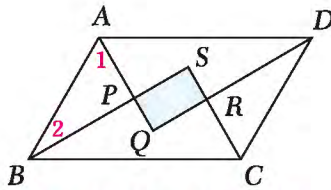
- (A) 正方形 (B) 菱形
 (C) 矩形 (D) 等腰梯形

3. $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，

$$\Rightarrow \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ，$$

$$\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = 90^\circ，\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ，$$

同理 $\angle Q = \angle S = \angle SRQ = 90^\circ$ ， $\therefore PQRS$ 為矩形



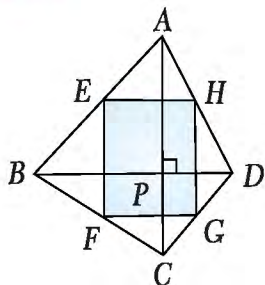
(D) 4. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 P ，又 E 、 F 、 G 、 H 為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 的中點，若 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BD} = 6$ ，則四邊形 $EFGH$ 的面積為何？

- (A) 41 (B) 24
 (C) 21 (D) 12

4. 四邊形 $EFGH$ 面積

$$= \text{四邊形 } ABCD \text{ 面積} \times \frac{1}{2}$$

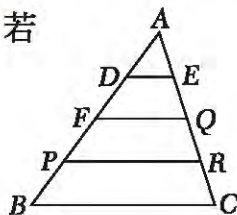
$$= (8 \times 6) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 12$$



(A) 5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{FP} = \overline{PB}$ ， $\overline{AE} = \overline{EQ} = \overline{QR} = \overline{RC}$ ，若 $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{DE} + \overline{FQ} + \overline{PR} = ?$

- (A) 18 (B) 20
(C) 22 (D) 24

5. $\overline{FQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 6$ ， $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{FQ} = 3$ ，
 $\overline{PR} = \frac{1}{2}(\overline{FQ} + \overline{BC}) = 9 \Rightarrow \overline{DE} + \overline{FQ} + \overline{PR} = 18$



實力評量

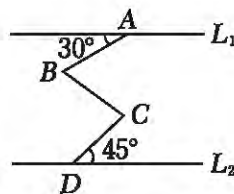
生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(B) 1. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle BCD - \angle ABC = ?$

- (A) 10°
(B) 15°
(C) 20°
(D) 25°

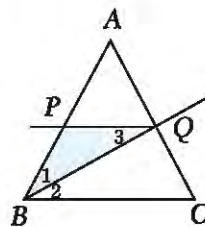
1. $\because L_1 \parallel L_2 \therefore 30^\circ + \angle BCD = \angle ABC + 45^\circ$ ，
 $\angle BCD - \angle ABC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$



(D) 2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，請問：下列敘述何者錯誤呢？

- (A) $\overline{BP} = \overline{PQ}$
(B) $\overline{PQ} = \overline{CQ}$
(C) $\overline{AP} = \overline{AQ}$
(D) $\overline{BP} = \overline{AQ}$

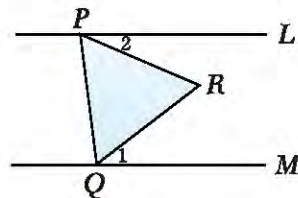
2. (A) $\because \angle 1 = \angle 3 \therefore \overline{BP} = \overline{PQ}$
(B) $\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC} \therefore \overline{BP} = \overline{CQ} = \overline{PQ}$
(C) $\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC} \therefore \overline{AP} = \overline{AQ}$
(D) 條件不足，無法推得



(A) 3. 如右圖， $L \parallel M$ ， $\triangle PQR$ 為正三角形，請問： $\angle 1 + \angle 2 = ?$

- (A) 60°
(B) 65°
(C) 70°
(D) 75°

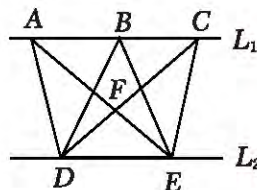
3. $\angle 1 + \angle 2 = \angle PRQ = 60^\circ$



(A) 4. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， \overline{AE} 交 \overline{CD} 於 F 點， $\triangle ADF$ ， $\triangle BDE$ ， $\triangle DEF$ 與 $\triangle CFE$ 的面積分別為 a 、 b 、 c 與 d ，請問：下列敘述何者錯誤？

- (A) $a = b$
(B) $a = d$
(C) $b = a + c$
(D) $b = c + d$

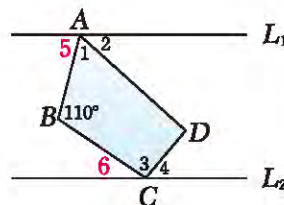
4. (A) 不成立
(B) $\because a + c = c + d \Rightarrow a = d$
(C) $\triangle BDE$ 與 $\triangle ADE$ 同底等高
(D) $\triangle BDE$ 與 $\triangle CDE$ 同底等高



◎(C) 5. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，點 A 在 L_1 上，點 C 在 L_2 上， $\angle ABC = 110^\circ$ 。若 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，請問： $\angle ADC = ?$

- (A) 115°
(B) 120°
(C) 125°
(D) 130°

5. $\because \angle 5 + \angle 6 = 110^\circ$ ， $\angle 5 = 180^\circ - 2\angle 1$ ，
 $\angle 6 = 180^\circ - 2\angle 3 \Rightarrow 360^\circ - 2(\angle 1 + \angle 3) = 110^\circ$ ，
 $\angle 1 + \angle 3 = 125^\circ$ ，
又 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle ADC = 125^\circ$



6. (A) 兩雙對邊相等；(B)、(C) 有可能是等腰梯形；(D) 有可能是梯形

(A) 6. 四邊形 $ABCD$ 滿足下列何種條件時，才能確定其為平行四邊形呢？

- (A) $\angle A = \angle C$ ，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (B) $\angle A = \angle B$ ，且 $\angle C = \angle D$
 (C) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (D) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$

(C) 7. 等腰梯形的四個內角平分線，可能會圍成以下何種圖形呢？

- (A) 正方形 (B) 矩形 (C) 鳶形 (D) 菱形

7. 鳶(等)形

(C) 8. 三梯形其對應高比為 $1:2:3$ ，其對應中線比為 $2:3:5$ ，請問：其面積比為何呢？

- (A) $1:2:3$ (B) $1:4:9$ (C) $2:6:15$ (D) $4:9:25$

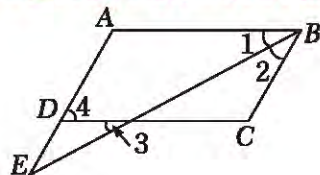
8. 面積比 = $(r \times 2k) : (2r \times 3k) : (3r \times 5k) = 2rk : 6rk : 15rk = 2 : 6 : 15$

(B) 9. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle E = 40^\circ$ ，請問：

$\angle 3 + \angle 4 + \angle C = ?$

- (A) 210° (B) 220°
 (C) 230° (D) 240°

9. $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ ， $\angle 1 = \angle 3$ ，
 $40^\circ + \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ ，
 $\angle 2 = 40^\circ = \angle 1$ ， $\angle 4 = 80^\circ$ ， $\angle C = 100^\circ$ ，
 $\angle 3 + \angle 4 + \angle C = 40^\circ + 80^\circ + 100^\circ = 220^\circ$

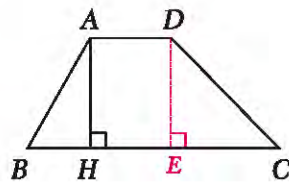


(B) 10. 如右圖， $ABCD$ 為一梯形，已知上底 $\overline{AD} = 2$ ，下底 $\overline{BC} = 7$ ，

兩腰各為 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ，請問：此梯形的高為何呢？

- (A) $\frac{13}{5}$ (B) $\frac{12}{5}$
 (C) $\frac{13}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$

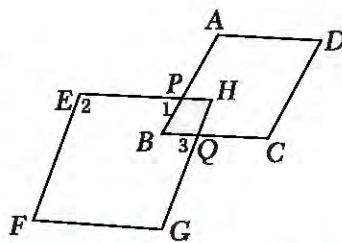
10. 令 $BH = x$ ， $CE = 5 - x$ ， $3^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2$ ，
 $9 - x^2 = 16 - (25 - 10x + x^2)$ ，
 $9 - 16 + 25 = 10x$ ， $x = \frac{9}{5}$ ，
 $\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\frac{9}{5})^2} = \frac{12}{5}$



(A) 11. 如右圖，有兩個透明的滑鼠墊其形狀均為平行四邊形，今將其一部分重疊，得四邊形 $PBQH$ ，已知 $\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ， $\angle 3 = 65^\circ$ ，請問： $\angle B$ 的度數為何？

- (A) 55° (B) 60°
 (C) 65° (D) 70°

11. $\angle BPH = 130^\circ$ ， $\angle PHQ = 60^\circ$ ，
 $\angle BQH = 115^\circ$ ，
 $\angle B = 360^\circ - (130^\circ + 60^\circ + 115^\circ) = 55^\circ$



(D) 12. 下列何者不是平行四邊形的性質？

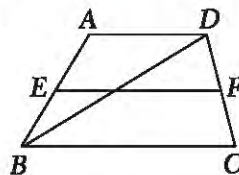
- (A) 兩組對角相等 (B) 兩組對邊相等 (C) 對角線互相平分 (D) 兩條對角線等長

12. 平行四邊形對角線不一定等長

(A) 13. 如右圖，梯形 $ABCD$ 面積被 \overline{BD} 分成 $3:7$ 之兩部分，則梯形 $ABCD$ 被中線 \overline{EF} 所截之兩梯形 $Aefd$ 與 $Ebcf$ 面積比為何？

- (A) $2:3$
 (B) $3:4$
 (C) $3:7$
 (D) $4:5$

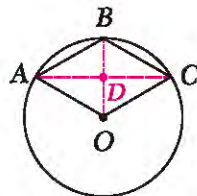
13. $\because \triangle ADB$ 面積： $\triangle BCD$ 面積 = $3:7 \therefore \overline{AD} : \overline{BC} = 3:7$ (同高)
 設 $\overline{AD} = 3r$ ， $\overline{BC} = 7r$ ($r \neq 0$)， $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) = 5r$
 $\Rightarrow \frac{\text{梯形 } Aefd \text{ 面積}}{\text{梯形 } Ebcf \text{ 面積}} = \frac{\frac{1}{2}(3r + 5r)}{\frac{1}{2}(5r + 7r)} = \frac{2}{3}$



◎(C) 14. 如右圖，四邊形 $OABC$ 為菱形，且圓 O 半徑為 6 ，則此菱形面積為多少？

- (A) $6\sqrt{3}$ (B) 6
 (C) $18\sqrt{3}$ (D) 31

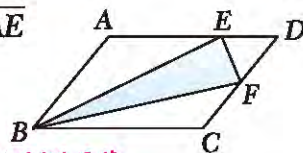
14. $\overline{AD} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ，
 \therefore 菱形面積 = $6 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$



解題小秘方 第 8 題：梯形面積 = 高 \times 中線，故將 (對應高比) \times (對應中線比) = (梯形面積比)。

第 14 題：菱形面積 = $\frac{1}{2} \times$ 對角線乘積。

◎(D) 15. 如右圖， $ABCD$ 是一平行四邊形，其面積是 180， $\overline{CF} = \overline{DF}$ ， $\overline{AE} = 2\overline{ED}$ ，則 $\triangle BEF$ 之面積是多少平方單位？



- (A) 30 (B) 40
(C) 50 (D) 60

15. $\triangle BEF$ 面積 = $ABCD$ 面積 - $\triangle AEB$ 面積 - $\triangle DEF$ 面積 - $\triangle BCF$ 面積
 $= 180 - \frac{180}{3} - \frac{180}{12} - \frac{180}{4} = 60$

基礎題

(B) 1. 如右圖，有一菱形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 4$ ，面積為 $2\sqrt{2}$ 。若 \overline{AD} 上有一點 M ，則 M 到直線 BC 的距離為何？

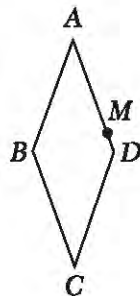
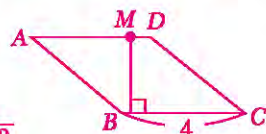
- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $8\sqrt{2}$

1. 將圖形旋轉成如圖

因為菱形也是平行四邊形

$\therefore M$ 點到直線 BC 的距離 = 底邊 BC 的高

$\Rightarrow M$ 點到直線 BC 的距離 = $2\sqrt{2} \div 4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$



基礎二

(B) 2. 右圖中有直線 L 截過兩直線 L_1 、 L_2 後所形成的八個角。由下列哪一個選項中的條件可判斷 $L_1 \parallel L_2$ ？

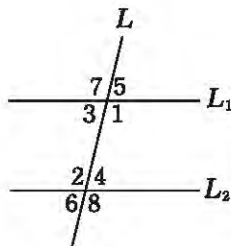
- (A) $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$
(B) $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$
(C) $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$
(D) $\angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$

2. $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$ ，又 $\angle 4 + \angle 8 = 180^\circ$

$\angle 3 + \angle 8 = \angle 4 + \angle 8$

$\angle 3 = \angle 4$ (內錯角相等)

$\therefore L_1 \parallel L_2$



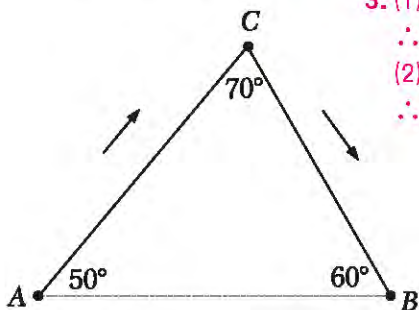
(A) 3. 圖(一)、圖(二)、圖(三)分別表示甲、乙、丙三人由 A 地到 B 地的路線圖。已知

甲的路線為： $A \rightarrow C \rightarrow B$

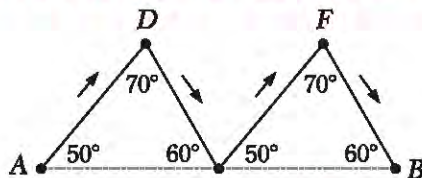
乙的路線為： $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$ ，其中 E 為 \overline{AB} 的中點。

丙的路線為： $A \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow B$ ，其中 J 在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AJ} > \overline{JB}$

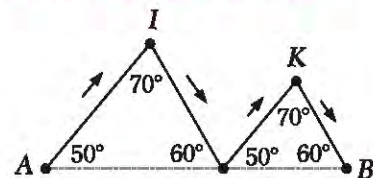
若符號「 \rightarrow 」表示「直線前進」，則根據圖(一)、圖(二)、圖(三)的數據，判斷三人行進路線長度的大小關係為何？



圖(一)



圖(二)



圖(三)

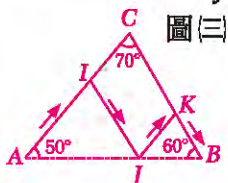
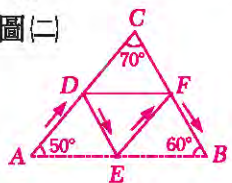
- (A) 甲 = 乙 = 丙 (B) 甲 < 乙 < 丙
(C) 乙 < 丙 < 甲 (D) 丙 < 乙 < 甲

3. (1) 由圖(二)延長 \overline{AD} 、 \overline{BF} 交於 C 點，四邊形 $CDEF$ 為平行四邊形

$\therefore \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FB} = \overline{AD} + \overline{CF} + \overline{DC} + \overline{FB} = \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CF} + \overline{FB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

(2) 由圖(三)延長 \overline{AI} 、 \overline{BK} 交於 C 點，四邊形 $CIJK$ 為平行四邊形

$\therefore \overline{AI} + \overline{IJ} + \overline{JK} + \overline{KB} = \overline{AI} + \overline{CK} + \overline{IC} + \overline{KB} = \overline{AI} + \overline{IC} + \overline{CK} + \overline{KB} = \overline{AC} + \overline{CB}$



基礎一

解題小 備方 第 15 題： $\triangle ABE = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 180$ ， $\triangle DEF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 180$ ， $\triangle BCF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 180$ 。

- (B) 4. 將長方形 $ABCD$ 分為甲、乙、丙、丁四個全等的小長方形，如右圖所示，其中 $E、F、G$ 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC} = 4$ ， $\overline{AB} = 8$ 。若在此四個小長方形內找一點 H ，使得 $\overline{EH} = 3$ ， $\overline{GH} = 6$ ，則 H 在下列哪一個長方形內？



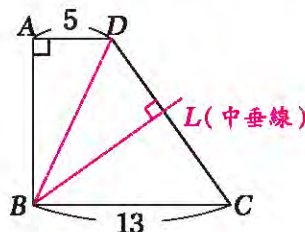
- (A) 甲
(B) 乙
(C) 丙
(D) 丁

4. $6 - 3 < 8 < 6 + 3 \Rightarrow 3 < 8 < 9$,
H 點一定落在乙中



37 基測二

- (C) 5. 如右圖，在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BC} = 13$ 。若作 \overline{CD} 的中垂線恰可通過 B 點，則 $\overline{AB} = ?$



- (A) 8
(B) 9
(C) 12
(D) 18

5. $\because \overline{BD} = \overline{BC} \therefore \overline{AB} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

37 基測二

- (C) 6. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $M、N$ 兩點分別是 $\overline{AB}、\overline{CD}$ 的中點，且長方形 $AMND$ 分成甲、乙兩長方形，長方形 $MBCN$ 分成丙、丁兩長方形。若面積比甲：乙 = 7：3，丙：丁 = 5：9，則乙：丙 = ？

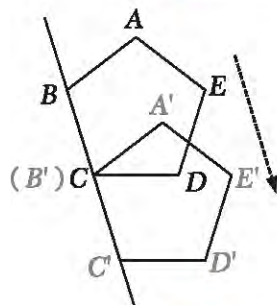


- (A) 1 : 1
(B) 3 : 5
(C) 21 : 25
(D) 27 : 35

6. $\frac{3}{7+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \Rightarrow$ 乙的面積 = $\frac{3}{20} \times ABCD$ 面積
 $\frac{5}{5+9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{28} \Rightarrow$ 丙的面積 = $\frac{5}{28} \times ABCD$ 面積
 \therefore 乙：丙 = $\frac{3}{20} : \frac{5}{28} = 21 : 25$

37 基測二

- (C) 7. 如右圖，將五邊形 $ABCDE$ 沿直線 BC 往下平移，使得新五邊形 $A'B'C'D'E'$ 的頂點 B' 與 C 點重合。若 $\angle A = 103^\circ$ ， $\angle E = 110^\circ$ ， $\angle D = 113^\circ$ ， $\angle B = 115^\circ$ ，則 $\angle A'CD = ?$

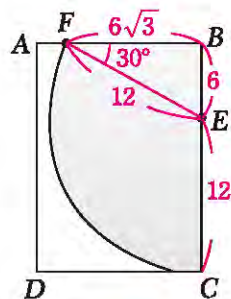


- (A) 30°
(B) 32°
(C) 34°
(D) 36°

7. 五邊形內角和 = $180^\circ \times 3 = 540^\circ$
 $\angle BCD = 540^\circ - (103^\circ + 110^\circ + 113^\circ + 115^\circ) = 99^\circ$
 $\angle A'CB = 180^\circ - \angle A'CC' = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
 $\angle A'CD = \angle BCD - \angle A'CB = 99^\circ - 65^\circ = 34^\circ$

37 基測二

- (A) 8. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 為矩形， $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{AB} = 8\sqrt{3}$ ， E 點在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BE} = 6$ 。以 E 為圓心，12 為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 F ，求圖中灰色部分面積為何？



- (A) $48\pi + 18\sqrt{3}$
(B) $72\pi - 18\sqrt{3}$
(C) $120\pi + 9\sqrt{3}$
(D) 36π

8. 在直角 $\triangle FBE$ 中， $\because \overline{EF} = 12$ ， $\overline{BE} = 6$ ， $\overline{FB} = 6\sqrt{3}$
 $\therefore \angle FEB = 60^\circ$ ， $\angle FEC = 120^\circ$
 $\triangle FEB$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$
扇形 FEC 面積 = $12 \times 12 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 48\pi$
灰色面積 = $48\pi + 18\sqrt{3}$

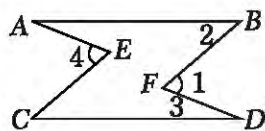
37 基測二

基測趨勢題

(B) 1. 如右圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AE} \parallel \overline{FD}$ ， $\overline{CE} \parallel \overline{FB}$ ， $\angle 2 = 45^\circ$ ， $\angle 3 = 30^\circ$ ，請問： $\angle 4 + \angle 1$ 的度數為何？

- (A) 140° (B) 150°
(C) 160° (D) 170°

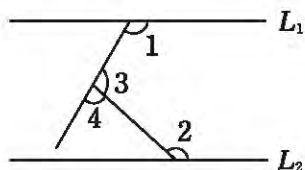
1. $\angle 1 = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$
 $\therefore \angle 1 = \angle 4 \therefore \angle 1 + \angle 4 = 150^\circ$



(C) 2. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $\angle 1 = 120^\circ$ ， $\angle 2 = 138^\circ$ ，請問： $\angle 4$ 的度數為何？

- (A) 49° (B) 50°
(C) 78° (D) 92°

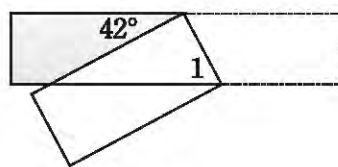
2. $\therefore \angle 3 = 360^\circ - (120^\circ + 138^\circ) = 102^\circ$
 $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$



(C) 3. 一條等寬的紙條折疊如右圖，則 $\angle 1 = ?$

- (A) 65° (B) 67°
(C) 69° (D) 71°

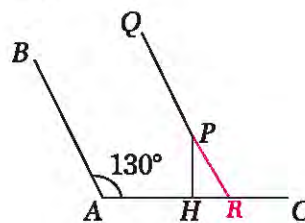
3. $\angle 1 = (180^\circ - 42^\circ) \div 2 = 69^\circ$



(B) 4. 如右圖， $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ ， $\overline{PH} \perp \overline{AC}$ ，若 $\angle BAC = 130^\circ$ ，則 $\angle QPH = ?$

- (A) 120°
(B) 140°
(C) 150°
(D) 160°

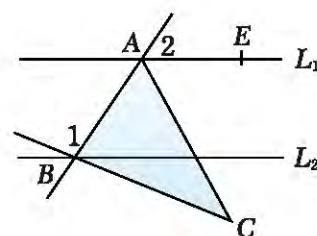
4. 延長 \overline{QP} 交 \overline{AC} 為 R 點，則 $\angle PRH = 50^\circ$ ，
 $\angle QPH = 50^\circ + 90^\circ = 140^\circ$



(D) 5. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， \overline{AC} 平分 $\angle EAB$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 50^\circ$ ，則 $\angle C$ 的度數為何？

- (A) 32°
(B) 33°
(C) 34°
(D) 35°

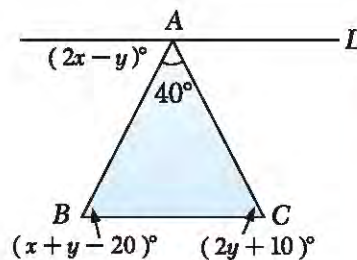
5. $\angle 1 = \angle C + \angle BAC$
 $\Rightarrow 100^\circ = \angle C + 65^\circ$
 $\Rightarrow \angle C = 35^\circ$



(B) 6. 如右圖，若 $L \parallel \overline{BC}$ ，則 $x + y = ?$

- (A) 62
(B) 82
(C) 92
(D) 100

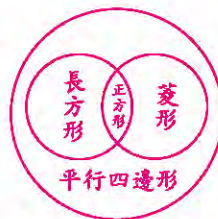
6. $\begin{cases} 2x - y = x + y - 20 \\ 2x - y + 40 + 2y + 10 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -20 \\ 2x + y = 130 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 48 \\ y = 34 \end{cases} \Rightarrow x + y = 82$



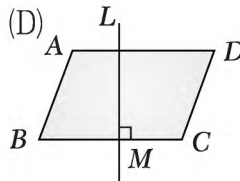
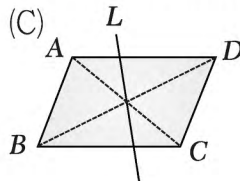
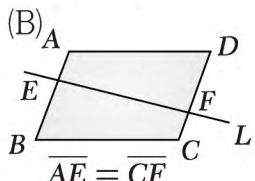
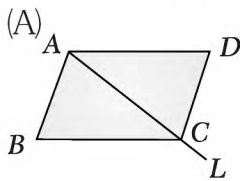
(B) 7. 下列敘述何者錯誤？

- (A) 假設平行四邊形具有性質 A，則菱形也具有性質 A
(B) 假設長方形具有性質 B，則平行四邊形也具有性質 B
(C) 假設長方形具有性質 C，則正方形也具有性質 C
(D) 假設菱形具有性質 D，則正方形也具有性質 D

7.



(D) 8. 下列哪一條直線 L 不一定可以把平行四邊形 $ABCD$ 的面積平分呢？



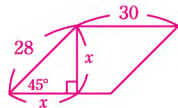
8. (D) 平行四邊形被折成兩個梯形後 (上底 + 下底) 不一定相同

L 是 \overline{BC} 的中垂線

(A) 9. 若平行四邊形相鄰兩邊長為 28 與 30，且此兩邊之夾角為 45° ，其面積為多少平方單位？

9. $x^2 + x^2 = 28^2$, $x = 14\sqrt{2}$, 面積 = $30 \times 14\sqrt{2} = 420\sqrt{2}$

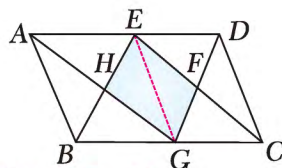
- (A) $420\sqrt{2}$ (B) $320\sqrt{2}$
(C) $240\sqrt{2}$ (D) $230\sqrt{2}$



(B) 10. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， E 、 G 分別為 \overline{AD} 、 \overline{BC} 的中點，若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 120 平方公分，請問：四邊形 $EHGF$ 面積為何呢？

10. 連接 \overline{EG} ，

則四邊形 $EHGF$ 面積 = $\frac{1}{4} \times ABCD$ 面積 = 30



- (A) 20 (B) 30
(C) 40 (D) 50

(C) 11. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ ，若 $\overline{AF} : \overline{EF} = 1 : 6$ ，且 $\triangle ABF$ 面積 = 16 cm^2 ，則平行四邊形 $ABCD$ 面積為多少？

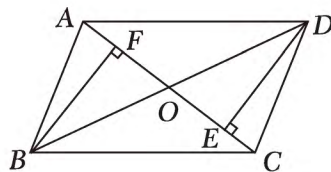
11. 設 $\overline{AF} = k$, $\overline{EF} = 6k$

$\therefore \overline{OA} = \overline{AF} + \overline{OF} = 4k$,

$\triangle ABO$ 面積 = $4 \triangle ABF$ 面積 = $4 \times 16 = 64$,

$ABCD$ 面積 = $64 \times 4 = 256 \text{ (cm}^2\text{)}$

- (A) 144 (B) 196
(C) 256 (D) 265

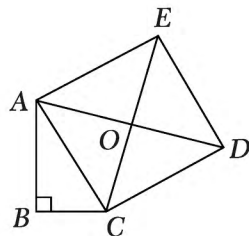


(D) 12. 如右圖， $\angle ABC = 90^\circ$ ，以 \overline{AC} 為邊作一正方形 $ACDE$ ， O 點為兩對角線之交點，假設 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，請問： $\triangle AOC$ 的面積為多少平方單位？

12. $\overline{AC} = 10$

$\triangle AOC$ 面積 = $\frac{1}{4} \times ACDE$ 面積 = $\frac{1}{4} \times 100 = 25$

- (A) 22 (B) 23
(C) 24 (D) 25

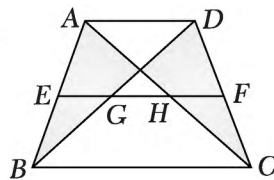


(B) 13. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，兩邊中點連線長 $\overline{EF} = 14$ ，且 $\overline{AD} : \overline{BC} = 2 : 5$ ，請問： \overline{GH} 為何呢？

13. 令 $\overline{AD} = 2r$, $\overline{BC} = 5r$, $(2r + 5r) \times \frac{1}{2} = 14$, $r = 4$,

$\overline{GH} = (\overline{BC} - \overline{AD}) \times \frac{1}{2} = (20 - 8) \times \frac{1}{2} = 6$ (單位)

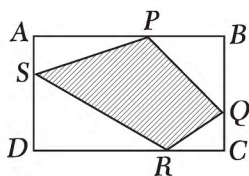
- (A) 5 (B) 6
(C) 7 (D) 8



(D) 14. 如右圖，在長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AP} = 6$ ， $\overline{BQ} = 4$ ， $\overline{CR} = 3$ ， $\overline{SD} = 4$ ，請問：斜線部分面積為何呢？

14. 斜線面積
= $(6 \times 10) - \frac{1}{2} [(2 \times 6) + (4 \times 7) + (3 \times 2) + (4 \times 4)]$
= 29

- (A) 26 (B) 27
(C) 28 (D) 29

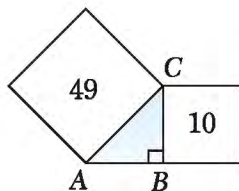


解題小偏方 第 8 題：若分割成三角形需符合同底等高，若分割成梯形需符合同高同中線。

第 13 題： $\overline{EF} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC})$ 、 $\overline{GH} = \frac{1}{2} (\overline{BC} - \overline{AD})$ 。

1~4 冊 模 擬 試 題

- (A) 1. 已知 $a \times d = 299$, $b \times c = 323$, 而且 a 、 b 、 c 、 d 是四個連續質數, 求 $(a+d) - (b+c) = ?$
 (A) 0 (B) 8 (C) 12 (D) 13
 1. $13 \times 23 = 299$, $17 \times 19 = 323$
 $\Rightarrow (13+23) - (17+19) = 0$
- (D) 2. 將 7788 作質因數分解, 可得最大質因數為 a , 且此數的相異質因數為 b , 則 $a-b = ?$
 (A) 7 (B) 34 (C) 54 (D) 55
 2. $7788 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 59$, $a-b = 59-4 = 55$
- (C) 3. 育平要用 54 塊邊長為 1 的正方形貼紙, 緊密地貼滿面積為 54 的海綿寶寶, 若海綿寶寶的長為 a 、寬為 b , 已知 $a > b > 1$, 且 a 與 b 的最大公因數為 1, 試問: 長方形的周長可能為下列何者?
 (A) 54 (B) 56 (C) 58 (D) 60
 3. $54 = 1 \times 54$ (不合) $= 2 \times 27$ (合) $= 3 \times 18$ (不合) $= 6 \times 9$ (不合)
 周長 $= 2 \times (2+27) = 58$
- (B) 4. 已知 a 、 b 為正整數且 $a < b$, 若記號「 $a@b$ 」代表從 a 到 b 中所有整數之和, 例如: $1@5 = 1+2+3+4+5 = 15$, 求 $(16@97) - (17@96) = ?$
 (A) 111 (B) 113 (C) 222 (D) 226
 4. 原式 $= \frac{(97+16) \times (97-16+1)}{2} - \frac{(96+17) \times (96-17+1)}{2}$
 $= \frac{113 \times 82 - 113 \times 80}{2} = \frac{113(82-80)}{2} = 113$
- (D) 5. 有 5 個連續偶數, 其中最大的數是 a , 另有 5 個連續奇數, 其中最小的數是 b , 則這 10 個數的總和為下列何者?
 (A) $5a + 5b + 40$ (B) $5a + b$ (C) $5(a+b) - 40$ (D) $5(a+b)$
 5. 小 $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ 大
 $a-8, a-6, a-4, a-2, a$
 $+b, b+2, b+4, b+6, b+8$
 $\Rightarrow 5a + 5b + 20 - 20 = 5a + 5b = 5(a+b)$
- (B) 6. 下列何者是 $-2x^2 - 4x + (x^2 + 2x)^2 - 3$ 因式分解後的結果?
 (A) $(x+3)(x+1)(x-1)^2$ (B) $(x+3)(x-1)(x+1)^2$ (C) $(x-3)(x+1)(x-1)^2$ (D) $(x-3)(x-1)(x+1)^2$
 6. 原式 $= (x^2+2x)^2 - 2x^2 - 4x - 3 = (x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3$
 $\Rightarrow (x^2+2x) \begin{matrix} \times -3 \\ \times 1 \end{matrix}$
 $\Rightarrow (x^2+2x-3)(x^2+2x+1) = (x+3)(x-1)(x+1)^2$
- (D) 7. 利用公式解解方程式 $2x^2 - 5x + c = 0$, 得 $x = \frac{m \pm \sqrt{41}}{4}$, 則下列何者正確?
 (A) $m = -5$ (B) $c = -4$ (C) $c = 2$ (D) $m = 5$
 7. $D = b^2 - 4ac \Rightarrow 41 = (-5)^2 - 4(2) \times c$,
 $c = -2, m = -b = -(-5) = 5$
- (A) 8. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{12}}$ 、 $b = \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{13}}$ 、 $c = \frac{1}{\sqrt{15} - \sqrt{14}}$, 下列有關於 a 、 b 、 c 三數的大小關係, 何者正確?
 (A) $a < b < c$ (B) $a = b = c$ (C) $a > b > c$ (D) $b > c > a$
 8. $a = \frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{12}} = \sqrt{13} + \sqrt{12}$, $b = \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{13}} = \sqrt{14} + \sqrt{13}$
 $c = \frac{1}{\sqrt{15} - \sqrt{14}} = \sqrt{15} + \sqrt{14}$; $\therefore \sqrt{15} > \sqrt{14} > \sqrt{13} > \sqrt{12}$
 $\therefore c > b > a$
- (C) 9. 如右圖, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 分別以 \overline{AC} 、 \overline{BC} 為直徑向外分別作出兩個正方形, 若兩個正方形面積分別為 49 與 10, 則 \overline{AB} 的長度為何?
 (A) $3\sqrt{13}$ (B) $2\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{39}$ (D) $\sqrt{29}$
 9. 以 \overline{AB} 為邊長做出的正方形面積 $= 49 - 10 = 39$
 $\overline{AB}^2 = 39, \overline{AB} = \pm\sqrt{39}$ (負不合)



(D) 10. 有一等差數列 a_1, a_2, \dots, a_{111} 中, $a_2 = 13$ 、 $a_{15} = 91$, 試求 $a_{100} = ?$

- (A) 562 (B) 575 (C) 588 (D) 601

$$10. a_{15} = a_2 + (15-2) \times d$$

$$91 = 13 + 13 \times d, d = 6$$

$$a_{100} = a_2 + (100-2) \times d = 13 + (98 \times 6) = 601$$

(C) 11. 已知 $|a - \frac{2}{7}| = |b - \frac{5}{7}| = \frac{3}{14}$, 試問 $|a - b|$ 之值不可能為下列哪一個數?

- (A) 0
(B) $\frac{3}{7}$
(C) $\frac{4}{7}$
(D) $\frac{6}{7}$

$$11. |a - \frac{2}{7}| = \frac{3}{14} \Rightarrow a - \frac{2}{7} = \pm \frac{3}{14} \Rightarrow a = \frac{2}{7} \pm \frac{3}{14} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ 與 } \frac{1}{14}$$

$$|b - \frac{5}{7}| = \frac{3}{14} \Rightarrow b - \frac{5}{7} = \pm \frac{3}{14} \Rightarrow b = \frac{5}{7} \pm \frac{3}{14} \Rightarrow b = \frac{13}{14} \text{ 與 } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |a - b| = |\frac{1}{2} - \frac{13}{14}| = \frac{3}{7}, |a - b| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 0$$

$$|a - b| = |\frac{1}{14} - \frac{13}{14}| = \frac{6}{7}, |a - b| = |\frac{1}{14} - \frac{1}{2}| = \frac{3}{7}$$

(B) 12. 若長方形鉛筆盒的長寬比為 $\frac{1}{3} : \frac{1}{7}$, 課本的長寬比為 $\frac{1}{7} : \frac{1}{9}$, 且鉛筆盒與課本的周長相同, 則鉛筆盒與課本的面積比值為何?

- (A) $\frac{64}{63}$ (B) $\frac{64}{75}$
(C) $\frac{63}{64}$ (D) $\frac{75}{64}$

$$12. \text{鉛筆盒的長寬比} = \frac{1}{3} : \frac{1}{7} = 7 : 3, \text{令長} = 7r, \text{寬} = 3r$$

$$\text{課本的長寬比} = \frac{1}{7} : \frac{1}{9} = 9 : 7, \text{令長} = 9k, \text{寬} = 7k$$

$$\Rightarrow 10r = 16k, \frac{r}{k} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}, \frac{\text{鉛筆盒面積}}{\text{課本面積}} = \frac{21r^2}{63k^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{r}{k}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{75}$$

(D) 13. 若直線 $L: x - ay + b = 0$, 通過 $A(3, -2)$ 、 $B(-5, m)$, 且直線 L 與 y 軸交於 $C(0, \frac{5}{2})$, 求 $m + 3a = ?$

- (A) 0 (B) 2
(C) 4 (D) 8

$$13. \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ -\frac{5}{2}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ -5a + 2b = 0 \end{cases}, \text{得 } a = \frac{-2}{3}, b = \frac{-5}{3}$$

$$x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0, \text{將 } B(-5, m) \text{ 代入}$$

$$\Rightarrow 3(-5) + 2y - 5 = 0, m = 10 \Rightarrow m + 3a = 10 + 3\left(\frac{-2}{3}\right) = 8$$

(B) 14. 直線 $3x = y + a$ 經過點 $(6, -2)$, 直線 $2x + y = b$ 經過點 $(-2, -6)$, 則直線 $ax + by = 40$ 不經過第幾象限?

- (A) 一 (B) 二
(C) 三 (D) 四

$$14. \text{將 } (6, -2) \text{ 代入 } 3x = y + a, a = 20,$$

$$\text{將 } (-2, -6) \text{ 代入 } 2x + y = b, b = -10$$

$$\Rightarrow 20x - 10y = 40, 2x - y = 4 \Rightarrow$$

x	2	0
y	0	-4

不經過第二象限!

(A) 15. 白馬里全部居民共有 1500 人, 有投票權的占全里居民 70%, 此次里長選舉有 3 位候選人, 開票結果顯示, 投票率是 80%, 有 30 張廢票, 且當選人得票數等於其他兩位落選人得票數之和, 請問當選人所有得票數為多少票呢?

- (A) 405 (B) 415 (C) 425 (D) 435

$$15. (1500 \times 0.7 \times 0.8 - 30) \times \frac{1}{2} = 405 \text{ (票)}$$

(D) 16. 某次數學段考 A 班平均成績為 56 分, 且班平均成績為 65 分, 如果兩班合併計算得平均成績為 60 分, 若 A 班有 x 人參加段考, B 班有 y 人參加段考, 求 x 與 y 之比值為何?

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$

$$16. 56x + 65y = 60(x + y) \Rightarrow 5y = 4x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

(B) 17. 設 $a : b : c = 5 : 2 : 3$, 且 $a + b + c = 300$, 求 $(a + 1) : (b + 1) : (c + 1)$ 之比為何?

- (A) 151 : 91 : 61 (B) 151 : 61 : 91 (C) 149 : 59 : 89 (D) 149 : 89 : 59

$$17. \text{令 } a = 5r, b = 2r, c = 3r \text{ 代入 } a + b + c = 300,$$

$$\text{得 } r = 30 \Rightarrow a = 150, b = 60, c = 90 \Rightarrow (a + 1) : (b + 1) : (c + 1) = 151 : 61 : 91$$

(C) 18. 設 a, b 為整數, 若 $\sqrt{(a + b - 3)^2} + \sqrt{(2a + b - 5)^2} = 0$, 求 $4a + b$ 之平方根為何?

- (A) -3 (B) 3 (C) ± 3 (D) ± 9

$$18. \text{原式} = |a + b - 3| + |2a + b - 5| = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \text{得 } a = 2, b = 1$$

$$\Rightarrow 4(2) + (1) = 9, 9 \text{ 的平方根為 } \pm 3$$

(C) 19. 若 $\sqrt{150a}$ 為正整數，求 a 的最小正整數為何？

- (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 12

19. $\because \sqrt{150a} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2 \times a}$ 為正整數
 $\therefore a = 2 \times 3 = 6$

(B) 20. 設 $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2}$ ，且 $a_1 = \sqrt{10}$ ，則 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1000}$ 當中是整數的有多少個？

- (A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 30

20. $\because a_1 = \sqrt{10}, a_2 = \sqrt{11}, a_3 = \sqrt{12}, \dots, a_{1000} = \sqrt{1009}$
 \therefore 整數有 $\sqrt{4^2}, \sqrt{5^2}, \dots, \sqrt{31^2}$ ，共有 $31 - 4 + 1 = 28$ (個)

(C) 21. 若 a, b, c 為一個三角形的三邊長，下列敘述中，只有一項可能有錯誤出現，請問為何者？

- (A) $a - b < c$ (B) $a + b > c$
 (C) $a^2 + b^2 > c^2$ (D) a 恆為正數

21. $\because a, b, c$ 為三角形的三邊長
 故 $a > 0, b > 0, c > 0$ ，且 $|a - b| < c < a + b$ ，
 但 $a^2 + b^2 > c^2$ ，則 c 的對角必為銳角，已知無此條件，
 故(A)(B)(D)為真、(C)有誤！

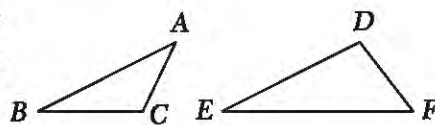
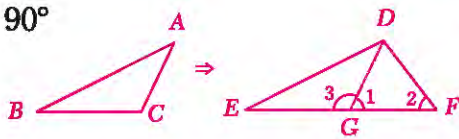
(D) 22. 若多項式 A 除以 $x^2 + x + 1$ 之商式為 $3x^2 + 2x + 1$ 、餘式為 $2x - 3$ ，則 A 除 $x^2 + 1$ 之商式為下列何者？

- (A) $3x^2 - 5x - 3$ (B) $3x^2 - 5x + 3$ (C) $3x^2 + 5x - 3$ (D) $3x^2 + 5x + 3$

22. $A = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 2x + 1) + 2x - 3 = 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x - 2$
 $= (x^2 + 1)(3x^2 + 5x + 3) - 5$ ，商式為 $3x^2 + 5x + 3$

(A) 23. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\angle ABC = \angle DEF$ ，且 $\overline{BC} < \overline{EF}$ ，則下列何者成立？

- (A) $\angle BCA + \angle EFD = 180^\circ$
 (B) $\angle BCA + \angle EFD = 90^\circ$
 (C) $\angle BCA > \angle EDF$
 (D) $\angle BCA = \angle DFE$

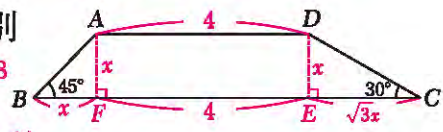


23. 移動 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合後，可知 $\triangle ABC \cong \triangle DEG$ ，則 $\overline{AC} = \overline{DG} = \overline{DF}$
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，
 且 $\angle 3 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$
 故 $\angle BCA + \angle EFD = 180^\circ$

(C) 24. 如右圖，有一個梯形上底為 4、下底為 8，兩底角分別是 45° 與 30° ，求梯形面積為何？

- (A) $2(\sqrt{3} - 1)$ (B) $6(\sqrt{3} + 1)$
 (C) $12(\sqrt{3} - 1)$ (D) $12(\sqrt{3} + 1)$

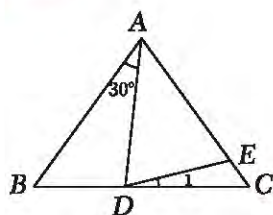
24. $\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FE} + \overline{EC} = 8$
 $\Rightarrow x + 4 + \sqrt{3}x = 8$
 $\Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3} + 1} = 2(\sqrt{3} - 1)$
 面積 $= (4 + 8) \times 2(\sqrt{3} - 1) \times \frac{1}{2} = 12(\sqrt{3} - 1)$



(A) 25. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ，求 $\angle 1 = ?$

- (A) 15°
 (B) 18°
 (C) 20°
 (D) 25°

25. $\angle AED = \angle C + \angle 1$
 $\angle ADE + \angle 1 = \angle B + 30^\circ$
 $\overline{AD} = \overline{AE} \Rightarrow \angle AED = \angle ADE$
 $\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \angle B = \angle C$
 故 $\angle C + \angle 1 + \angle 1 = \angle C + 30^\circ$
 $\angle 1 = 30^\circ \times \frac{1}{2} = 15^\circ$



(B) 26. 有一長方體的長為 4 單位、高為 2 單位、表面積是 52 平方單位，則其體積為多少立方單位？

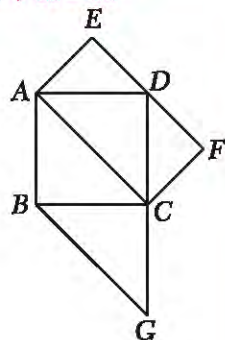
- (A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 49

26. 設長方體的寬為 x 單位，體積 $= 8x$
 表面積 $= 2 \times (4 \times 2 + 2x + 4x) = 52 \Rightarrow 12x + 16 = 52$
 $\Rightarrow x = 3$ ，體積 $= 24$ (立方單位)

(B) 27. 如右圖， $ABCD$ 為正方形、 $EACF$ 為矩形、 $ABGC$ 為平行四邊形，其中 D 在 \overline{EF} 上，若上述三種四邊形面積依序為 a, b, c ，則 a, b, c 的大小關係為何？

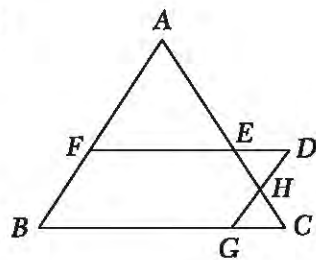
- (A) $a < b < c$ (B) $a = b = c$
 (C) $a > b = c$ (D) $a > b < c$

27. 正方形面積 $= \overline{AB} \times \overline{BC} =$ 平行四邊形面積
 正方形面積 $= \overline{AC} \times \overline{BD} \times \frac{1}{2} = \overline{AC} \times \overline{AE}$
 $=$ 矩形面積



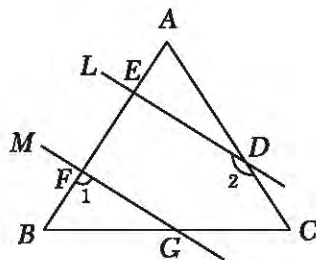
(D) 28. 如右圖， $\triangle ABC$ 與平行四邊形 $FBGD$ 中， \overline{AC} 與 \overline{DF} 、 \overline{DG} 分別交於 E 、 H 兩點，若 $\angle FEH + \angle DHC = 200^\circ$ ，求 $\angle BFD = ?$

- (A) 135° 28. 令 $\angle BFD = x^\circ = \angle BGH$ ， $\angle B = 180^\circ - x^\circ = \angle D$ ，
 $\angle FEH + \angle EHG = \angle FEH + \angle DHC = 200^\circ$
 $\therefore FBCGHE$ 為五邊形
 $\Rightarrow \angle B + \angle BFE + \angle FEH + \angle EHG + \angle HGB = 540^\circ$
 $\Rightarrow 180^\circ - x^\circ + x^\circ + 200^\circ + x^\circ = 540^\circ$ ， $x = 160^\circ = \angle BFD$
 (B) 140°
 (C) 155°
 (D) 160°



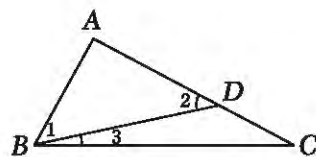
(A) 29. 如右圖， $\triangle ABC$ 為正三角形，則 $\angle 1 + \angle 2 = ?$

- (A) 240° 29. $\because \angle 2 = \angle A + \angle AED$ ，且 $L \parallel M$
 $\therefore \angle 1 = \angle FED = \angle A + \angle ADE$
 $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle ADE + \angle A + \angle AED$
 $= (\angle A + \angle ADE + \angle AED) + \angle A$
 $= 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$
 (B) 250°
 (C) 260°
 (D) 270°



(C) 30. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，要說明 $\angle B > \angle C$ ，則下列說明何者有誤？

- (A) $\because \overline{AC} > \overline{AB}$ ，在 \overline{AC} 取一點 D ，使得 $\overline{AB} = \overline{AD}$
 (B) $\because \overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 2$
 (C) $\angle 2 = \angle 3 + \angle C$ ， $\angle 2 < \angle C$
 (D) $\angle ABC = \angle 3 + \angle 1 > \angle 2$ ，則 $\angle ABC > \angle C$



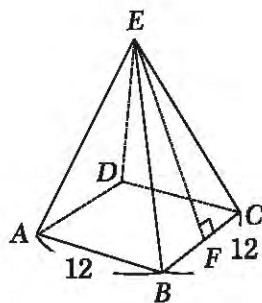
30. (C) 錯！應是 $\angle 2 = \angle 3 + \angle C > \angle C$

(B) 31. 若一等差級數 $1 + 3 + 5 + \dots + a$ 的總和為 25^2 ，則 a 值為何？

- (A) 39 (B) 49 31. $a = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ ， $\frac{n}{2}(1+2n-1) = 25^2$ ，
 $n^2 = 25^2$ ， $n = 25$
 $a = 2(25) - 1 = 49$
 (C) 59 (D) 69

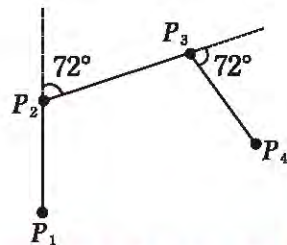
(C) 32. 如右圖，正四角錐的側面等腰三角形中線長為 15，則此錐體的表面積為多少平方公分？

- (A) 306 32. 表面積 = $12 \times 12 + 4 \times (12 \times 15 \times \frac{1}{2}) = 144 + 360 = 504$ (平方公分)
 (B) 360
 (C) 504
 (D) 540



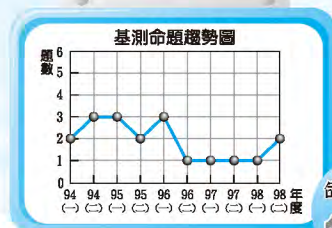
(C) 33. 如右圖，良成從 P_1 點出發，直線前進 1 公尺到 P_2 點，向右轉 72° ，繼續直線前進 1 公尺到 P_3 點後，再向右轉 72° ，依此順序下去，請問良成走到下列哪一點時，通過 P_1 點達 3 次？(不含出發時的第一次)

- (A) P_{11} 點 (B) P_{15} 點
 (C) P_{17} 點 (D) P_{22} 點



A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_{11}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

33. $n = 540^\circ \div 72^\circ = 5$ ，良成走正五邊形
 (A) P_{11} 點 \Rightarrow 達 2 次
 (B) P_{15} 點 \Rightarrow 達 2 次
 (C) P_{17} 點 \Rightarrow 達 3 次
 (D) P_{22} 點 \Rightarrow 達 4 次



命題率 100%

能力 — 相似形的概念與應用

一 相似形基本觀念

1. 若兩多邊形相似，則：

- (1) 對應角相等。
- (2) 對應邊成比例。

2. 相似三角形條件：

- (1) 三角對應相等 (AA 相似)。
- (2) 一角對應相等，且夾此角的兩邊對應成比例 (SAS 相似)。
- (3) 三邊對應成比例 (SSS 相似)。

小叮嚀

	相似形的條件	對應角	對應邊
多邊形種類	三角形	符合其中一者即相似	
	四邊以上的多邊形	兩者同時符合才相似	

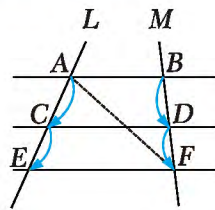
二 相似形比例性質

1. 三角形兩邊截成比例性質

性質		箭頭說明	
(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (如圖一)		\Rightarrow	
(2) 若 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ ，則 \overline{DE} 不一定與 \overline{BC} 平行 $\because \overline{DE} = \overline{DE}'$ ， $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}'}{\overline{BC}}$ ，但 \overline{DE}' 與 \overline{BC} 不平行 (如圖二)		不可逆	
(3) $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ (如圖三)	(4) $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ (如圖四)	\Leftrightarrow 互逆	
(圖一)	(圖二)	(圖三)	(圖四)

2. 平行線截線段長成比例 (由三角形比例而來)

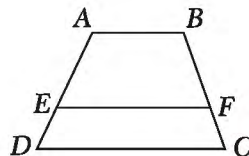
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \Leftrightarrow \overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}.$$



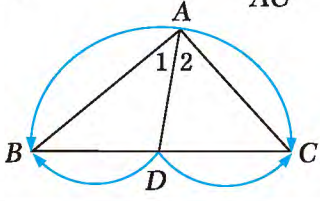
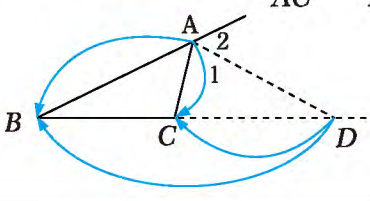
3. 梯形截邊成比例性質

(1) 在梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ，則 $\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{BF} : \overline{FC}$ 。

(2) 承(1)，若 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{CD} = b$ ， $\overline{AE} : \overline{ED} = m : n$ ，則 $\overline{EF} = \frac{na + mb}{m + n}$ 。



4. 三角形內分比與外分比性質

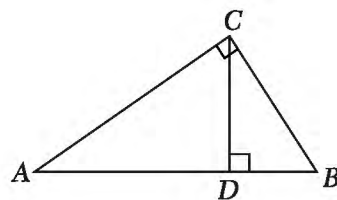
內分比	外分比
\overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ， $\triangle ABC$ 中， $\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$	\overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 之外角， $\triangle ABC$ 中， $\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$
	

5. 直角三角形母子相似定理

若 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D ，則：

(1) $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ 。

① $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}$	口訣：高 2 兩段乘
② $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AD}$	口訣：斜 2 短乘長
③ $\overline{BC}^2 = \overline{BA} \times \overline{BD}$	口訣：斜 2 短乘長



6. 兩相似三角形

(1) 對應邊長之比 = 對應高之比 = 對應分角線之比 = 對應中線之比。

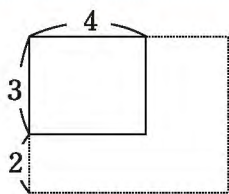
(2) 對應面積比 = 對應邊長平方比。

老師 傳授

相似形的意義

學生 實作

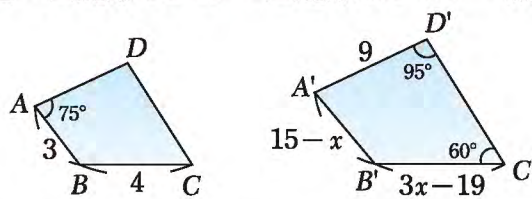
如圖所示，長方形長為 4 公分，寬為 3 公分，若將寬增加 2 公分，且所得的長方形與原長方形相似，那麼長要增加多少？



解

設長要增加 x ，則 $3:4 = (3+2):(4+x)$
 $3(4+x) = 4(3+2)$ ， $12 + 3x = 20$ ， $3x = 8$
 $\therefore x = \frac{8}{3}$
 需增加 $\frac{8}{3}$ (公分)

如圖，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，請問：



(1) $\overline{B'C'}$ = ? (2) $\overline{CD} : \overline{C'D'}$ = ? (3) $\angle B$ = ?

解

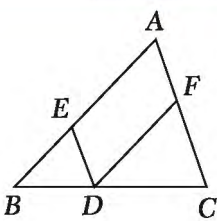
(1) $\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \quad \therefore \frac{3}{15-x} = \frac{4}{3x-19}$ ，
 $3(3x-19) = 4(15-x)$ ，
 $9x - 57 = 60 - 4x$ ， $13x = 117$
 $\therefore x = 9 \Rightarrow \overline{B'C'} = 3 \times 9 - 19 = 8$ (單位)
 (2) $\therefore \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = 4 : 8 = 1 : 2$
 (3) $\angle B = \angle B' = 360^\circ - 75^\circ - 60^\circ - 95^\circ = 130^\circ$

2 老師傳授

相似形比例線段性質

學生習作 2

如圖， D 是 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 上任意一點，若由 D 點作 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ 交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 E 、 F 兩點。



(1) $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CF} : \overline{FA}$ 是否成立？何故？

(2) 若 $\overline{AE} = 2x - 5$ ， $\overline{EB} = 4x - 14$ ， $\overline{CF} = 3$ ， $\overline{AF} = 2$ ，則 $\overline{BE} = ?$

解

(1) $\because \overline{DE} \parallel \overline{AC} \therefore \overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CD} : \overline{DB}$
又 $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$

$$\therefore \overline{CD} : \overline{DB} = \overline{CF} : \overline{FA}$$

$$\therefore \overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CF} : \overline{FA}$$

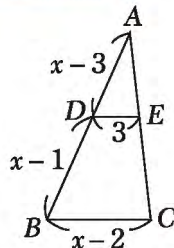
(2) $(2x - 5) : (4x - 14) = 3 : 2$

$$3(4x - 14) = 2(2x - 5),$$

$$12x - 42 = 4x - 10 \Rightarrow 8x = 32, x = 4$$

$$\therefore \overline{BE} = 4 \times 4 - 14 = 2 \text{ (單位)}$$

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = x - 3$ ， $\overline{BD} = x - 1$ ， $\overline{BC} = x - 2$ ， $\overline{DE} = 3$ ，則 $x = ?$ $\overline{AB} = ?$



解

$$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC} \therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}},$$

$$\frac{x-3}{(x-3)+(x-1)} = \frac{3}{x-2},$$

$$(x-3)(x-2) = 3(2x-4),$$

$$(x-3)(x-2) = 6(x-2)$$

$$\because x \neq 2, x-3 = 6 \Rightarrow x = 9$$

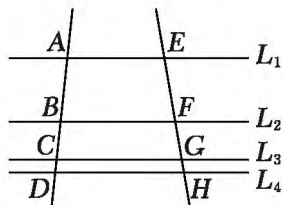
$$\text{故 } \overline{AB} = 2x - 4 = 2 \times 9 - 4 = 14 \text{ (單位)}$$

3 老師傳授

多條平行截線等比例線段

學生習作 3

如圖，已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ ，請問：



(1) 若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 5 : 3 : 1$ ，且 $\overline{EH} = 18$ ，則 $\overline{FG} = ?$

(2) 若 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{AD} = 5 : 8 : 10$ ，則 $\overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH} = ?$

解

(1) $\because L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$

$$\therefore \overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 5 : 3 : 1$$

$$\overline{FG} = 18 \times \frac{3}{5+3+1} = 6$$

(2) $\because L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$

$$\therefore \overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD}$$

$$= \overline{AB} : (\overline{AC} - \overline{AB}) : (\overline{AD} - \overline{AC})$$

$$= 5 : (8 - 5) : (10 - 8) = 5 : 3 : 2$$

如圖，已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，

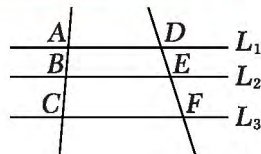
若 $\overline{AB} = x + 1$ ， $\overline{BC} = 7$

$- x$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{EF} =$

x ，請問：

(1) $x = ?$

(2) $\overline{AC} : \overline{AB} : \overline{BC} = ?$



解

$$(1) \because \frac{x+1}{7-x} = \frac{3}{x}$$

$$x^2 + x = 21 - 3x \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x-3)(x+7) = 0, x = 3 \text{ 或 } -7 \text{ (不合)}$$

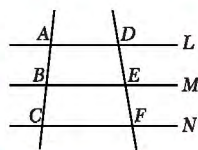
(2) $\overline{AB} = x + 1 = 4$

$$\overline{BC} = 7 - x = 4$$

$$\overline{AC} = 4 + 4 = 8$$

$$\overline{AC} : \overline{AB} : \overline{BC} = 8 : 4 : 4 = 2 : 1 : 1$$

解題小偏方



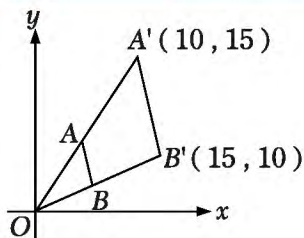
$$L \parallel M \parallel N \Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}.$$

4 老師 傳授

坐標平面的相似形

學生 寫作

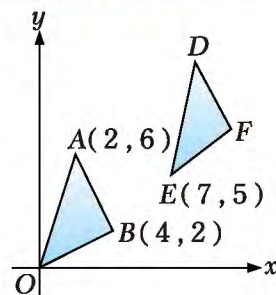
如圖，若 $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ ，且 $\triangle OA'B'$ 為 $\triangle OAB$ 的 5 倍放大圖，則 A 點坐標為何？B 點坐標為何？



解

$$\begin{aligned} \text{A 點} & \left(\frac{10}{5}, \frac{15}{5}\right) \Rightarrow (2, 3) \\ \text{B 點} & \left(\frac{15}{5}, \frac{10}{5}\right) \Rightarrow (3, 2) \end{aligned}$$

如圖，若 $\triangle DEF$ 為 $\triangle AOB$ 的 2 倍放大圖，則其各對應邊均互相平行，則 D 點坐標為何？F 點坐標為何？



解

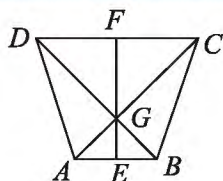
A 點 \Rightarrow 由 O 右移 2，上移 6 而得
 B 點 \Rightarrow 由 O 右移 4，上移 2 而得
 $\triangle DEF$ 為 $\triangle AOB$ 之 2 倍放大圖
 $\left\{ \begin{aligned} \text{D 點} & (7 + 2 \times 2, 5 + 6 \times 2) = (11, 17) \\ \text{F 點} & (7 + 4 \times 2, 5 + 2 \times 2) = (15, 9) \end{aligned} \right.$

5 老師 傳授

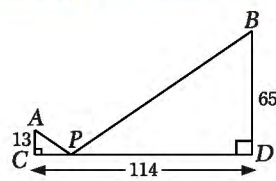
相似形的應用

學生 寫作

如圖，四邊形 ABCD 是一個等腰梯形，EF 是等腰梯形的高。且對角線 AC、對角線 BD、高 EF 三條線段相交於 G 點。 $\overline{AB} = 3$ 公分； $\overline{CD} = 9$ 公分； $\overline{EG} = 2$ 公分。請問： $\overline{GF} = ?$



右圖中， $\overline{AC} = 13$ ， $\overline{BD} = 65$ ， $\overline{CD} = 114$ ，若 P 點在 \overline{CD} 上，使得 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 的值最小，則 $\overline{CP} = ?$



難題

解

F 為 \overline{CD} 中點，E 為 \overline{AB} 中點。
 $\triangle GDF \sim \triangle GBE$
 $\therefore \overline{GF} : \overline{GE} = \overline{DF} : \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{CD} : \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{9}{2} : \frac{3}{2}$
 $= 3 : 1$
 $\therefore \overline{GF} = \overline{GE} \times 3 = 2 \times 3 = 6$ (公分)

解

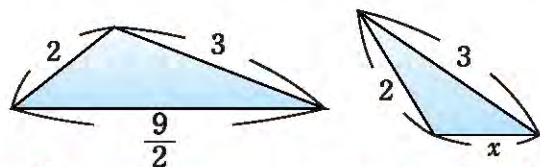
如圖，取 A' 點，使 $\overline{AA'} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{A'C} = \overline{AC}$ ，則連接 $\overline{A'B} = \overline{AP} + \overline{PB}$ 之最小值 (直線)
 又 $\overline{CP} = \overline{A'P'}$
 且 $\frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{BD'}} = \frac{13}{13 + 65}$
 故 $\overline{A'P'} = \overline{CP} = 114 \times \frac{13}{78} = 114 \times \frac{1}{6} = 19$ (單位)

Let's Go! 同步 評量 1

(C) 1. 下列圖形各邊分別平行往內減 1 單位後，得到另一個較小的圖形，則下列哪一組的新舊圖形不相似？

- (A) 正三角形
 (B) 菱形
 (C) 長方形
 (D) 正方形

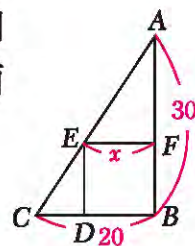
- (B) 2. 已知右圖中的兩個三角形是相似三角形，求 $x = ?$



$2.2:3:\frac{9}{2}=4:6:9 \therefore x:2:3=4:6:9 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

- (A) 1 (B) $\frac{4}{3}$
(C) 2 (D) $\frac{5}{2}$

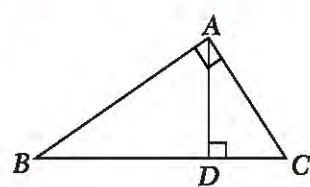
- (C) 3. 某人想從一塊兩股長分別為 30 公分與 20 公分的直角三角形紙板中切割出一塊正方形紙板，而且這塊正方形的兩個鄰邊恰好在直角三角形的兩股上（如右圖所示），請問：這塊正方形紙板的邊長是多少公分？



3. 設 $EF = x \Rightarrow \frac{30-x}{30} = \frac{x}{20}$,
 $30x = 600 - 20x \Rightarrow x = 12$ (公分)

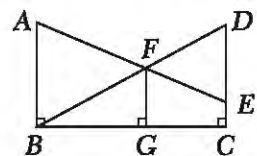
- (A) 8 (B) 10
(C) 12 (D) 15

- (A) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{BD} = 9$ ， $\overline{DC} = 4$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積為何？



- (A) 39 (B) 42 (C) 45 (D) 48
4. $\because \angle BAC = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
 $\therefore \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC} = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow \overline{AD} = \pm 6$ (負不合)
 $\therefore \triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 13 \times 6 = 39$

- (D) 5. 如右圖， $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{DE} = 20$ ， $\overline{CE} = 10$ ，則 $\overline{FG} = ?$



- (A) 25 (B) 15 (C) 20 (D) 18
5. $\because \triangle FAB \sim \triangle FED$
 $\therefore \overline{BF} : \overline{FD} = \overline{AB} : \overline{DE} = 30 : 20 = 3 : 2$ 又 $\overline{FG} \parallel \overline{CD}$
 $\therefore \overline{FG} : \overline{CD} = \overline{BF} : \overline{BD} \Rightarrow \overline{FG} : 30 = 3 : 5 \therefore \overline{FG} = 18$

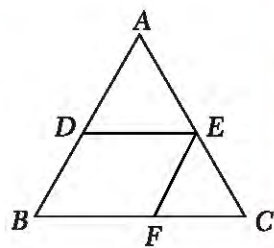
實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

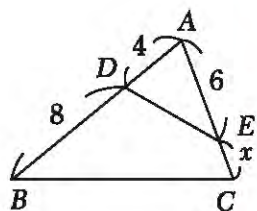
- (C) 1. 判斷下列哪一個敘述是正確的？
- (A) 周長一樣的兩矩形必相似 (B) 周長一樣的兩菱形必相似
(C) 周長一樣的兩正方形必相似 (D) 周長一樣的兩等腰梯形必相似
1. \because 周長一樣的兩正方形其邊長相等、內角均為 90° \therefore 相似

- (D) 2. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ，若 $\overline{AD} = 2x + 1$ ， $\overline{BD} = x + 2$ ，且 $\overline{CF} : \overline{BF} = 3 : 5$ ，則 $x = ?$



- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
2. $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ， $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} = \frac{5}{3}$ ，
 $6x+3 = 5x+10$ ， $x = 7$

- (B) 3. 如右圖， $\angle AED = \angle ABC$ ，則 $x = ?$



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
3. 在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中 $\because \angle A = \angle A$ ， $\angle AED = \angle ABC$
 $\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$ (AA 相似) $\therefore \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{AD} : \overline{AC}$ ，
即 $6 : 12 = 4 : (6+x)$ ， $6(6+x) = 12 \times 4$ ， $36 + 6x = 48$ ，
 $6x = 12 \therefore x = 2$

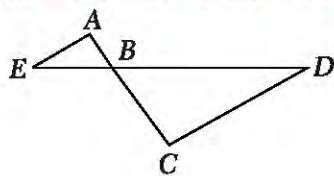
- (D) 4. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle EFD$ ，且 $2\angle A : 3\angle B = 4 : 9$ ， $2\angle B : 3\angle C = 2 : 5$ ，求 $\angle D = ?$
 (A) 30° (B) 45°
 (C) 60° (D) 90°

4. 由 $2\angle A : 3\angle B = 4 : 9 \Rightarrow \angle A : \angle B = 2 : 3$ ，由 $2\angle B : 3\angle C = 2 : 5 \Rightarrow 6\angle C = 10\angle B \Rightarrow 3\angle C = 5\angle B \Rightarrow \angle B : \angle C = 3 : 5$
 故 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$ ，設 $\angle A = 2r$ ， $\angle B = 3r$ ， $\angle C = 5r$
 由 $2r + 3r + 5r = 180^\circ \Rightarrow r = 18^\circ \therefore \angle D = \angle C = 5r = 5 \times 18^\circ = 90^\circ$

- (A) 5. 如右圖，已知 $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = 1.5$ ， $\overline{BC} = 3.5$ ， $\overline{DE} = 10$ ，則 $\overline{BD} = ?$

- (A) 7 (B) 10
 (C) 12 (D) 15

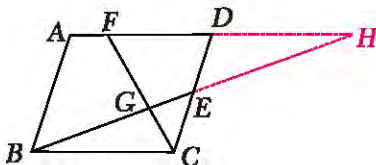
5. $\because \overline{AE} \parallel \overline{CD} \therefore \triangle ABE \sim \triangle CBD$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{BE} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{BC} = 1.5 : 3.5 = 3 : 7$
 $\therefore \overline{BD} = 10 \times \frac{7}{3+7} = 7$



- (B) 6. 如右圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{CE} = \overline{DE}$ ， $\overline{DF} = 3\overline{AF}$ ， \overline{BE} 與 \overline{CF} 相交於 G ，求 $\frac{\overline{CG}}{\overline{FG}} = ?$

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{7}$
 (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{4}{13}$

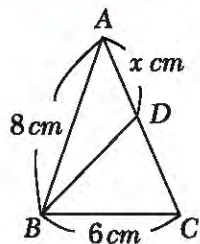
6. $\because \overline{CE} = \overline{DE}$ ， $\angle BCE = \angle EDH$ ， $\angle CEB = \angle DEH \therefore \triangle BCE \cong \triangle HDE$
 $\Rightarrow \overline{DH} = \overline{BC} \therefore \overline{DF} = 3\overline{AF}$ ，設 $\overline{AF} = x$ ，則 $\overline{DF} = 3x$ ， $\overline{DH} = \overline{BC} = 4x$
 $\Rightarrow \overline{FH} = 3x + 4x = 7x \therefore \triangle BCG \sim \triangle HFG \therefore \frac{\overline{CG}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FH}} = \frac{4x}{7x} = \frac{4}{7}$



- (A) 7. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = \overline{BD}$ ，則 $x = ?$

- (A) 3.5
 (B) 4
 (C) 4.5
 (D) 5

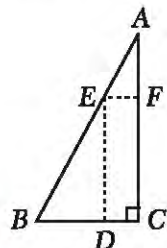
7. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 中 $\because \overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = \overline{BD}$
 $\therefore \angle ABC = \angle C = \angle CDB \therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$ ，即 $8 : 6 = 6 : (8 - x)$ ，
 $36 = 8(8 - x)$ ， $36 = 64 - 8x$ ， $8x = 28 \therefore x = 3.5$ (公分)



- (A) 8. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{FC} = 4\overline{FE}$ ，若 $CDEF$ 為矩形，試求四邊形 $CDEF$ 的面積為何？

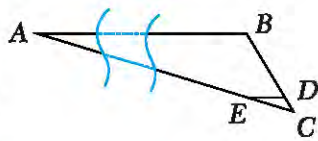
- (A) $\frac{225}{16}$ (B) $\frac{255}{16}$
 (C) $\frac{225}{8}$ (D) $\frac{255}{8}$

8. 令 $\overline{EF} = x$ ， $\overline{FC} = 4x$ ， $\frac{12 - 4x}{12} = \frac{x}{5}$
 $\Rightarrow x = \frac{15}{8}$ ， $4x = \frac{15}{2}$ ，面積 $= \frac{15}{8} \times \frac{15}{2} = \frac{225}{16}$ (平方單位)



- *(D) 9. 小安想知道河岸兩側 A 、 B 兩點的距離，於是他先在與 B 點同側的河岸上選一點 C ，連接 \overline{AC} 、 \overline{BC} ，在 \overline{BC} 上取一點 D ，過 D 點作 \overline{AB} 的平行線交 \overline{AC} 於 E ，今量得 $\overline{CD} = 0.35$ 公尺、 $\overline{DE} = 1$ 公尺、 $\overline{BC} = 14$ 公尺，則 \overline{AB} 長多少公尺？

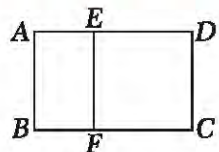
- (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 9. $\because \overline{DE} \parallel \overline{AB} \therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$ ， $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{0.35}{14} \Rightarrow \overline{AB} = 40$ (公尺)



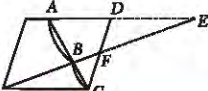
- (B) 10. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $CDEF$ 為正方形，若長方形 $ABCD \sim$ 長方形 $AEFB$ ，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
 (C) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

10. 令 $\overline{AD} = x$ ，所以 $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AB} = 1$ ，
 $\overline{AE} = x - 1$ ，所以 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ ， $\frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1}$
 $x^2 - x - 1 = 0$ ， $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (負不合)， $\overline{AD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (單位)

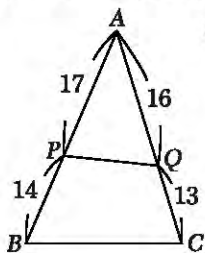


解題小秘方

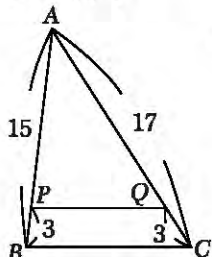
第 6 題： 要找 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ，用相似三角形原理作輔助線，延長 \overline{AD} 與 \overline{BF} 交於 E 點。

(D) 11. 下列哪一個選項 \overline{PQ} 與 \overline{BC} 平行？

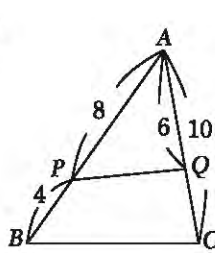
(A)



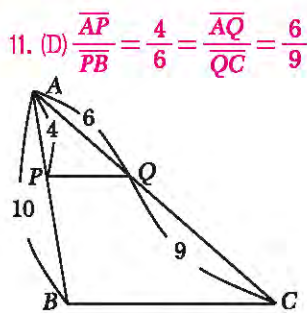
(B)



(C)

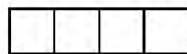


(D)



11. (D) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{4}{6} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{6}{9}$

※(D) 12. 有大小相同的正方形紙片 200 張，右圖是用 4 張正方形紙片所排成的長方形，若想用剩餘的紙片再排成一個與右圖相似的長方形，則最多可用幾張紙片？



- (A) 108 (B) 147 (C) 150 (D) 196

12. 長：寬 = 4 : 1，放大 7 倍
 $\Rightarrow (4 \times 7) : (1 \times 7) = 28 : 7 \Rightarrow 28 \times 7 = 196$ 張

(B) 13. 四邊形 $ABCD$ 的各邊長為 21、12、18、9 公分，另一相似四邊形 $A'B'C'D'$ 的最短邊為 6，則四邊形 $A'B'C'D'$ 之周長為多少公分？

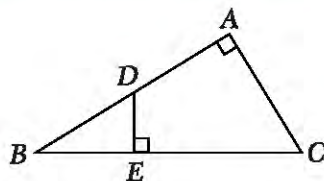
- (A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60

13. 令四邊形 $A'B'C'D'$ 的周長為 x 公分，
 則 $9 : 6 = (21 + 12 + 18 + 9) : x, x = 40$

(C) 14. 如右圖， D 是 \overline{AB} 的中點，且 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 3, \angle A = 90^\circ$ ，則 $\overline{DE} = ?$

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$
 (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

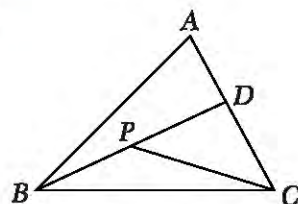
14. $\because \overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，且 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$
 $\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{DE}}{3} = \frac{2}{5}, \overline{DE} = \frac{6}{5}$



(B) 15. 如右圖， $\overline{AD} : \overline{CD} = 2 : 3, \overline{BP} : \overline{PD} = 1 : 1$ ，若 $\triangle ABC$ 面積為 30，則 $\triangle BPC$ 面積為何？

- (A) 6 (B) 9
 (C) 12 (D) 15

15. $\frac{\overline{BP}}{\overline{PD}} = \frac{1}{1}$ ， $\triangle BPC$ 面積 = $\frac{1}{2} \triangle BCD$ 面積，
 且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3}$ ， $\triangle BCD$ 面積 = $\frac{3}{5} \triangle ABC$ 面積
 $\therefore \triangle BPC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times 30 = 9$



歷屆基測題

(C) 1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $D、E$ 兩點分別在 $\overline{AB}、\overline{AC}$ 上，其中 $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$ ，且 $\overline{DE} = 1, \overline{BC} = 2$ 。若 $\overline{AD} = x, \overline{AE} = y$ ，則 $\overline{CE} = ?$

- (A) x
 (B) y
 (C) $2x - y$
 (D) $2y - x$

1. $\triangle ADE$ 與 $\triangle ACB$ 中
 $\because \angle A = \angle A, \angle ADE = \angle ACB = 90^\circ, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{AD} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{BC} \Rightarrow x : 1 = (y + \overline{CE}) : 2 \Rightarrow y + \overline{CE} = 2x \Rightarrow \overline{CE} = 2x - y$
 故選(C)

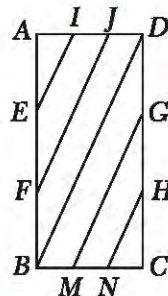


98 基測二

(B) 2. 右圖表示 $E、F、G、H、I、J、M、N$ 八點在長方形 $ABCD$ 四邊上的位置，其中 $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB} = \overline{DG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ ，且 $\overline{AI} = \overline{IJ} = \overline{JD} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}$ 。若長方形 $ABCD$ 的周長為 32，對角線長為 12，則 $\overline{EI}、\overline{FJ}、\overline{BD}、\overline{MG}、\overline{NH}$ 五線段的長度和為何？

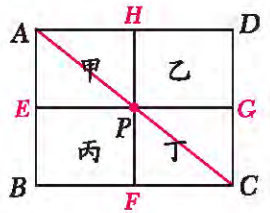
- (A) 28 (B) 36 (C) 44 (D) 48

2. $\triangle ABD$ 中， $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}, \overline{AI} = \overline{IJ} = \overline{JD} \Rightarrow \overline{EI} = \frac{1}{3} \overline{BD}, \overline{FJ} = \frac{2}{3} \overline{BD}$
 同理， $\overline{MG} = \frac{2}{3} \overline{BD}, \overline{NH} = \frac{1}{3} \overline{BD}$
 $\therefore \overline{EI} + \overline{FJ} + \overline{BD} + \overline{MG} + \overline{NH} = \frac{1}{3} \overline{BD} + \frac{2}{3} \overline{BD} + \overline{BD} + \frac{2}{3} \overline{BD} + \frac{1}{3} \overline{BD} = 3 \overline{BD} = 3 \times 12 = 36$



98 基測二

(A) 3. 右圖中，過 P 點的兩直線將矩形 $ABCD$ 分成甲、乙、丙、丁四個矩形，其中 P 在 \overline{AC} 上，且 $\overline{AP} : \overline{PC} = \overline{AD} : \overline{AB} = 4 : 3$ 。下列對於矩形是否相似的判斷，何者正確？

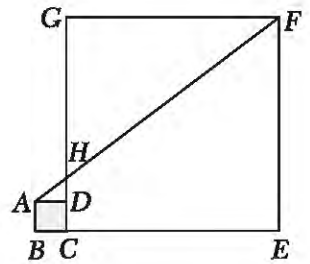


98 基測一

- (A) 甲、乙不相似
- (B) 甲、丁不相似
- (C) 丙、乙相似
- (D) 丙、丁相似

3. (1) $\because \overline{PH} \parallel \overline{CD}, \overline{EP} \parallel \overline{BC}$
 $\overline{AP} : \overline{PC} = \overline{AH} : \overline{HD} = \overline{AE} : \overline{EB} = 4 : 3$
 $\therefore \overline{AH} : \overline{PG} = \overline{AE} : \overline{PF} = 4 : 3 \therefore$ 甲、丁相似
 (2) $\because \overline{AH} : \overline{HD} = 4 : 3$ 但 $\overline{AE} = \overline{HP}$
 \therefore 甲、乙不相似 \therefore 選(A)

(B) 4. 如右圖，兩正方形 $ABCD$ 、 $GCEF$ 的面積分別為 1、49，且 C 點在 \overline{BE} 上。若 \overline{AF} 與 \overline{CG} 相交於 H 點，則 $\overline{DH} = ?$



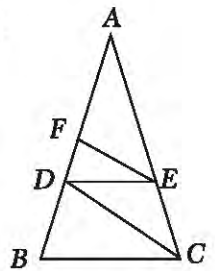
97 基測二

- (A) 1
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) $\frac{5}{6}$
- (D) $\frac{7}{8}$

4. $\overline{CD} = \overline{AD} = 1, \overline{CG} = \overline{CF} = 7$
 設 $\overline{DH} = x$
 $\because \triangle ADH \sim \triangle FCH$
 $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CH}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{7}{7-1-x}, x = \frac{3}{4}$

基測 趨勢題

(B) 1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}, \overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ，假設 $\overline{AF} = 12, \overline{AB} = 27$ ，求 $\overline{AD} = ?$



- (A) 16
- (B) 18
- (C) 20
- (D) 24

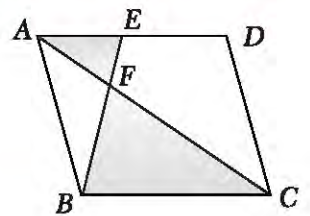
1. $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}, \overline{EF} \parallel \overline{CD} \therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}$
 $\overline{AD}^2 = \overline{AF} \times \overline{AB} = 12 \times 27 \therefore \overline{AD} = \sqrt{12 \times 27} = 18$ (單位)

(C) 2. 在直角坐標平面上， $A(0,0), B(12,0), C(8,8)$ ，若 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ ， $\overline{AB} : \overline{AB'} = 1 : 2$ ，且 B' 在 x 軸上，則 B' 點坐標為何呢？

- (A) $(\pm 22, 0)$
- (B) $(\pm 23, 0)$
- (C) $(\pm 24, 0)$
- (D) $(\pm 25, 0)$

2. 設 $B'(x, 0) \because \overline{AB} : \overline{AB'} = 1 : 2$
 即 $12 : |x| = 1 : 2, |x| = 24$
 $\therefore x = \pm 24$
 $\therefore B'$ 點坐標為 $(24, 0)$ 或 $(-24, 0)$

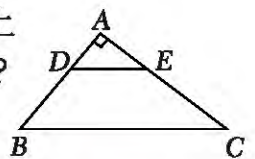
(B) 3. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， $4\overline{AE} = 3\overline{DE}$ ，求 $\triangle AEF$ 面積： $\triangle BCF$ 面積 = ?



- (A) 3 : 7
- (B) 9 : 49
- (C) 16 : 25
- (D) 16 : 49

3. $\because 4\overline{AE} = 3\overline{DE} \therefore \overline{AE} : \overline{DE} = 3 : 4$
 $\Rightarrow \overline{AE} : \overline{AD} = 3 : (3+4) = 3 : 7 \therefore \overline{AE} : \overline{BC} = 3 : 7$
 $\therefore \triangle AEF$ 面積： $\triangle BCF$ 面積 = $3^2 : 7^2 = 9 : 49$

(C) 4. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ, \overline{AB} = 9, \overline{AC} = 12, D、E$ 分別為 $\overline{AB}、\overline{AC}$ 上兩點且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 3$ ，則四邊形 $BDEC$ 面積為多少平方單位？

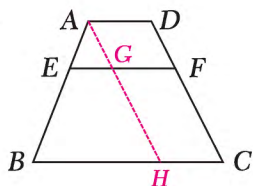


- (A) 34
- (B) 36
- (C) 48
- (D) 64

4. $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC} \therefore \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$
 即 $3 : 9 = \overline{AE} : 12 \Rightarrow \overline{AE} = 4$
 \therefore 四邊形 $BDEC$ 的面積 = $\triangle ABC$ 面積 - $\triangle ADE$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4$
 $= 48$ (平方單位)

解題小 備方 第 3 題： $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} \Rightarrow$ 三角形面積比 = 邊長的平方比。

(B) 5. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AE} : \overline{BE} = 1 : 2$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 9$ ，則 $\overline{EF} = ?$

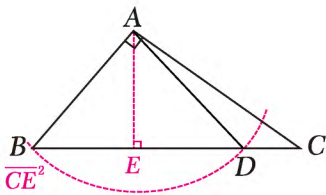


- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

5. \therefore 作 $\overline{AH} \parallel \overline{CD}$ ，交 \overline{EF} 於 G ，交 \overline{BC} 於 H
 則 $\overline{CH} = \overline{FG} = \overline{AD} = 3$ ，
 $\therefore \overline{BH} = 9 - 3 = 6$ ，
 又 $\overline{EG} : \overline{BH} = \overline{AE} : \overline{AB} \therefore \overline{EG} : 6 = 1 : (1 + 2)$
 $\Rightarrow \overline{EG} = 2 \therefore \overline{EF} = 2 + 3 = 5$ (單位)

(C) 6. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 4$ ，以 A 為圓心， \overline{AB} 為半徑畫弧交 \overline{BC} 於 D ，則 $\overline{BD} = ?$

- (A) $\frac{8}{5}$
- (B) $\frac{9}{5}$
- (C) $\frac{18}{5}$
- (D) $\frac{21}{5}$

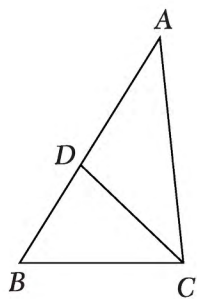


6. 令 $\overline{BE} = x$ ， $\overline{CE} = 5 - x$ ， $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2$
 $3^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2$ ， $x = \frac{9}{5}$ ， $\overline{BD} = 2\overline{BE} = \frac{18}{5}$

(C) 7. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BCD = \angle A$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 4$ ，則 $\overline{BC} = ?$

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

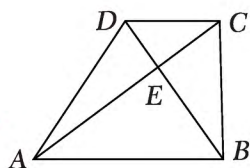
7. $\therefore \angle BCD = \angle A$ ， $\angle B = \angle B \therefore \triangle ABC \sim \triangle CBD$ (AA 相似)
 $\Rightarrow \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{BD}$ ，即 $9 : \overline{BC} = \overline{BC} : 4$ ， $\overline{BC}^2 = 36$
 $\therefore \overline{BC} = \pm 6$ (負不合)



(B) 8. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\triangle DCE$ 面積： $\triangle DCB$ 面積 = 1 : 3，則 $\triangle DCE$ 面積： $\triangle ABE$ 面積 = ?

- (A) 1 : 2
- (B) 1 : 4
- (C) 1 : 6
- (D) 1 : 8

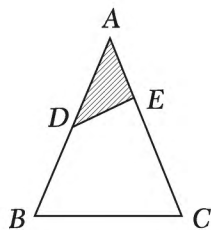
8. $\therefore \triangle DCE$ 面積： $\triangle DCB$ 面積 = 1 : 3 $\therefore \overline{DE} : \overline{DB} = 1 : 3$
 $\Rightarrow \overline{DE} : \overline{BE} = 1 : 2$ ，而 $\triangle DCE \sim \triangle BAE$
 $\therefore \triangle DCE$ 面積： $\triangle ABE$ 面積 = $\overline{DE}^2 : \overline{BE}^2 = 1 : 4$



(A) 9. 設 D 、 E 分別為 $\triangle ABC$ 中 \overline{AB} 及 \overline{AC} 上的點，若 $\overline{AD} = \overline{DB}$ 且 $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{EC}$ ，則 $\triangle ADE$ 面積與四邊形 $BCED$ 面積之比值為何？

- (A) $\frac{1}{5}$
- (B) $\frac{1}{6}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) 1

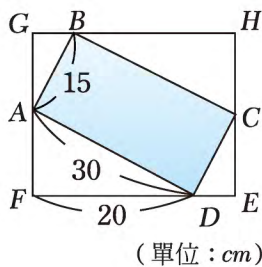
9. 如圖，因 $\overline{AD} = \overline{DB}$ ，且 $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{EC}$ ，
 所以 $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} : 1 = \frac{1}{6} : 1 = 1 : 6$ ，
 又四邊形 $BCED$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積 - $\triangle ADE$ 面積，
 因此 $\frac{\triangle ADE \text{ 面積}}{\text{四邊形 } BCED \text{ 面積}} = \frac{1}{6 - 1} = \frac{1}{5}$



(C) 10. 如右圖， $ABCD$ 及 $EFGH$ 均為矩形，若 $\overline{AB} = 15$ 、 $\overline{AD} = 30$ 、 $\overline{DF} = 20$ ，請問： $\overline{EC} = ?$

- (A) 15
- (B) 12
- (C) 10
- (D) $10\sqrt{3}$

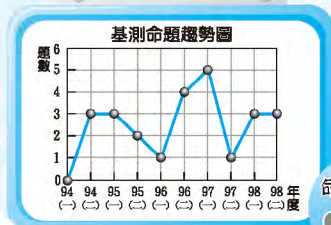
10. 由圖形可知， $\triangle ECD \sim \triangle FDA$ ，又 $\overline{AB} = \overline{CD} = 15 \text{ cm}$ ，
 $\overline{DA} = 30 \text{ cm}$ ， $\overline{FD} = 20 \text{ cm}$ ，因此 $\frac{\overline{EC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{DA}} \Rightarrow \frac{\overline{EC}}{15} = \frac{20}{30}$
 $\Rightarrow \overline{EC} = \frac{20}{30} \times 15 = 10 \text{ (cm)}$



(單位：cm)

解題小偏方

第 8 題：(1) 兩三角形同底不同高，其面積比為高的比。
 (2) 兩三角形相似，其面積比為邊長的平方比。



命題率
90%

能力一 圓、點與直線

一 點與圓的關係

在平面上點 P 與圓 O 的位置關係：

P 點在圓 O 內	Q 點在圓 O 上	R 點在圓 O 外
$\overline{OP} < r$ (半徑)	$\overline{OQ} = r$ (半徑)	$\overline{OR} > r$ (半徑)

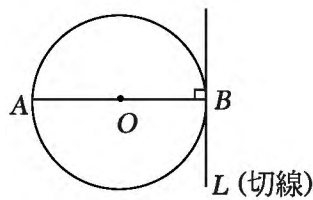
二 直線與圓

在平面上直線 L 與圓 O 的關係：

L 與圓 O 相交兩點	L 與圓 O 相交一點	L 與圓 O 不相交
$\overline{OA} < r$ (半徑)	$\overline{OB} = r$ (半徑)	$\overline{OC} > r$ (半徑)

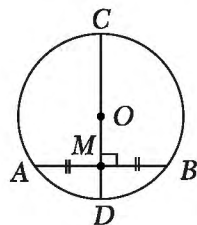
三 切線的性質

- 過一圓直徑端點的垂線為此圓之切線。
- 圓心到切線的距離等於圓的半徑。
- 圓心與切點的連線必垂直過此切點的切線。



四 弦的性質： \overline{AB} 為圓 O 的弦

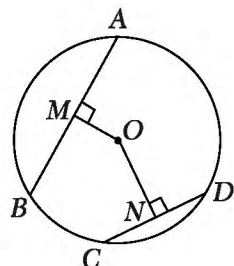
- 垂直於弦的直徑必平分此弦。
- 弦的垂直平分線必通過圓心。
- 圓心與弦的中點連線，必垂直此弦。



五 弦心距的性質：(弦與圓心的距離稱為弦心距)

- \overline{OM} 為弦 \overline{AB} 的弦心距 $\Leftrightarrow \overline{OM}$ 垂直平分 \overline{AB} 。
- 同圓：(1) 等弦 $\xleftrightarrow{\text{對}}$ 等弦心距。
(2) 大弦 $\xleftrightarrow{\text{對}}$ 小弦心距。
(3) 小弦 $\xleftrightarrow{\text{對}}$ 大弦心距。

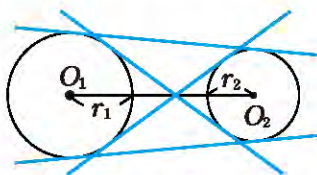
例 1：如右圖， $\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM} < \overline{ON}$ 。



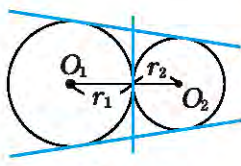
六 兩圓的位置關係，連心線長和半徑的關係與公切線數

1. 設圓 O_1 與圓 O_2 的半徑各為 r_1 、 r_2 ($r_1 > r_2$)，連心線長為 $\overline{O_1O_2}$ 。

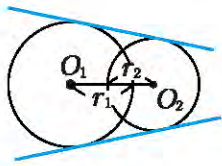
兩圓關係	連心線長	外公切線數	內公切線數	公切線總數	圖示
外離	$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$	2	2	4	圖(一)
外切	$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$	2	1	3	圖(二)
相交於兩點	$r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$	2	0	2	圖(三)
內切	$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$	1	0	1	圖(四)
內離	$0 \leq \overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$	0	0	0	圖(五)



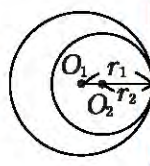
圖(一)



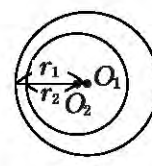
圖(二)



圖(三)



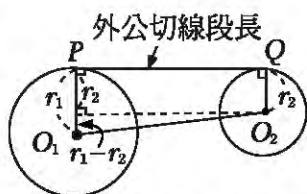
圖(四)



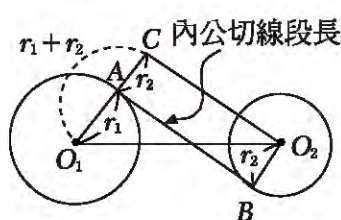
圖(五)

2. 外公切線段長 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2}$ 。 3. 內公切線段長 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2}$ 。

回訣 外 = $\sqrt{\text{心}^2 - \text{差}^2}$



回訣 內 = $\sqrt{\text{心}^2 - \text{和}^2}$

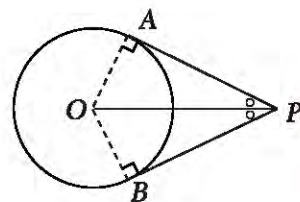


4. 若兩圓外切，則其外公切線段長為 $2\sqrt{r_1r_2}$ 。

七 切線長性質

\overline{PA} 、 \overline{PB} 分別切圓 O 於 A 、 B ，則

- $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。
- $\angle APO = \angle BPO$ 。
- $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$ 。



八 圓與比例線段

名稱	圓內幕性質	圓外幕性質	切割性質
關係	$\overline{AE} \times \overline{BE} = \overline{CE} \times \overline{DE}$	$\overline{AD} \times \overline{AE} = \overline{AB} \times \overline{AC}$	$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AT}^2$ (\overline{AT} 為切線)
圖形			

老師 傳授

點、直線與圓的位置關係

學生 實作

設圓 O 直徑為 10，圓心為 $(1, -2)$ ，點 P 坐標為 $(6, -1)$ ，點 Q 坐標為 $(5, 1)$ ，試判斷 P 、 Q 兩點與圓 O 的位置關係？

解

(1) 根據距離公式

$$\overline{OP} = \sqrt{(6-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}$$

$$\text{直徑} = 10 \quad \therefore \text{半徑} = 5, \text{ 而 } \sqrt{26} > 5$$

$\therefore P$ 點在圓 O 外

(2) 同理

$$\overline{OQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 = \text{半徑}$$

$\therefore Q$ 點在圓 O 上

設圓 O 之半徑為 $\sqrt{26}$ ，圓心為 $(2, 3)$ ，直線 L 之方程式為 $y = -2$ ，則直線 L 與圓 O 之位置關係如何？

解

過圓心 O 作直線 L 之垂直線，設垂足為 P ，則 P 點之坐標 $(2, -2)$ 圓心 O 到直線 L 的距離，即為 \overline{OP} 之長 $\therefore \overline{OP} = |3 - (-2)| = 5$

$$\therefore \overline{OP} = 5 < \sqrt{26} = \text{半徑}$$

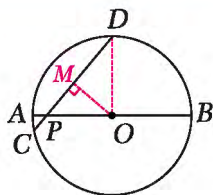
\therefore 直線 L 與圓 O 相交於兩點，為圓 O 之一條割線

老師 傳授

弦心距

學生 實作

如圖，已知 \overline{AB} 是圓 O 的直徑，弦 \overline{CD} 交 \overline{AB} 於 P ，若 $\overline{AP} = 2$ ， $\overline{BP} = 12$ ， $\overline{CP} = 4$ ， $\overline{PD} = 6$ ，求 \overline{CD} 的弦心距為何？



解

(1) 連接 \overline{OD} ，作 $\overline{OM} \perp \overline{CD}$

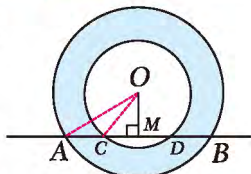
$$(2) \overline{AB} = 2 + 12 = 14 \Rightarrow \overline{OD} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

$$(3) \overline{CD} = 4 + 6 = 10 \Rightarrow \overline{DM} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

(4) 直角 $\triangle OMD$ 中， $\angle OMD = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{CD} \text{ 的弦心距} &= \overline{OM} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DM}^2} \\ &= \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} \\ &= 2\sqrt{6} \text{ (單位)} \end{aligned}$$

如圖， \overline{AB} 為兩同心圓中大圓的弦， \overline{CD} 為小圓的弦，若 $\overline{AB} = 16$ 公分， $\overline{CD} = 8$ 公分， $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ ，則色塊區域的面積為多少平方公分？



解

連接 \overline{OA} 、 \overline{OC} ，

則色塊區域的面積

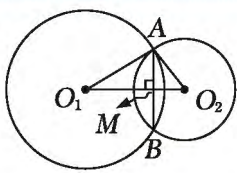
$$\begin{aligned} &= \pi \times \overline{OA}^2 - \pi \times \overline{OC}^2 = \pi \times (\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2) \\ &= \pi \times [(\overline{AM}^2 + \overline{OM}^2) - (\overline{CM}^2 + \overline{OM}^2)] \\ &= \pi \times (8^2 - 4^2) = \underline{48\pi} \text{ (平方公分)} \end{aligned}$$

老師 傳授

兩圓位置關係

學生 實作

如圖，設圓 O_1 與圓 O_2 之公弦為 \overline{AB} ，若兩圓的半徑分別為 20 cm、13 cm， $\overline{AB} = 24$ cm，求連心線段 $\overline{O_1O_2} = ?$



解

$$\therefore \overline{O_1O_2} \text{ 垂直平分 } \overline{AB} \text{ 於 } M \quad \therefore \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 12$$

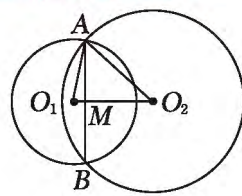
$$\text{又 } \overline{O_1A} = 20, \overline{O_2A} = 13$$

$$\therefore \overline{O_1M} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$$

$$\overline{O_2M} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$\text{故 } \overline{O_1O_2} = 16 + 5 = \underline{21 \text{ (cm)}}$$

如圖，圓 O_1 與圓 O_2 交於 A 、 B 兩點，若圓 O_1 半徑為 13，圓 O_2 半徑為 15，且 $\overline{AB} = 24$ ，求 $\overline{O_1O_2} = ?$



解

$$2\overline{AM} = \overline{AB} = 24, \overline{AM} = 12,$$

$$\overline{O_1M} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\overline{O_2M} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

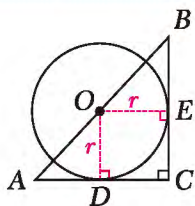
$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1M} + \overline{O_2M} = \underline{14 \text{ (單位)}}$$

4 老師 傳授

圓與切線關係

學生 習作 4

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， O 在 \overline{AB} 上，圓 O 與 \overline{AC} 、 \overline{BC} 分別切於 D 、 E ， r 為圓 O 的半徑，試求 $r = ?$



解

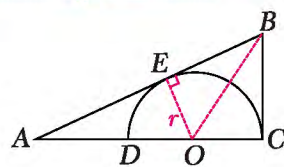
連接 \overline{OC} ，

$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle BOC$ 面積 + $\triangle AOC$ 面積

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times 3 \times r$$

$$\Rightarrow r = \frac{3 \times 4}{3 + 4} = \frac{12}{7} \text{ (單位)}$$

如圖，直角 $\triangle ABC$ 中，有一個半圓，圓心 O 在 \overline{AC} 上，切 \overline{AB} 於 E 點，切 \overline{BC} 於 C 點，若 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ，則半圓的半徑 = ?



解

設圓半徑為 r ，連接 \overline{OE} ， \overline{OB}

$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle BOC$ 面積

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r\right) + \left(\frac{1}{2} \times r \times 6\right)$$

$$48 = 10r + 6r, r = 3$$

Let's Go! 同步 評量 1

(C) 1. 已知兩等圓外切且其半徑為 8 公分，若兩圓的外公切線長 17 公分，則兩圓的位置關係為何？

1. \therefore 连心線長 = $8 + 8 = 16$ ，又 $17 > 16 \therefore$ 兩圓外離

- (A) 內切 (B) 外切 (C) 外離 (D) 相交兩點

(A) 2. 有大小兩圓，其面積比為 9 : 16，兩圓外切時，连心線長 14 公分，則兩圓內切時，其连心線長是多少公分？

2. 面積比為 9 : 16 \Rightarrow 半徑比為 3 : 4 \therefore 設兩圓半徑為 $3x$ 、 $4x$
 $3x + 4x = 14$ ， $x = 2 \Rightarrow$ 兩圓半徑為 6、8，
 故內切時连心線長 = $8 - 6 = 2$ (公分)

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(B) 3. 如右圖， \overline{AB} 切圓 O 於 B ， \overline{AO} 交圓 O 於 C ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{OC} = 5$ ，求 $\overline{AC} = ?$

3. (1) 連接 \overline{OB} $\because \overline{AB}$ 為切線 $\therefore \overline{OB} \perp \overline{AB}$

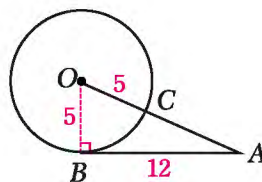
(2) $\because \overline{AB} = 12$ ， $\overline{OB} = \overline{OC} = 5$

$\therefore \overline{OA} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

(3) $\therefore \overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC} = 13 - 5 = 8$ (單位)

- (A) 5 (B) 8

- (C) 13 (D) 15



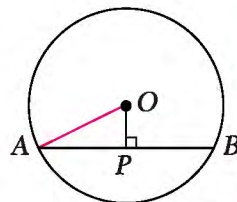
(B) 4. 已知 P 為圓 O 內部一點，且 $\overline{OP} = 5$ ，而過 P 點的諸弦中，最長的弦其長度為 26 公分，則最短的弦其長度為多少公分？

- (A) 20 (B) 24

- (C) 25 (D) 26

4. 最長的弦就是直徑 $\therefore r = \frac{1}{2} \times 26 = 13$ ，連接 \overline{OA} ，

$\overline{AP} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \therefore \overline{AB} = 2 \times 12 = 24$ (公分)



(D) 5. 如右圖， O_1 、 O_2 和 O_3 分別是兩兩相互外切的三圓的圓心，已知 $\overline{O_1O_2} = 5$ 公分， $\overline{O_2O_3} = 4$ 公分， $\overline{O_3O_1} = 3$ 公分，求此三圓的半徑和為多少？

5. (1) 設圓 O_1 半徑為 r_1 公分，圓 O_2 半徑為 r_2 公分，圓 O_3 半徑為 r_3 公分

(2) 連接 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_1}$ 必分別過切點

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \overline{O_1O_2} = 5 \cdots \text{①} \\ r_2 + r_3 = \overline{O_2O_3} = 4 \cdots \text{②} \\ r_3 + r_1 = \overline{O_3O_1} = 3 \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r_1 + r_2 = \overline{O_1O_2} = 5 \cdots \text{①} \\ r_2 + r_3 = \overline{O_2O_3} = 4 \cdots \text{②} \\ r_3 + r_1 = \overline{O_3O_1} = 3 \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \overline{O_1O_2} = 5 \cdots \text{①} \\ r_2 + r_3 = \overline{O_2O_3} = 4 \cdots \text{②} \\ r_3 + r_1 = \overline{O_3O_1} = 3 \cdots \text{③} \end{cases}$$

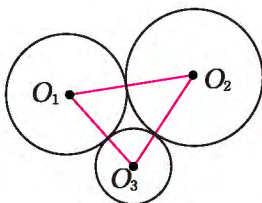
把① + ② + ③得 $2(r_1 + r_2 + r_3) = 12 \therefore r_1 + r_2 + r_3 = 6$

- (A) 9 公分

- (B) 8 公分

- (C) 7 公分

- (D) 6 公分

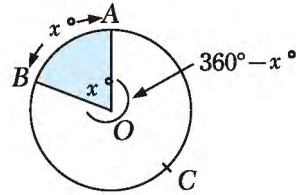


能力二 圓形與角度

一 圓心角與弧的度數

一個圓弧的弧度即是此圓弧所對圓心角的度數。

1. 圓心角 $\angle AOB = x^\circ$ 。
2. 圓弧弧度： $\widehat{AB} = x^\circ$ (劣弧)； $\widehat{ACB} = 360^\circ - x^\circ$ (優弧)。



二 圓周角

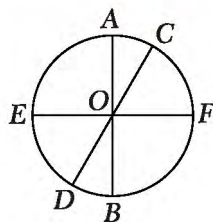
圓周角		<p>(1) $\because \overline{OB} = \overline{OC}, \therefore \angle ABC = \angle BCO$</p> <p>(2) $\because \angle AOC = \angle BCO + \angle ABC, \therefore \angle AOC = 2\angle ABC$</p> <p>(3) $\because \angle AOC = \widehat{AC}, \therefore \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\widehat{AC}$</p>
-----	--	---

三 弦切角、圓內角與圓外角

弦切角		$\angle ACB = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ <p>證明： 因為 $\angle ACB + \angle DCA = 90^\circ = \angle CDA + \angle DCA$ $\Rightarrow \angle ACB = \angle CDA = \frac{1}{2}\widehat{AC}$</p>
圓內角		$\angle APB = \angle CPD = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD})$ <p>證明： $\angle APB = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{CD} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD})$</p>
圓外角		$\angle APB = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$ <p>證明： $\angle APB = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{AB} - \frac{1}{2}\widehat{CD} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$</p>

5 老師 傳授

如圖， O 為圓心， \overline{AB} 為直徑，若 $\widehat{AC} : \widehat{CF} : \widehat{FB} = 1 : 2 : 3$ ，則 $\angle DOB = ?$



解

$\because \overline{AB}$ 、 \overline{CD} 與 \overline{EF} 皆為直徑

$\therefore \angle AOC = \angle DOB$

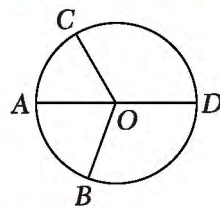
$\because \widehat{AFB} = 180^\circ, \therefore \widehat{AC} = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$

$\angle DOB = \angle AOC = \widehat{AC} = 30^\circ$

圓心角

學生 習作

如圖， \widehat{AB} 與 \widehat{CD} 的弧長比為 $5 : 6$ ，且 $\angle COD = 120^\circ$ ，則 $\angle AOB = ?$



解

\widehat{AB} 弧長： \widehat{CD} 弧長 = $\angle AOB : \angle COD$

$5 : 6 = \angle AOB : 120^\circ$

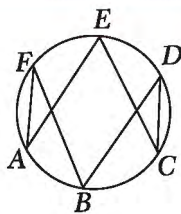
$\angle AOB = 120^\circ \times \frac{5}{6} = 100^\circ$

6 老師傳授

圓周角與弧

學生習作 6

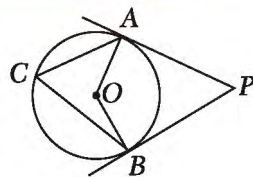
如圖，圓周上 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 六點，若 $\angle AFB = 21^\circ$ ， $\angle AEC = 49^\circ$ ，試求 $\angle BDC = ?$



解

$$\begin{aligned}\angle AFB &= \frac{1}{2}\widehat{AB} = 21^\circ, \widehat{AB} = 42^\circ, \\ \angle AEC &= \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 49^\circ, \widehat{ABC} = 98^\circ, \\ \angle BDC &= \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} - \widehat{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(98^\circ - 42^\circ) = \underline{28^\circ}\end{aligned}$$

如圖， \overrightarrow{PA} 、 \overrightarrow{PB} 分別切圓 O 於 A 、 B 兩點，已知 $\angle P = 48^\circ$ ，試求 $\angle AOB - \angle ACB = ?$



解

$$\begin{aligned}\because \overline{OA} \perp \overline{PA}, \overline{OB} \perp \overline{PB} &\Rightarrow \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ \\ \angle AOB &= 360^\circ - (2 \times 90^\circ) - 48^\circ = 132^\circ = \widehat{AB} \\ \therefore \angle ACB &= \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 132^\circ = 66^\circ \\ \angle AOB - \angle ACB &= 132^\circ - 66^\circ = \underline{66^\circ}\end{aligned}$$

解題小備方 老師 6：圓周角 = $\frac{1}{2}$ 圓心角 = $\frac{1}{2}$ 夾弧度數。

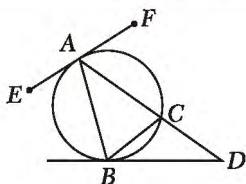
學生 6：圓切點的直（半）徑與切線垂直。

7 老師傳授

弦切角

學生習作 7

如圖， \overline{EF} 與 \overline{BD} 為圓的切線， A 、 B 分別為其切點，若 $\angle CBD = 38^\circ$ ， $\angle D = 44^\circ$ ，請問：

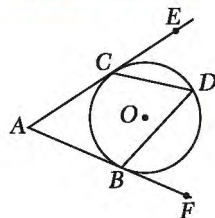


- (1) \widehat{AB} 的度數？
- (2) $\angle FAC$ 的度數？

解

$$\begin{aligned}(1) \angle ACB &= \frac{1}{2}\widehat{AB}, \\ \angle ACB &= \angle CBD + \angle D = 38^\circ + 44^\circ = 82^\circ \\ \therefore \widehat{AB} &= 2\angle ACB = \underline{164^\circ} \\ (2) \angle FAC &= 180^\circ - \angle EAB - \angle BAC \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AB} - \angle CBD \\ &= 180^\circ - 82^\circ - 38^\circ \\ &= \underline{60^\circ}\end{aligned}$$

如圖， A 為圓外一點， \overrightarrow{AE} 與 \overrightarrow{AF} 切圓於 C 、 B 兩點， D 為圓上一點。若 $\angle A = 66^\circ$ ，請問：



- (1) $\angle CDB = ?$
- (2) $\angle ECD + \angle DBF = ?$

解

$$\begin{aligned}(1) \widehat{BC} &= \angle BOC = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ, \\ \angle CDB &= \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2} \times 114^\circ = \underline{57^\circ} \\ (2) \angle ECD + \angle DBF &= \frac{1}{2}\widehat{CD} + \frac{1}{2}\widehat{BD} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{CDB} \\ &= \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{BC}) \\ &= 180^\circ - \angle BDC \\ &= 180^\circ - 57^\circ = \underline{123^\circ}\end{aligned}$$

解題小備方 老師 7：弦切角 = $\frac{1}{2}$ 夾弧度數。

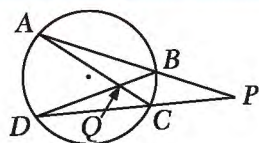
學生 7：需作輔助線 \overline{OC} 與 \overline{OB} ，再利用四邊形內角和 360° ，求 \widehat{BC} 度數。

8 老師 傳授

圓內角、圓外角

學生 實作 8

如圖， \overline{AB} 與 \overline{CD} 的延長線交於 P 點， \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 Q 點，請問：

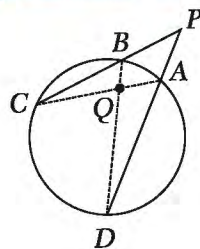


- (1) 若 $\angle A Q D = 2 \angle P$ ，求 $\widehat{AD} : \widehat{BC}$ 的比值？
- (2) 若 $\angle A P D = 45^\circ$ ，且 $\widehat{AD} : \widehat{BC} = 5 : 2$ ，求 $\angle A C D = ?$

解

- (1) $\angle A Q D = 2 \angle P$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = 2 \times \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC})$
 $\Rightarrow \widehat{AD} = 3\widehat{BC} \Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{\widehat{BC}} = \underline{3}$
- (2) $\widehat{AD} = 5r$ ， $\widehat{BC} = 2r$ ，
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(5r - 2r) = 45^\circ$ ， $3r = 90^\circ$ ， $r = 30^\circ$
 $\widehat{AD} = 5 \times 30^\circ = 150^\circ$ ，
 $\angle A C D = \frac{1}{2}\widehat{AD} = \underline{75^\circ}$

如圖，圖上有 A 、 B 、 C 、 D 四點及圓外一點 P ，且 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 3 : 7 : 9 : 11$ ，請問：



- (1) $\angle P = ?$
- (2) $\angle C Q B = ?$

解

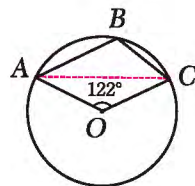
- (1) $\angle P = \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AB})$
 $= \frac{1}{2}(360^\circ \times \frac{9}{30} - 360^\circ \times \frac{3}{30})$
 $= \frac{1}{2}(108^\circ - 36^\circ)$
 $= \underline{36^\circ}$
- (2) $\angle C Q B = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DA})$
 $= \frac{1}{2}(360^\circ \times \frac{7}{30} + 360^\circ \times \frac{11}{30})$
 $= \frac{1}{2}(84^\circ + 132^\circ)$
 $= \underline{108^\circ}$

Let's Go! 同步 評量 2

(B) 1. 如右圖，若 $\angle A O C = 122^\circ$ ，則 $\angle B A O + \angle B C O = ?$

- (A) 110°
- (B) 119°
- (C) 101°
- (D) 191°

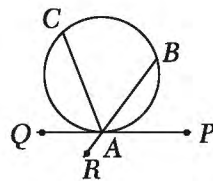
1. 連接 \overline{AC} ， $\because \angle A O C = 122^\circ$ ， $\therefore \widehat{AB} + \widehat{BC} = 122^\circ$
 $\angle B C A + \angle B A C = \frac{1}{2} \times 122^\circ = 61^\circ$ ，
 $\angle O A C + \angle O C A = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$ ，
 $\angle B A O + \angle B C O = 61^\circ + 58^\circ = 119^\circ$



(A) 2. 如右圖， \overline{PQ} 為圓之切線， A 為切點，若 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ ， $\angle R A Q = 52^\circ$ ，求 $\angle Q A C = ?$

- (A) 64°
- (B) 66°
- (C) 68°
- (D) 70°

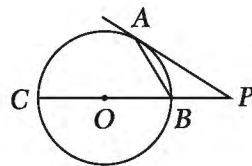
2. $\because \angle R A Q = 52^\circ = \angle B A P$ ， $\therefore \widehat{AB} = 52^\circ \times 2 = 104^\circ$ ，
 $\widehat{AC} = (360^\circ - 104^\circ) \times \frac{1}{2} = 128^\circ$ ，
 $\angle Q A C = 128^\circ \times \frac{1}{2} = 64^\circ$



(B) 3. 如右圖， \overline{PA} 為圓之切線， A 為切點， \overline{BC} 為直徑，若 $\widehat{AC} : \widehat{AB} = 3 : 1$ ，求 $\angle P A B = ?$

- (A) 20°
- (B) 22.5°
- (C) 30°
- (D) 32.5°

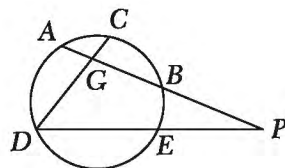
3. $\angle P A B = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}(180^\circ \times \frac{1}{3+1}) = 22.5$



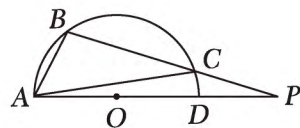
(D) 4. 如右圖，已知 $\widehat{AD} = 75^\circ$ ， $\widehat{BC} = 65^\circ$ ，求 $\angle A G C = ?$

- (A) 92°
- (B) 95°
- (C) 105°
- (D) 110°

4. $\angle A G D = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(75^\circ + 65^\circ) = 70^\circ$ ，
 $\angle A G C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$



- (C) 5. 如右圖, \overline{AD} 是半圓的直徑, 若 $\angle P = 25^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, 求 $\angle ACB = ?$
- (A) 25° (B) 30°
(C) 35° (D) 40°



$$5. \widehat{BC} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \\ \widehat{AB} - \widehat{CD} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ \end{cases}$$

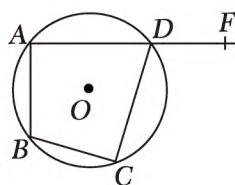
$$\Rightarrow \widehat{AB} = 70^\circ, \angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = 35^\circ$$

能力三 圓與多邊形

一 圓內接四邊形性質：(對角互補)

如圖(一), 四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的圓內接四邊形,
 $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle B = \angle CDF$ 。

※ 正方形、長方形和等腰梯形皆有一外接圓。



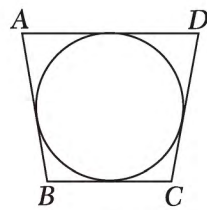
圖(一)

二 圓外切四邊形性質

如圖(二), 四邊形 $ABCD$ 的四邊分別與圓相切, 則

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}。$$

※ 正方形、菱形和鳶形皆有一內切圓。



圖(二)

9

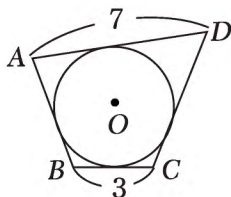
老師傳授

圓與四邊形的關係

學生實作

9

如圖, $ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形, 若 $ABCD$ 的面積是 15, 則圓 O 的半徑是多少?

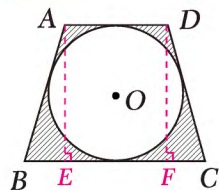


解

- (1) $\because ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形
 $\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} = 10$
- (2) $\triangle AOD$ 面積 + $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle BOC$ 面積 + $\triangle COD$ 面積
= 四邊形 $ABCD$ 面積
設圓半徑為 r
- $$\Rightarrow \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \times r = 15$$
- $$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 20 \times r = 15, 10r = 15$$
- $$\Rightarrow r = 1.5 \text{ (單位)}$$



如圖, 梯形 $ABCD$ 外切於圓 O , 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = 3$, $\overline{BC} = 5$, 求圓 O 面積為何?



解

- (1) $\because \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$, 又 $\overline{AB} = \overline{CD}$
 $\therefore 3 + 5 = 2\overline{AB} = 2\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} = 4$
- (2) 作高 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\overline{DF} \perp \overline{BC}$
 $\therefore \overline{BE} = \overline{CF} = \frac{5-3}{2} = 1$
 $\therefore \overline{AE} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$
 \Rightarrow 圓 O 的半徑 = $\frac{\sqrt{15}}{2}$
- (3) 故圓 O 的面積 = $\pi \times \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2$
 $= \frac{15}{4} \pi \text{ (平方單位)}$

解題小偏方 老師 9: $\frac{\text{圓半徑}}{2} = \frac{\text{圓外切四邊形面積}}{\text{圓外切四邊形周長}}$

Let's Go! 同步評量 3

(D) 1. 等腰梯形 $ABCD$ 外切於圓 O ，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，已知一腰 $\overline{AB} = 8$ 公分，則其中線長為多少公分？

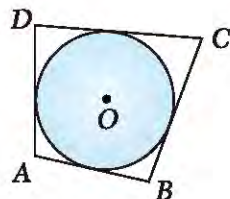
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

1. $\overline{BC} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD} = 8 + 8 = 16$ ，
中線長 $= \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ (公分)

(D) 2. 如右圖，圓外切四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{CD} = 10$ ，則 $\overline{AD} + \overline{BC} = ?$

- (A) 7 (B) 10
(C) 15 (D) 17

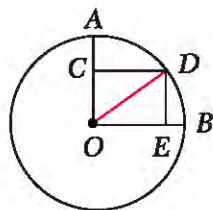
2. \therefore 圓外切四邊形中
 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{CD} + \overline{AB} = 10 + 7 = 17$ (公分)



(B) 3. 如右圖， $COED$ 為矩形， $\overline{CD} = 4$ ， $\overline{DE} = 3$ ，求圓 O 的周長為何？

- (A) 5π
(B) 10π
(C) 15π
(D) 20π

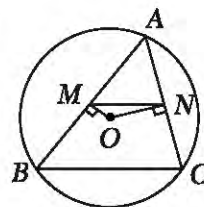
3. 連接 \overline{OD} ， $\overline{OE} = \overline{CD} = 4$ ， $\overline{OD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 \therefore 圓 O 的周長 $= 2 \times 5 \times \pi = 10\pi$ (單位)



(A) 4. 如右圖，在圓 O 中， \overline{AB} 、 \overline{AC} 是兩條弦， $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 於 M ， $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ 於 N 。若 $\overline{BC} = 10$ ，求 $\overline{MN} = ?$

- (A) 5 (B) 4
(C) 6 (D) 3.5

4. $\therefore \overline{OM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ $\therefore M$ 、 N 是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點
 $\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ (單位)



實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

(B) 1. 設圓 O 半徑為 $\sqrt{23}$ ，圓心 O 坐標為 $(-2, 3)$ ，直線 L 方程式為 $y = -1$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) L 為圓 O 的切線 (B) L 為圓 O 的割線
(C) L 與圓 O 不相交 (D) 依題意無法確定 L 與圓 O 的位置關係

1. 圓心 O 到 L 的距離 $= |3 - (-1)| = 4$ ，而半徑 $\sqrt{23} > 4$ $\therefore L$ 為圓 O 的割線

(A) 2. 兩圓共有四條公切線，如果半徑分別為 11 公分、 K 公分，連心線長 18 公分，則 K 的範圍為何？

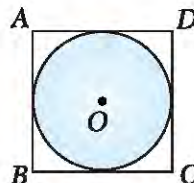
- (A) $0 < K < 7$ (B) $11 < K < 18$
(C) $6 < K < 12$ (D) $0 < K < 5$

2. 兩圓共有四條公切線 \therefore 兩圓外離 \therefore 連心線長 $18 > 11 + K$
 $\therefore K < 7$ ，又 $K > 0$ $\therefore 0 < K < 7$

(C) 3. 有一正方形 $ABCD$ ，若邊長 $\overline{AB} = 8$ ，則此正方形的內切圓面積為何？

- (A) 36π
(B) 24π
(C) 16π
(D) 9π

3. $\pi \times (\frac{8}{2})^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$ (平方單位)



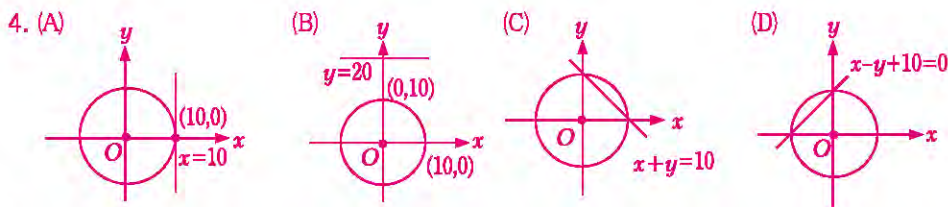
(A) 4. 已知圓 O 的半徑為 10，且圓心位於直角坐標平面上的原點上，則此圓與下列哪一條直線僅有一交點？

(A) $x = 10$

(B) $y = 20$

(C) $x + y = 10$

(D) $x - y + 10 = 0$



(A) 5. 兩圓內切，其半徑比為 3:4，連心線長為 14，則較大之圓的半徑為何？

(A) 56

(B) 42

(C) 8

(D) 6

5. 設兩圓的半徑分別為 $3r$ 、 $4r$ $\therefore 4r - 3r = 14$
 $\therefore r = 14$ \therefore 大圓的半徑 $= 4 \times 14 = 56$

※(B) 6. 雖然髮禁解除了，但某國中仍規定髮線的夾角需為 90° ($\angle ABC = 90^\circ$)，下圖為男生的髮型圖示，在(甲)圖中 $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ，(乙)圖中 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，(丙)圖中 $\overline{AB} = 3\overline{BC}$ ，哪一種髮型頭髮部分(灰色)的面積最小？

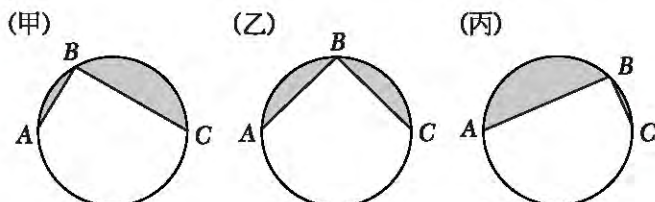
(A) 甲

(B) 乙

(C) 丙

(D) 都一樣大

6. \therefore (乙) 圖 $\triangle ABC$ 的高最大
 (當底為 \overline{AC} 時)
 (乙) 圖中的 $\triangle ABC$ 面積最大
 故(乙) 圖的灰色面積較小



(C) 7. 如右圖，圓 O 與 x 軸相切於 $(1, 0)$ 交 y 軸於 $A(0, 4 + \sqrt{15})$ ， $B(0, 4 - \sqrt{15})$ ，則圓 O 之面積為何？

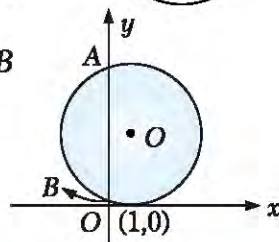
(A) 14π

(B) 15π

(C) 16π

(D) 17π

7. \overline{AB} 之中點坐標為 $(0, 4)$
 \therefore 圓心 O 之坐標為 $(1, 4)$ 又切點為 $(1, 0)$
 \Rightarrow 半徑 $r = 4$ \therefore 圓面積為 16π (平方單位)



(D) 8. 有兩個同心圓，已知大圓的半徑為 10 公分，且小圓面積為大圓面積的一半，若大圓的弦 \overline{AB} 與小圓相切，則 \overline{AB} 的長為多少公分？

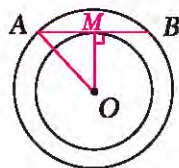
(A) 13

(B) 12

(C) $10\sqrt{3}$

(D) $10\sqrt{2}$

8. 設小圓的半徑為 r 公分 \therefore 小圓面積為大圓面積的一半
 \therefore 小圓面積 $= \frac{1}{2} \times (\pi \times 10^2) = 50\pi = \pi r^2$ $\therefore r^2 = 50$
 $\therefore \overline{AM} = \sqrt{10^2 - r^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
 $\therefore \overline{AB} = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ (公分)



(C) 9. 如右圖， \overline{AB} 切圓 O 於 B ， \overline{AO} 交圓 O 於 C ，若 $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AC} = 18$ ，則圓 O 之面積為何？

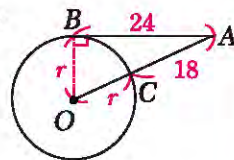
(A) 81π

(B) 64π

(C) 49π

(D) 25π

9. 設圓 O 的半徑為 r
 $\therefore (18 + r)^2 = r^2 + 24^2$
 $324 + 36r + r^2 = r^2 + 576$
 $36r = 252$ ， $r = 7$
 \therefore 圓 O 面積 $= \pi \times 7^2 = 49\pi$ (平方單位)



(D) 10. 如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 且 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為圓 O 之切線， D 、 E 為切點。若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，則圓 O 之半徑為多少？

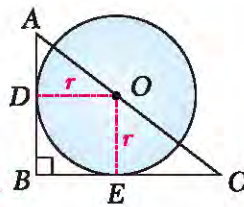
(A) 4

(B) 5

(C) $\frac{48}{5}$

(D) $\frac{24}{7}$

10. 連 \overline{OD} 、 $\overline{OE} \Rightarrow \overline{OD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ ，設 $\overline{OD} = \overline{OE} = r$
 $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle BOC$ 面積 $= \triangle ABC$ 面積
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$ ， $6r + 8r = 48$ ， $r = \frac{24}{7}$



解題小方

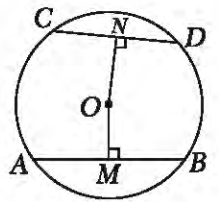
第 9 題：要作輔助線，連接切點與圓心。

第 10 題：要作輔助線，連接切點與圓心。

(B) 11. 如右圖， $\overline{AB} = 8$ 公分， $\overline{CD} = 6$ 公分，且 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ ，若 $\overline{OM} = 3$ 公分，則 $\overline{ON} = ?$

- (A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6

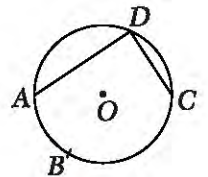
11. $\because \overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 4$
 $\because \overline{ON} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{CN} = \overline{DN} = \frac{1}{2} \overline{CD} = 3$ ，又 $\overline{OM} = 3$
 得 $\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2 = 9 + 16 = 25 = \overline{OC}^2 \Rightarrow \overline{OA} = 5 = \overline{OC}$
 $\overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2$ ，即 $25 = \overline{ON}^2 + 9 \Rightarrow \overline{ON}^2 = 16 \therefore \overline{ON} = 4$ (公分)



(C) 12. 如右圖，若 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} = 2 : 4 : 6$ ，則 $\angle ADC = ?$

- (A) 120° (B) 110°
(C) 90° (D) 80°

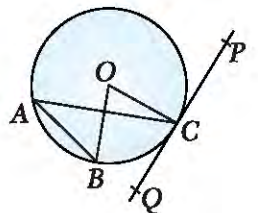
12. $\widehat{ABC} = 360^\circ \times \frac{2+4}{2+4+6} = 180^\circ$
 $\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 90^\circ$



(B) 13. 如右圖， \overline{PQ} 切圓 O 於 C 點，若 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ，且 $\angle A = 40^\circ$ ，則 $\angle BOC + \angle ACO = ?$

- (A) 80°
(B) 90°
(C) 100°
(D) 110°

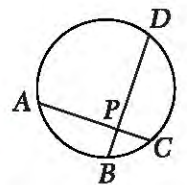
13. $\angle BOC = \widehat{BC} = 2\angle A = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$
 $\widehat{ABC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = 2\widehat{BC} = 2 \times 80^\circ = 160^\circ$
 $\angle ACQ = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \times 160^\circ = 80^\circ$
 $\angle ACO = 90^\circ - \angle ACQ = 10^\circ$
 $\angle BOC + \angle ACO = 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$



(A) 14. 如右圖，若 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{AD} = 4 : 2 : 5 : 7$ ，則 $\angle APD = ?$

- (A) 90° (B) 85°
(C) 80° (D) 75°

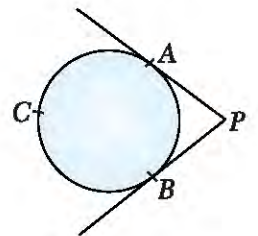
14. $\angle APD = \frac{1}{2} (\widehat{BC} + \widehat{AD}) = \frac{1}{2} (360^\circ \times \frac{2}{18} + 360^\circ \times \frac{7}{18})$
 $= \frac{1}{2} (40^\circ + 140^\circ) = 90^\circ$



(B) 15. 如右圖，已知 \overline{PA} 、 \overline{PB} 切圓於 A、B 兩點，若 $\angle APB = 75^\circ$ ，則 $\widehat{ACB} = ?$

- (A) 250° (B) 255°
(C) 260° (D) 265°

15. $\begin{cases} \widehat{ACB} + \widehat{AB} = 360^\circ \\ \frac{1}{2} (\widehat{ACB} - \widehat{AB}) = 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = 255^\circ$

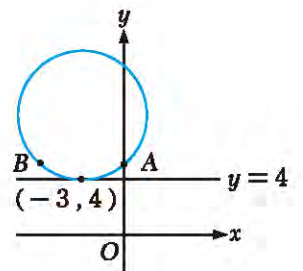


歷屆基礎題

(D) 1. 如右圖，座標平面上，一圓與方程式 $y = 4$ 的直線相切於點 $(-3, 4)$ ，且交 y 軸於 A 點。若 B 點在圓上，且 $\overline{AB} \perp y$ 軸，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) 3 (B) 4
(C) 5 (D) 6

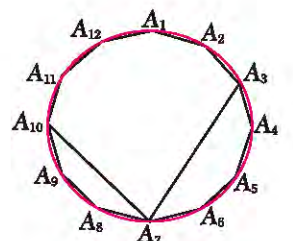
1. 直線 $y = 4$ 與圓相切於 $(-3, 4)$ 88 基測二
 \Rightarrow 直線 $x = -3$ 為 A、B 兩點的對稱軸
 $\Rightarrow \overline{AB} = 2 \times 3 = 6$



(C) 2. 右圖為正十二邊形，其頂點依序為 A_1, A_2, \dots, A_{12} 。若連接 $\overline{A_3A_7}$ 、 $\overline{A_7A_{10}}$ ，則 $\angle A_3A_7A_{10} = ?$

- (A) 45° (B) 60°
(C) 75° (D) 90°

2. 畫出此正十二邊形的外接圓，如圖所示
 \because 等弧對等弦
 $\therefore \angle A_3A_7A_{10} = (\frac{5}{12} \times 360^\circ) \times \frac{1}{2} = 75^\circ$



解題小秘方

第 13 題：半徑垂直切線於切點，所夾角度為 90° 。
 第 14 題：圓內角 = 兩弦所夾的相對應兩弧度數之和的一半。

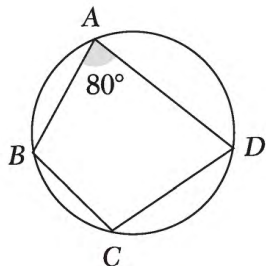
(D) 3. 右圖有 \overline{AB} 與 \overline{AC} 兩線段。若一圓 O 過 A 、 B 兩點，且與直線 AC 相切，則下列哪一條直線會通過圓心 O ？



- (A) $\angle CAB$ 的角平分線
- (B) \overline{AC} 的中垂線
- (C) 過 C 點與 \overline{AC} 垂直的直線
- (D) 過 A 點與 \overline{AC} 垂直的直線

3. 圓與直線 AC 相切於 A 點
 \Rightarrow 過圓心與 A 點的直線垂直直線 AC 於 A
 \Rightarrow 過 A 點與 \overline{AC} 垂直的直線通過圓心
 故選(D)

(C) 4. 如右圖，圓上有 A 、 B 、 C 、 D 四點，其中 $\angle BAD = 80^\circ$ 。若 \widehat{ABC} 、 \widehat{ADC} 的長度分別為 7π 、 11π ，則 \widehat{BAD} 的長度為何？



- (A) 4π
- (B) 8π
- (C) 10π
- (D) 15π

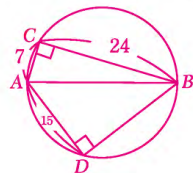
4. \therefore 圓周長 $= \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 7\pi + 11\pi = 18\pi$
 又 $\angle BAD = 80^\circ$, $\widehat{BCD} = 160^\circ$, $\widehat{BAD} = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$
 $\therefore \widehat{BAD} = \frac{200^\circ}{360^\circ} \times 18\pi = 10\pi$

98 基測一

(B) 5. \overline{AB} 是一圓的直徑， C 、 D 是圓周上的兩點。已知 $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{BC} = 24$ ， $\overline{AD} = 15$ ，求 $\overline{BD} = ?$

- (A) 16
- (B) 20
- (C) $\frac{35}{8}$
- (D) $\frac{56}{5}$

5. $\therefore \overline{AB}$ 為直徑，
 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 皆為直角三角形
 $\therefore \overline{AB} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$
 $\overline{BD} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$



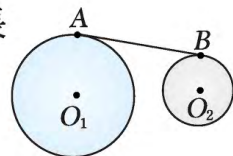
98 基測一

基測題

(D) 1. 如右圖，圓 O_1 的半徑為 6，圓 O_2 半徑為 3， $\overline{O_1O_2} = 16$ ，則公切線長 $\overline{AB} = ?$

- (A) $\sqrt{241}$
- (B) $\sqrt{243}$
- (C) $7\sqrt{5}$
- (D) $\sqrt{247}$

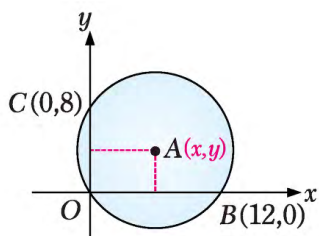
1. $\overline{AB} = \sqrt{O_1O_2^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{16^2 - (6 - 3)^2} = \sqrt{247}$ (單位)



(B) 2. 如右圖，圓 A 與兩軸交於 $(0, 0)$ 、 $(12, 0)$ 、 $(0, 8)$ 三點，則圓心 A 點的坐標為何？

- (A) $(4, 4)$
- (B) $(6, 4)$
- (C) $(4, 6)$
- (D) $(6, 6)$

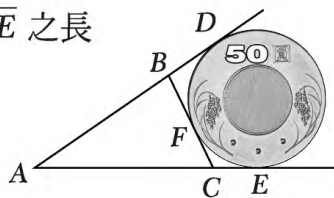
2. 設 A 點為 (x, y) , $x = \frac{0 + 12}{2} = 6$, $y = \frac{0 + 8}{2} = 4$
 $\therefore A(6, 4)$



(D) 3. 如右圖， \overline{AD} 、 \overline{AE} 、 \overline{BC} 分別切圓於 D 、 E 、 F ，若切線 \overline{AD} 、 \overline{AE} 之長均為 8 公分，則 $\triangle ABC$ 之周長為多少公分？

- (A) 13
- (B) 14
- (C) 15
- (D) 16

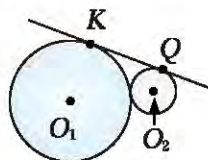
3. $\therefore \overline{BF} = \overline{BD}$, $\overline{CF} = \overline{CE}$
 $\therefore \triangle ABC$ 周長 $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AE} = 8 + 8 = 16$ (公分)



(A) 4. 如右圖，若 $\overline{KQ} = 12$ ，圓 O_1 的半徑為 8，圓 O_2 半徑為 3，則連心線 $\overline{O_1O_2} = ?$

- (A) 13 (B) 12
(C) 10 (D) 9

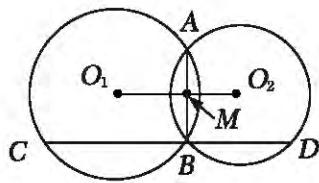
4. $\overline{O_1O_2} = \sqrt{KQ^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{12^2 + (8 - 3)^2} = 13$ (單位)



(A) 5. 如右圖，圓 O_1 、 O_2 相交於 A、B 兩點，過 B 點作一平行於連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的直線，分別交於 C、D，若 $\overline{O_1O_2} = 16$ ，則 $\overline{CD} = ?$

- (A) 32 (B) 36
(C) 48 (D) 64

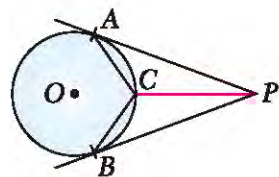
5. $\because \overline{AM} = \overline{BM}$
 $\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{O_1O_2}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{16}{CD} \Rightarrow \overline{CD} = 32$ (單位)



(D) 6. 如右圖， \overline{AP} 與 \overline{BP} 均為圓 O 的切線，若 $\angle P = 52^\circ$ ，則 $\angle ACB = ?$

- (A) 110° (B) 112°
(C) 114° (D) 116°

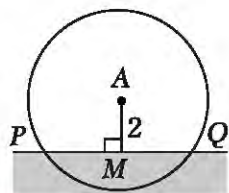
6. $\because \angle P = 52^\circ, \angle OAP = 90^\circ = \angle OBP,$
 $\therefore \angle AOB = 360^\circ - 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ,$
 $\widehat{ACB} = 128^\circ, \widehat{AB} = 360^\circ - 128^\circ = 232^\circ,$
 $\angle ACB = 232^\circ \times \frac{1}{2} = 116^\circ$



(D) 7. 有厚度相同的 A、B、C、D 四種硬幣，直徑分別為 5 公分、4.5 公分、3.5 公分、2.5 公分，欲投入一個撲滿中，結果 A 種硬幣無法投入，卡在洞口 \overline{PQ} ，如右圖，已知 A 硬幣圓心距離撲滿入口 2 公分，試問哪幾種硬幣可以投入該撲滿？

- (A) B、C (B) B、D
(C) C、D (D) D

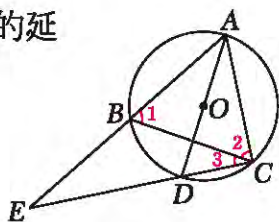
7. $\because \overline{PA} = 5 \div 2 = 2.5,$
 $\overline{PM} = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5, \overline{PQ} = 1.5 \times 2 = 3$
 \therefore 撲滿入口長度 $\overline{PQ} = 3$ (公分)
故只有 D 硬幣可以投入撲滿



(B) 8. 如右圖，已知圓 O 為正 $\triangle ABC$ 的外接圓， \overline{AD} 是直徑， \overline{AB} 與 \overline{CD} 的延長線交於 E 點，求 $\angle AED = ?$

- (A) 25°
(B) 30°
(C) 45°
(D) 60°

8. $\because \angle 1 = \angle 2 = 60^\circ, \widehat{AC} = 120^\circ, \therefore \overline{AD}$ 為直徑，
 $\therefore \angle ACD = 90^\circ, \angle 3 = 30^\circ, \widehat{BD} = 60^\circ,$
 $\angle AED = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD}) = \frac{1}{2}(120^\circ - 60^\circ) = 30^\circ$



(C) 9. 相交的兩圓半徑分別是 $\sqrt{7} - 1$ 和 $\sqrt{7} + 1$ ，連心線的長是 d ，則 d 可取的整數的個數有幾個？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. $\because (\sqrt{7} + 1) - (\sqrt{7} - 1) < d < (\sqrt{7} + 1) + (\sqrt{7} - 1)$
 $\Rightarrow 2 < d < 2\sqrt{7} \therefore d$ 為整數 $\therefore d = 3, 4, 5$ ，共 3 個

(C) 10. 若兩圓的半徑分別為 $R, r (R > r)$ ， d 為連心線的長，且 $R^2 + d^2 - r^2 = 2Rd$ ，則兩圓位置關係為何？

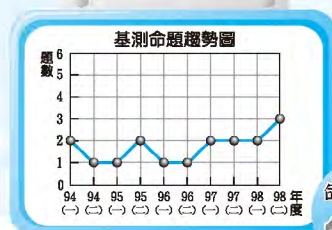
- (A) 外切 (B) 內切
(C) 內切或外切 (D) 外離或內離

10. $R^2 - 2Rd + d^2 - r^2 = 0, (R - d)^2 - r^2 = 0, (R - d + r)(R - d - r) = 0$
 $\therefore d = R + r$ (外切) 或 $d = R - r$ (內切)

解題小方 第 5 題：利用三角形相似性質求解。

第 9 題：題目所提相交的兩圓，故 $|r_1 - r_2| < \overline{O_1O_2} < (r_1 + r_2)$ 。

第 10 題：可將 $R^2 + d^2 - r^2 = 2Rd$ ，因式分解後，再根據兩圓位置關係求解。



命題率 100%

能力 — 數學證明與推理

一 證明與推理

數學(推理)方法大致有歸納法、相似法與演繹法三種，但所有數學的證明都必須是演繹法，因為歸納法與相似法僅用來推測事實，唯有透過假設及一連串的演繹後所得的結論方能稱為定理。

二 推理方法的說明

	已知條件	結論
1. 歸納法	<p>正三角形 等腰三角形 直角三角形 鈍角三角形 任意三角形</p>	歸納很多三角形發現內角和皆為 180° ，故可假設三角形內角和為 180°
2. 相似法	<p>三角形二邊中點連線段 \overline{DE} $\Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$</p>	<p>梯形二邊中點連線段 \overline{EF} $\Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{BC}$</p>
3. 演繹法	<p>由於 $\angle 1 + \angle ABC = 180^\circ$ 且 $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$， 故 $\angle 1 + \angle ABC = \angle A + \angle ABC + \angle C$ 得 $\angle 1 = \angle A + \angle C$</p>	定理：三角形任一兩內角之和為第三角之外角

※所有數學的證明都必須是演繹法

三 閱讀論證及證明

1. 舉出反例的論證

正例	反例
某人說，他從邊長 3、4、5 或 5、12、13 或 4、5、6 的三角形例子，發現一個定理：「三角形的兩邊乘積大於第三邊」	若取邊長皆為 $\frac{1}{2}$ 的正三角形，則兩邊乘積 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ (第三邊)

小叮嚀

很顯然正例使用歸納法破功了！因為當三角形的邊長小於 1 時，就無法成立。但歸納法也提供了演繹法一個新的方向不是嗎？

2. 正逆敘述的論證

正敘述	逆敘述
若 $x = y$ ，則 $xz = yz$	若 $xz = yz$ ，則 $x = y$

小叮嚀

若存在某敘述：「若 A 則 B ($A \rightarrow B$)」，其逆敘述就是：「若 B 則 A ($B \rightarrow A$)」。逆敘述成立的情況是：「 $A \rightarrow B$ 」先成立，否則通常都是倒果為因，不合常理。

老師 傳授

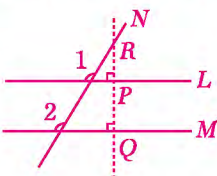
敘述的判別

學生 寫作

1. 已知「若 $a = 0$ ，則 $a^2 = 0$ 。」試問其逆敘述「 $a^2 = 0$ ，則 $a = 0$ 。」是否正確？
2. 「若兩多邊形各對應邊皆等長，則此兩多邊形全等。」以上敘述是否正確？
3. 對角線等長的四邊形是正方形。此敘述是否正確？
4. 兩平行線被一直線所截，則其同位角相等。此敘述是否正確？

解

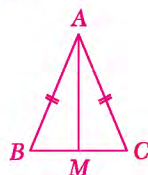
1. 若 $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$ ，因為 $a^2 \geq 0$ ，所以 $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ ，所以敘述正確
2. 菱形與正方形，四邊皆等長，但卻不全等，所以敘述錯誤
3. 對角線等長的四邊形不僅有正方形，尚有矩形及等腰梯形，所以敘述錯誤
4. 由圖可知，
 $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ ，
 $\angle R + \angle P = \angle R + \angle Q$
 $\Rightarrow \angle R + \angle P = \angle 1 = \angle R + \angle Q = \angle 2$ ，
 故 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以敘述正確



1. 若 $a : b = 3 : 4$ ，則 $(a + 1) : (b + 1) = 4 : 5$ 。以上敘述是否正確？
2. 若兩四邊形相似，則兩四邊形對應角相等。反之，兩四邊形對應角相等，則此兩四邊形相似。此逆敘述是否正確？
3. 若四邊形中，有一雙對邊平行，另一雙對邊相等，則此四邊形為平行四邊形。此敘述是否正確？
4. 若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 $\angle B = \angle C$ ，反之，若 $\angle B = \angle C$ ，則 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。此敘述是否正確？

解

1. 若 $a = 9, b = 12$ ，則 $(9 + 1) : (12 + 1) = 10 : 13 \neq 4 : 5$ ，所以敘述錯誤
2. 如圖，四邊對應角相等，但兩矩形卻不相似，所以敘述錯誤
3. 符合一雙對邊平行，另一雙對邊相等的圖形尚有等腰梯形，但等腰梯形非平行四邊形，所以敘述錯誤
4. 如圖，取 \overline{BC} 的中點 M ，連結 \overline{AM} ，則 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BM} = \overline{CM}$ ， $\overline{AM} = \overline{AM}$
 $\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACM$ (SSS)
 故 $\overline{AB} = \overline{AC} \iff \angle B = \angle C$
互逆
 所以敘述正確



解題小備方

善用已知的定理求證：

如：(1) 三角形內角和 180° 。(2) 三角形全等定理。(3) 平行四邊形的性質。

2 老師 傳授

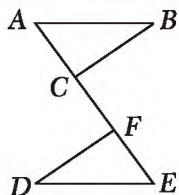
三角形的推理與證明

學生 習作 2

已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ，

$$\angle B = \angle D$$

求證： $\overline{AB} = \overline{DE}$



解

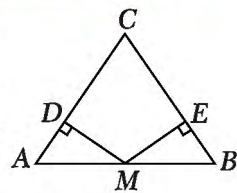
- (1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ， $\angle B = \angle D$
- (2) 且 $\angle A = \angle E$ (內錯角)
- (3) $\therefore \triangle ACB \cong \triangle EFD$ (AAS)
- (4) $\overline{AB} = \overline{DE}$ 得證

已知： $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，

M 為 \overline{AB} 之中點， $\overline{ME} \perp$

\overline{BC} 於 E ， $\overline{MD} \perp \overline{AC}$ 於

D 。



求證： $\overline{MD} = \overline{ME}$

解

- (1) 因為 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， $\overline{AM} = \overline{BM}$
- (2) 且 $\angle A = \angle B$ ， $\angle ADM = \angle BEM = 90^\circ$
- (3) 所以 $\triangle MAD \cong \triangle MBE$ (AAS)
- (4) $\overline{MD} = \overline{ME}$ 得證

解題小 備方 三角形五大全等性質：SSS、SAS、ASA、AAS、RHS。

3 老師 傳授

多邊形的推理與證明

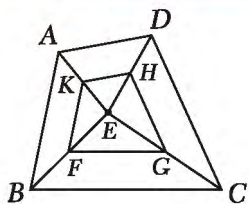
學生 習作 3

已知： E 點為四邊形 $ABCD$

內部一點，若 $\overline{FG} \parallel$

\overline{BC} ， $\overline{GH} \parallel \overline{CD}$ ， \overline{HK}

$\parallel \overline{AD}$ 。



求證： $\overline{FK} \parallel \overline{AB}$

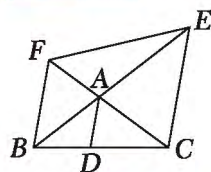
解

- (1) $\because \overline{FG} \parallel \overline{BC}$ $\therefore \overline{EF} : \overline{FB} = \overline{EG} : \overline{GC}$
- (2) $\because \overline{GH} \parallel \overline{CD}$ $\therefore \overline{EG} : \overline{GC} = \overline{EH} : \overline{HD}$
- (3) $\because \overline{HK} \parallel \overline{AD}$ $\therefore \overline{EH} : \overline{HD} = \overline{EK} : \overline{KA}$
- (4) 由(1)、(2)、(3)可知 $\overline{EF} : \overline{FB} = \overline{EK} : \overline{KA}$
- (5) 故 $\overline{FK} \parallel \overline{AB}$ 得證

已知：四邊形 $FBCE$ ，

$\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$

求證： $\frac{1}{\overline{CE}} + \frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{\overline{AD}}$



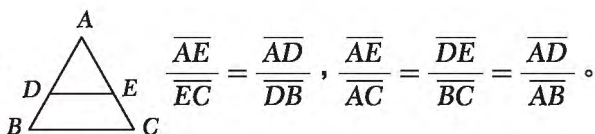
難題

解

- (1) $\triangle FBC$ 中， $\because \overline{AD} \parallel \overline{BF}$ $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$
- (2) $\triangle BCE$ 中， $\because \overline{AD} \parallel \overline{CE}$ $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$
- (3) 由(1)、(2)可知 $\frac{\overline{AD}}{\overline{BF}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DC} + \overline{BD}}{\overline{BC}} = 1$
- (4) 同除 $\overline{AD} \Rightarrow \frac{1}{\overline{CE}} + \frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{\overline{AD}}$ 得證

解題小 備方

三角形相似定理，當 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 時，



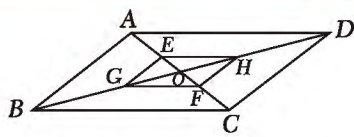
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}, \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}.$$

4 老師 傳授

綜合證明

學生 實作 4

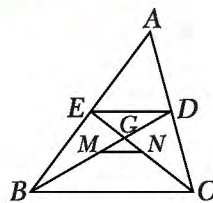
平行四邊形 $ABCD$ ，
 E 、 F 兩點三等分 \overline{AC} ， G 、 H 兩點三等分 \overline{BD} ，設平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 117，則平行四邊形 $EGFH$ 的面積為何？



解

- (1) $\because \overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ， $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$
 $\therefore \overline{EO} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{6}\overline{AC}$ ， $\overline{AO} = 3\overline{EO}$
- (2) $\because \triangle ABO \sim \triangle EGO$ ，且 $\overline{AO} = 3\overline{EO}$
 $\therefore \triangle ABO$ 面積 = 9 $\triangle EGO$ 面積，
 同理 $\triangle BCO$ 面積 = 9 $\triangle GFO$ 面積，
 $\triangle CDO$ 面積 = 9 $\triangle FHO$ 面積，
 $\triangle DAO$ 面積 = 9 $\triangle HEO$ 面積
- (3) $ABCD$ 面積 = 9 \times $EGFH$ 面積，
 $\therefore EGFH$ 面積 = $117 \div 9 = 13$ (平方單位)

$\triangle ABC$ 中， E 、 D 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點， M 、 N 分別為中線 \overline{BD} 、 \overline{CE} 的中點， \overline{BD} 與 \overline{CE} 交於 G 點， $\triangle GBC$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = 1 : 3 試求 $\triangle GMN$ 面積： $\triangle ABC$ 面積的比值為何？



解

- (1) 令 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{ED} = \frac{1}{2}a$
- (2) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{ED}) = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a$
- (3) $\because \triangle GMN \sim \triangle GBC$
 $\therefore \frac{\triangle GMN \text{ 面積}}{\triangle GBC \text{ 面積}} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{(\frac{1}{4}a)^2}{a^2} = \frac{1}{16}$
- (4) 得 $\frac{\triangle GMN \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{1}{48}$

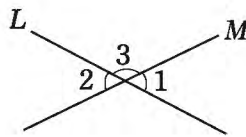
Let's Go! 同步 評量 1

(D) 1. 數學課本上說：「連接矩形四邊中點後可得一菱形。」但奇奇將四邊形 $ABCD$ 的四邊中點連接後，所得的四邊形不是菱形，所以奇奇認為四邊形 $ABCD$ 不是矩形。請問：奇奇運用哪一種推理方法？

- (A) 歸納法 (B) 演繹法 (C) 直覺法 (D) 反證法

1. 此方法是舉反例，故為反證法

(B) 2. 如右圖， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 由兩相交直線 L 、 M 形成一組對頂角，試證明 $\angle 1 = \angle 2$ ，則下列步驟何者有誤？



- (A) 因為 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$
 (B) 因為 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
 (C) 由上可知， $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3$
 (D) 同時消去 $\angle 3$ ，則 $\angle 1 = \angle 2$

2. $\angle 1 + \angle 2$ 不等於 180° ， $\angle 1 + \angle 3$ 才等於 180°

(C) 3. 有一敘述：「若四邊形是正方形，則其四個內角都是直角。」則下列何者是該敘述的逆敘述？並判斷題目的逆敘述是否正確？

- (A) 四個內角不是直角，則該四邊形是正方形。題目的逆敘述不正確
 (B) 四個內角是直角，則該四邊形不是正方形。題目的逆敘述正確
 (C) 四個內角都是直角的四邊形是正方形。題目的逆敘述不正確
 (D) 四個內角都是直角的四邊形是正方形。題目的逆敘述正確

3. 該題目的逆敘述：「四個內角都是直角的四邊形是正方形。」該題目的逆敘述不正確，因為尚有長方形也符合

(D) 4. 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的平分線， \overline{BE} 為 $\angle B$ 的平分線，則下列何者不一定能夠成立？

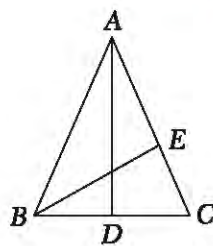
(A) $\overline{BD} = \overline{CD}$

(B) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

(C) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

(D) $\overline{AE} = \overline{EC}$

4. 除非 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ ，否則 $\overline{AE} = \overline{EC}$ 不一定成立。



(D) 5. 如右圖， $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 均為正三角形，請證明： $\overline{BD} = \overline{CE}$ ，則下列證明的步驟次序何者較為恰當？

① $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)

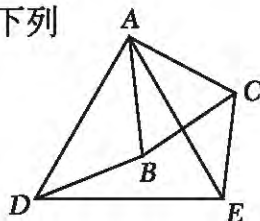
② $\overline{AD} = \overline{AE}$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$

③ $\angle DAE = \angle BAC = 60^\circ$

④ $\angle DAE - \angle BAE = \angle BAC - \angle BAE$

⑤ $\overline{BD} = \overline{CE}$

5. 以②③④①⑤較為恰當



(A) ④②③①⑤

(B) ④③②①⑤

(C) ②③①④⑤

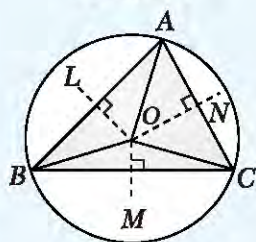
(D) ②③④①⑤

能力二 三角形的外心、內心、重心

一 三角形的外心、內心、重心的重要性質一覽表

	定義	位置	性質
外心	三邊垂直平分線的交點 (外接圓的圓心)	銳角：三角形內部(圖一) 直角：斜邊中點(圖二) 鈍角：三角形外部(圖三)	到三頂點等距離
內心	三內角平分線的交點 (內切圓的圓心)	恆在三角形內部	到三邊等距離
重心	三中線的交點	恆在三角形內部	比較靠近邊

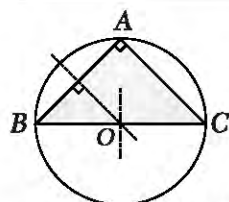
外心公式



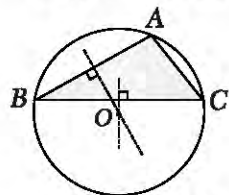
(銳角三角形)
(圖一)

- $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$ (外接圓半徑)
- 當 $\angle A \leq 90^\circ$ ， $\angle BOC = 2\angle A$
當 $\angle A > 90^\circ$ ， $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$
- 正三角形的邊長為 a ，則：
 - 外心到頂點的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$
 - 外心到邊的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

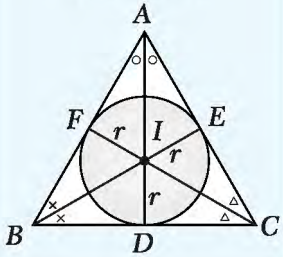
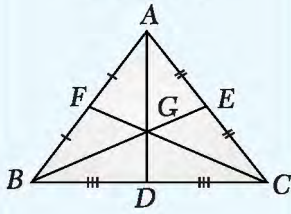
※正三角形的三心共點



(直角三角形)(圖二)



(鈍角三角形)(圖三)

<p>內心公式</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = r$ (內切圓半徑) $\triangle ABI$ 面積 : $\triangle BCI$ 面積 : $\triangle ACI$ 面積 = $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$ $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$ $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{2} r \times s$, 其中 $s = \triangle ABC$ 周長 直角三角形的內切圓半徑 = $\frac{1}{2}$(兩股和 - 斜邊)
<p>重心公式</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$, $\overline{DG} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ (另兩條中線其重心位置的比例亦同) $\triangle ABG$ 面積 = $\triangle BCG$ 面積 = $\triangle ACG$ 面積 = $\frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積 $\triangle AFG$ 面積 = $\triangle BFG$ 面積 = $\triangle AEG$ 面積 = $\triangle CEG$ 面積 = $\triangle BDG$ 面積 = $\triangle CDG$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積 直角三角形重心到外心的距離為斜邊的 $\frac{1}{6}$

5

老師

傳授

三角形的外心

學生

實作

5

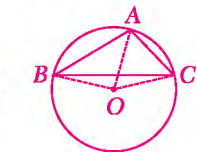
如圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 之外接圓，其半徑為 6 公分， $\angle ABC = 30^\circ$ ，請問：

- $\overline{AC} = ?$
- 若 $\angle ACB = 45^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 面積 = ?

解

難題

- 做 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} $\because \angle ABC = 30^\circ$,
 $\angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ$, 又 $\overline{OA} = \overline{OC}$
 $\therefore \triangle AOC$ 為正三角形, $\overline{AC} = \overline{OA} = 6$ (公分)
- $\angle BOA = 2\angle ACB = 90^\circ$
 $\triangle AOB$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times 6^2 = 18$
 $\angle BOC = \angle BOA + \angle AOC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
 $\triangle BOC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$
 $\triangle AOC$ 面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$
 $\triangle ABC$ 的面積
 = $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle AOC$ 面積 - $\triangle BOC$ 面積
 = $18 + 9\sqrt{3} - 9 = 9 + 9\sqrt{3}$ (平方公分)

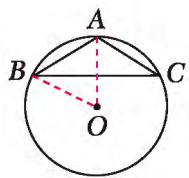


有一鈍角 $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, O 為其外心, 若 $\angle BOC = 120^\circ$, $\overline{AB} = 8$, 請問：

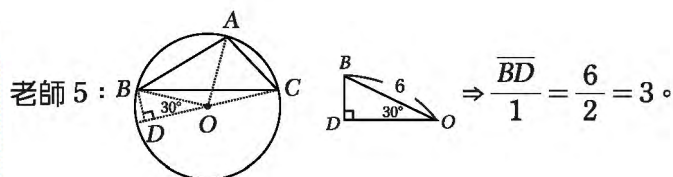
- $\angle A = ?$
- $\triangle ABC$ 之外接圓面積為何呢？

解

- $\because \triangle ABC$ 為鈍角三角形且 O 為其外心
 $\therefore \angle A = \frac{1}{2} (360^\circ - \angle BOC) \Rightarrow \angle A = 120^\circ$
- $\because \overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle A = 120^\circ$
 $\therefore \angle C = \frac{1}{2} (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$
 $\angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AOB$ 為正三角形, $\overline{AO} = \overline{AB} = 8$
 \Rightarrow 外接圓面積 = $\pi \times 8^2 = 64\pi$ (平方單位)



解題小偏方

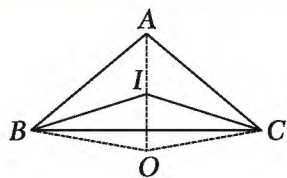


6 老師傳授

三角形的內心

學生寫作 6

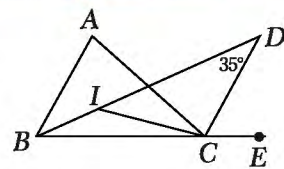
如圖， $\triangle ABC$ 的外心為 O ，內心為 I ，若 $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle AOB = 80^\circ$ ，則 $\angle BIC = ?$



解

$$\begin{aligned} \because \angle AOB = 80^\circ, \therefore \angle ACB &= 80^\circ \times \frac{1}{2} = 40^\circ \\ \angle A &= 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ \\ \angle BIC &= 90^\circ + \frac{110^\circ}{2} = \underline{145^\circ} \end{aligned}$$

如圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， \overline{CD} 為 $\angle ACE$ 之角平分線，若 $\angle D = 35^\circ$ ，則 $\angle A = ?$



解

$$\begin{aligned} \angle DCE &= 35^\circ + \angle IBC \\ \angle ACE &= 2\angle DCE = \angle A + \angle ABC \\ 35^\circ + \angle IBC &= \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) \\ \Rightarrow 35^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC &= \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC \\ \Rightarrow \angle A &= \underline{70^\circ} \end{aligned}$$

7 老師傳授

三角形的重心

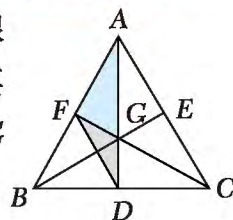
學生寫作 7

已知 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(1, 9)$ 、 $B(\frac{5}{2}, 0)$ 、 $C(-\frac{1}{2}, 0)$ ，則 $\triangle ABC$ 的重心坐標為何呢？

解

$$\begin{aligned} \overline{BC} \text{ 中點 } M \text{ 坐標} &\Rightarrow [\frac{5}{2} + (-\frac{1}{2})] \times \frac{1}{2} = 1 \\ \Rightarrow M &= (1, 0), \text{ 重心 } G \text{ 位於 } \overline{AM} \text{ 上,} \\ \overline{GM} &= \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{1}{3} \times 9 = 3, \text{ 重心坐標為 } \underline{(1, 3)} \end{aligned}$$

如圖，正 $\triangle ABC$ 的三條中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 交於 G 點，且其邊長為 12 cm ，請問： $\triangle AFG$ 及 $\triangle DFG$ 的面積為何呢？

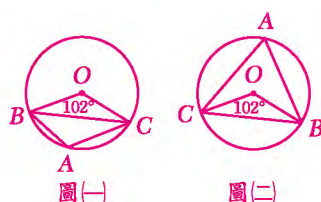


解

$$\begin{aligned} (1) \triangle AFG \text{ 面積} &= \frac{1}{6} \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = \underline{6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}} \\ (2) \frac{\triangle DFG \text{ 面積}}{\triangle AFG \text{ 面積}} &= \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}, \\ \triangle DFG \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = \underline{3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}} \end{aligned}$$

Let's Go! 同步評量 2

- (D) 1. 若 $\triangle ABC$ 的三個頂點坐標為 $A(2, 1)$ 、 $B(4, 1)$ 、 $C(4, 9)$ ，則此三角形之外心坐標為何呢？
 1. $\triangle ABC$ 為直角三角形，故外心為斜邊中點，由中點公式得 $(\frac{2+4}{2}, \frac{1+9}{2}) = (3, 5)$
 (A) (3, 1) (B) (4, 5) (C) (3, 4) (D) (3, 5)
- (C) 2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$ ，則此三角形的外心位於何處？
 (A) 在 $\triangle ABC$ 的內部 (B) 在 $\triangle ABC$ 的外部
 (C) 在 \overline{AB} 的中點 (D) 在 \overline{AC} 的 $\frac{1}{3}$ 處
 2. 令 $\angle A + \angle B + \angle C = 2r + 3r + 5r = 180^\circ$ ，
 $r = 18^\circ$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， $\angle B = 54^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，
 故 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其外心在斜邊 \overline{AB} 之中點
- (D) 3. 若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC = 102^\circ$ ，求 $\angle A = ?$
 (A) 51° (B) 129° (C) 49° 或 131° (D) 51° 或 129°
 3. 圖(一)， $\angle A = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC) = \frac{1}{2}(360^\circ - 102^\circ) = 129^\circ$
 圖(二)， $\angle A = \frac{1}{2} \times 102^\circ = 51^\circ$



(A) 4. 設 G 點為正 $\triangle ABC$ 的重心, $\overline{AB} = 20$, 請問: $\overline{AG} = ?$

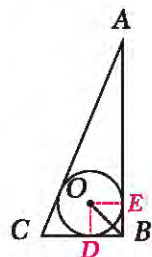
- (A) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{18\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

$$4. \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 \times \frac{2}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

(B) 5. 如右圖, $\triangle ABC$ 為直角三角形, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 5$, O 為 $\triangle ABC$ 之內切圓圓心, 試求 $\overline{OB}^2 = ?$

- (A) $\sqrt{8}$ (B) 8
(C) $2\sqrt{3}$ (D) 12

$$5. \overline{BE} = \overline{OE} = r = \frac{1}{2}(5 + 12 - 13) = 2, \\ \overline{OB}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$



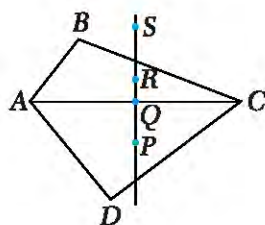
實力評量

生活應用題※, 本書特有題◎, 難題#

(A) 1. 如右圖, 四邊形 $ABCD$ 中, $\angle B > 90^\circ$, \overline{PS} 是 \overline{AC} 的中垂線, 則 P 、 Q 、 R 、 S 四點中, 哪一個點最有可能為 $\triangle ABC$ 的外心?

- (A) P (B) Q
(C) R (D) S

1. $\because \angle B > 90^\circ$
 $\therefore \triangle ABC$ 外心在 $\triangle ABC$ 的外部。
即 P 為 $\triangle ABC$ 的外心



※(C) 2. 史努比在美術課用一條線將一片厚度相同, 材料均勻的三角形紙板懸掛在空中, 他想要讓紙板和水平面平行, 他應該將懸掛點放在三角形的哪一部分呢?

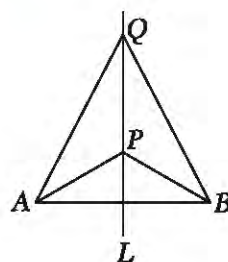
- (A) 三高的交點 (B) 三角平分線的交點
(C) 三中線的交點 (D) 三邊的中垂線交點

2. (A)垂心; (B)內心; (C)重心; (D)外心,
應取重心方能平衡

(B) 3. 有一證明題, 已知 L 為 \overline{AB} 之中垂線, P 、 Q 在 L 上, 求證 $\angle QAP = \angle QBP$, 則下面證明過程何者有誤?

- (A) 在 $\triangle QAP$ 與 $\triangle QBP$ 中, $\because \overline{QA} = \overline{QB}$
(B) 且 $\overline{PA} = \overline{PQ}$, $\overline{PQ} = \overline{PB}$
(C) $\therefore \triangle QAP \cong \triangle QBP$ (SSS)
(D) 故 $\angle QAP = \angle QBP$

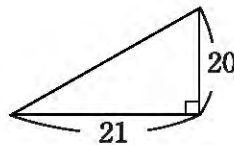
3. (B) 有誤, 應為 $\overline{PA} = \overline{PB}$, $\overline{PQ} = \overline{PQ}$ (共用邊)



(D) 4. 如右圖, 此直角三角形的內切圓半徑為何?

- (A) 3 (B) 4
(C) 5 (D) 6

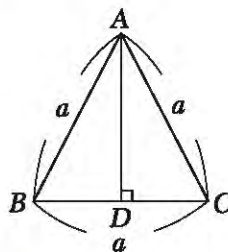
$$4. \text{斜邊} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29, \\ \text{內切圓半徑} = \frac{21 + 20 - 29}{2} = 6$$



(C) 5. 有一證明題, 已知 $\triangle ABC$ 為正三角形, 其邊長為 a , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。求證 \overline{BC} 邊上的高 $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 則下面證明過程何者有誤?

- (A) 在 $\triangle ABD$ 中, $\because \angle ADB = 90^\circ$ 、 $\angle B = 60^\circ$
(B) 且 $\angle BAD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
(C) $\overline{BD} : \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2 : \sqrt{3}$
(D) 故 $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

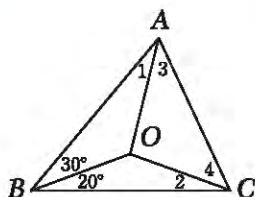
5. (C) 有誤, 應為 $\overline{BD} : \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$



(A) 6. 如右圖，已知 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，試求 $\angle 3 + \angle 4 = ?$

- (A) 80°
- (B) 100°
- (C) 120°
- (D) 140°

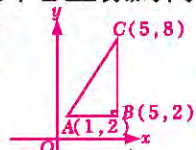
6. $\because O$ 為外心，
 $\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow \angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 20^\circ,$
 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - 2(30^\circ + 20^\circ) = 80^\circ$



(D) 7. 直角坐標平面上有三點 $A(1, 2)$ 、 $B(5, 2)$ 、 $C(5, 8)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的外心坐標為何？

- (A) $(-3, -5)$
- (B) $(-3, 5)$
- (C) $(3, -5)$
- (D) $(3, 5)$

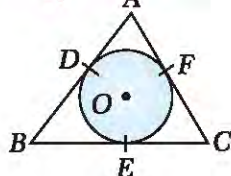
7. 由圖中可知， $\triangle ABC$ 為直角 \triangle ，故其外心必在斜邊中點上，外心 $(\frac{5+1}{2}, \frac{8+2}{2}) = (3, 5)$



(B) 8. 如右圖，已知圓 O 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，若 $\overline{AD} = 5$ 、 $\overline{BE} = 7$ 、 $\overline{CF} = 6$ ，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) 11
- (B) 12
- (C) 13
- (D) 14

8. $\overline{AD} = \overline{AF} = 5$ ， $\overline{BE} = \overline{BD} = 7$ ， $\overline{CF} = \overline{CE} = 6$ ，
 $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 5 + 7 = 12$



(C) 9. 若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle BOC = 116^\circ$ ，則 $\angle BAC = ?$

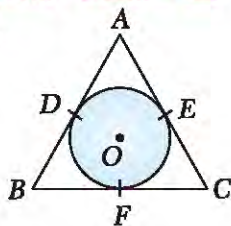
- (A) 58°
- (B) 132°
- (C) 58° 或 122°
- (D) 56° 或 122°

9. (1) 當 $\triangle ABC$ 為銳角 \triangle 時，
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 116^\circ = 58^\circ$
 (2) 當 $\triangle ABC$ 為鈍角 \triangle 時，
 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle BAC$ ， $\angle BAC = 122^\circ$

(D) 10. 如右圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 之內切圓，切點為 D 、 E 、 F ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$
- (B) $\overline{AD} = \overline{AE}$ ， $\overline{BD} = \overline{BF}$ ， $\overline{CE} = \overline{CF}$
- (C) $90^\circ < \angle BOC < 180^\circ$
- (D) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

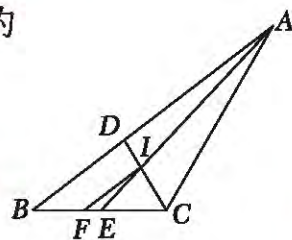
10. (D) 錯誤，只有在 $\triangle ABC$ 為正三角形時才會成立



(A) 11. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 20^\circ$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{IF} \parallel \overline{AB}$ ，則 $\angle EIF = ?$

- (A) 10°
- (B) 15°
- (C) 20°
- (D) 25°

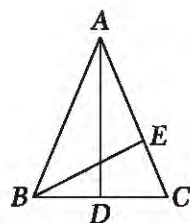
11. $\because \overline{IF} \parallel \overline{AB}$
 $\therefore \angle EIF = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 20^\circ = 10^\circ$



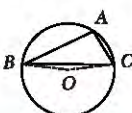
(D) 12. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ， \overline{BE} 平分 $\angle ABC$ ， D 、 E 分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 上，則下列敘述何者正確？

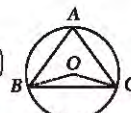
- (A) $\overline{AD} = \overline{BE}$
- (B) $\overline{AE} = \overline{CE}$
- (C) $\overline{BE} \perp \overline{AC}$
- (D) 外心在 \overline{AD} 上

12. $\because \triangle ABC$ 為等腰 \triangle ，且 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ，
 故 \overline{AD} 為 \overline{BC} 之中垂線， \therefore 外心在 \overline{AD} 上之一點

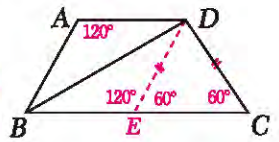


解題小幫手

第9題：(1)  當 $\angle A > 90^\circ$ 時，
 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$ 。

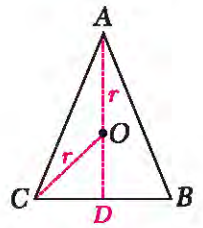
(2)  當 $\angle A \leq 90^\circ$ 時，
 $\angle BOC = 2\angle A$ 。

- (B) 13. 如右圖, \overline{BD} 平分 $\angle ABC$, $\overline{BC} > \overline{AB}$, $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\angle A = 120^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$, $\angle C$ 的度數為下列何者?
 (A) 70° (B) 60° (C) 50° (D) 40°



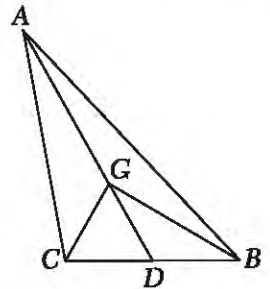
- (B) 14. 如右圖, O 為 $\triangle ABC$ 之外心, 已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$, $\overline{BC} = 10$, 則 $\overline{OA} = ?$
 (A) $\frac{25}{9}$ (B) $\frac{169}{24}$
 (C) $\frac{13}{12}$ (D) $\frac{144}{25}$

14. 過 O 點作 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$,
 $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $\overline{OA} = r$,
 $r^2 = (12 - r)^2 + 5^2$,
 $r^2 = 144 - 24r + r^2 + 25$, $r = \frac{169}{24}$



- # (D) 15. 如右圖, G 為 $\triangle ABC$ 的重心, D 為 \overline{BC} 的中點, $\overline{AG} = 16$, $\angle BGA = 150^\circ$, $\angle AGC = 120^\circ$, 則 $\triangle ABC$ 的面積為何?
 (A) $54\sqrt{3}$ (B) $63\sqrt{3}$
 (C) $84\sqrt{3}$ (D) $96\sqrt{3}$

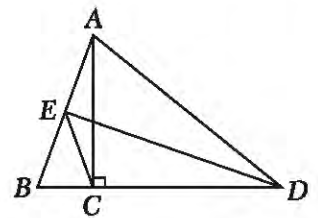
15. $\angle BGC = 360^\circ - (150^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$,
 $2\overline{GD} = \overline{AG}$, $\overline{GD} = 8 = \overline{CD} = \overline{BD}$
 $\therefore \triangle CGD$ 為正 \triangle , $\therefore \triangle CGD$ 面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ 面積 = $6 \times 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$



歷屆基測題

- (B) 1. 如右圖, $\triangle ABD$ 中, $\overline{DA} = \overline{DB}$, E 為的 \overline{AB} 中點, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, 且 \overline{AC} 交 \overline{BD} 於 C 點。若 $\angle B = 70^\circ$, 則 $\angle DEC = ?$
 (A) 40°
 (B) 50°
 (C) 60°
 (D) 70°

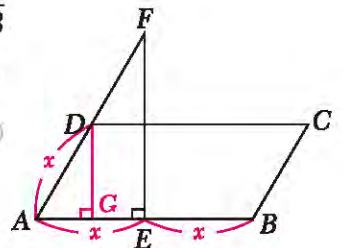
1. $\triangle ABC$ 中, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, E 為 \overline{AB} 的中點, $\therefore \overline{EB} = \overline{EC}$ (E 為外心)
 $\Rightarrow \angle B = \angle ECB = 70^\circ \Rightarrow \angle BEC = 40^\circ$
 $\triangle ABD$ 中, $\overline{DA} = \overline{DB}$, E 為 \overline{AB} 的中點, $\therefore \overline{DE}$ 為 \overline{AB} 的中垂線
 $\Rightarrow \angle DEB = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle DEC = \angle DEB - \angle BEC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



- (B) 2. 右圖為平行四邊形 $ABCD$ 與 $\triangle AEF$ 的重疊情形, 其中 E 是 \overline{AB} 的中點, D 在 \overline{AF} 上。若 $\overline{AB} = 2\overline{AD}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle AEF = 90^\circ$, 則平行四邊形 $ABCD$ 與 $\triangle AEF$ 的面積比為何?
 (A) $\sqrt{3} : 1$
 (B) $2 : 1$
 (C) $3 : 2$
 (D) $2\sqrt{3} : 3$

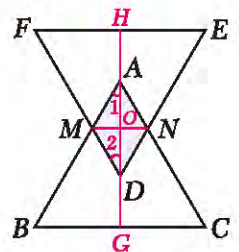
2. E 為 \overline{AB} 中點 \Rightarrow 設 $\overline{AE} = x = \overline{BE}$
 $\therefore \overline{AB} = 2\overline{AD} = 2x$, $\therefore \overline{AD} = x$, 在 \overline{AB} 上取一點 G , 使 $\overline{DG} \perp \overline{AB}$
 $\triangle ADG$ 中, $\therefore \angle A = 60^\circ$, $\overline{AD} = x$, $\therefore \overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$
 $\triangle AFE$ 中, $\therefore \angle A = 60^\circ$, $\overline{AE} = x$, $\therefore \overline{FE} = \sqrt{3}x$

平行四邊形 $ABCD$ 面積 : $\triangle AEF$ 面積 = $\overline{AB} \times \overline{DG} : \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{FE} = (2x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x) : (\frac{1}{2}x \times \sqrt{3}x) = 2 : 1$



- (C) 3. 如右圖, D 、 A 兩點分別是兩正三角形 ABC 、 DEF 的重心, 其中 \overline{AB} 與 \overline{DF} 相交於 M 點, \overline{AC} 與 \overline{DE} 相交於 N 點。若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的面積均為 18, 則四邊形 $AMDN$ 的面積為何?
 (A) 2
 (B) 3
 (C) 4
 (D) 6

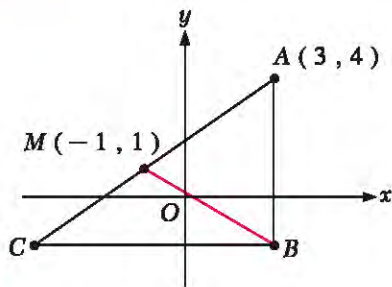
3. $\therefore A$ 、 D 為重心
 \therefore 直線 \overline{AD} 同時為 \overline{EF} 、 \overline{BC} 的中垂線 $\Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$
 又 $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ \Rightarrow$ 四邊形 $AMDN$ 為菱形 $\Rightarrow \overline{AD}$ 、 \overline{MN} 互相垂直平分於 O 點
 $\therefore \overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AG}$ $\therefore \triangle AMN$ 面積 = $\frac{1}{9}\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{9} \times 18 = 2$
 同理, $\triangle DMN$ 面積 = 2 \Rightarrow 所求 = 4, 故選(C)



解題小方

第 15 題: 正三角形面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

(B) 4. 如右圖，在座標平面上， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle B = 90^\circ$ ， \overline{AB} 垂直 x 軸， M 為 $\triangle ABC$ 的外心。若 A 點座標為 $(3, 4)$ ， M 點座標為 $(-1, 1)$ ，則 B 點座標為何？



(A) $(3, -1)$

(B) $(3, -2)$

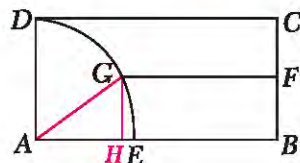
(C) $(3, -3)$

(D) $(3, -4)$

4. $\because M$ 為外心， $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ $\therefore M$ 為 \overline{AC} 的中點
 設 $C(x, y)$ ，則 $\begin{cases} \frac{x+3}{2} = -1 \\ \frac{y+4}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$ 故 $C(-5, -2)$
 $\therefore A(3, 4)$ ， $\overline{AB} : x = 3$ ， $C(-5, -2)$ ， $\overline{BC} : y = -2$ ， $\therefore B(3, -2)$

98 基測一

(D) 5. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中，以 A 為圓心， \overline{AD} 長為半徑畫弧，交 \overline{AB} 於 E 點。取 \overline{BC} 的中點為 F ，過 F 作一直線與 \overline{AB} 平行，且交 \widehat{DE} 於 G 點。求 $\angle AGF = ?$



(A) 110°

(B) 120°

(C) 135°

(D) 150°

5. 連 \overline{AG} ，作 $\overline{GH} \perp \overline{AB}$
 $\because AG = AD = 2BF$ ， $\overline{GH} = \overline{BF}$
 $\overline{AG} : \overline{GH} = 2BF : BF = 2 : 1$
 $\angle GAB = 30^\circ$ ，又 $\overline{GF} \parallel \overline{AB}$
 $\therefore \angle AGF = 180^\circ - \angle GAB = 150^\circ$

98 基測一

基測趨勢題

(D) 1. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ， O 為外心，則 $\angle BOA = ?$

(A) 120° (B) 130°

(C) 140° (D) 150°

1. $\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，又 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ，
 $\therefore \angle C = 180^\circ \times \frac{7}{2+3+7} = 105^\circ$ ，
 $\angle BOA = 360^\circ - 2\angle C = 360^\circ - 2 \times 105^\circ = 150^\circ$

(C) 2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 D 點在 \overline{AC} 上，且 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ ，則下列何者不一定成立？

(A) $\angle ABC = 90^\circ$

(B) D 點必為 $\triangle ABC$ 的外心

(C) $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形

(D) $\triangle ABC$ 的重心必在 \overline{BD} 上

2. $\because \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$
 $\therefore \triangle ABC$ 必為直角三角形，
 但不一定為等腰直角三角形

(D) 3. 如右圖，已知直線 L 垂直平分 \overline{BC} ，且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，則下列敘述何者錯誤？

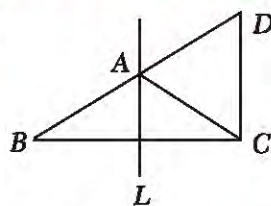
(A) $\angle ADC = \angle ACD$

(B) $\triangle DBC$ 為直角三角形

(C) A 為 $\triangle DBC$ 的外心

(D) $\triangle ACD$ 為正三角形

3. $\triangle ACD$ 為等腰三角形



(A) 4. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{CB} = 6$ ， $\overline{CA} = 8$ ， G 為重心，則 G 到斜邊 \overline{AB} 的距離為何？

(A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) 2

4. 設 G 到 \overline{AB} 相距為 x ，則 $\triangle AGB$ 面積 = $\frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積，
 $\frac{1}{2}x \times 10 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \therefore x = \frac{8}{5}$

(A) 5. 有一 $\triangle ABC$ 其邊長分別為 3、4、5，其外接圓與內切圓面積的比值為何呢？

(A) $\frac{25}{4}$ (B) $\frac{9}{4}$

(C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{25}{9}$

5. 外接圓面積 = $(\frac{5}{2})^2 \pi = \frac{25}{4} \pi$ ，內切圓面積 = $(\frac{3+4-5}{2})^2 \pi = \pi$
 $\frac{\text{外}}{\text{內}} = \frac{\frac{25}{4} \pi}{\pi} = \frac{25}{4}$

解題小幫手



第 5 題：外接圓面積 = πR^2 ；內切圓面積 = πr^2 。

(A) 6. 設 $\triangle ABC$ 的三中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 相交於 G ， $\overline{AD} = 12$ 公分， $\overline{BE} = 15$ 公分， $\overline{CF} = 21$ 公分，則 $\overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = ?$

- (A) 16
- (B) 17
- (C) 18
- (D) 19

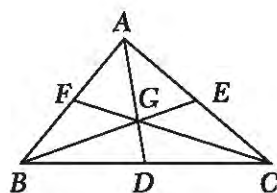
6. $\therefore G$ 為 $\triangle ABC$ 的三中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 的交點，

$\therefore G$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\overline{GD} = \frac{1}{3} \times \overline{AD} = \frac{1}{3} \times 12 = 4 \text{ (公分)},$$

$$\overline{GE} = \frac{1}{3} \times \overline{BE} = \frac{1}{3} \times 15 = 5 \text{ (公分)},$$

$$\overline{GF} = \frac{1}{3} \times \overline{CF} = \frac{1}{3} \times 21 = 7 \text{ (公分)}, \text{ 故 } \overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = 4 + 5 + 7 = 16 \text{ (公分)}$$



(B) 7. 如右圖， D 、 E 各為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBC$ 的內心，若 $\angle A = 40^\circ$ ，則 $\angle BDC + \angle BEC = ?$

- (A) 225°
- (B) 255°
- (C) 275°
- (D) 285°

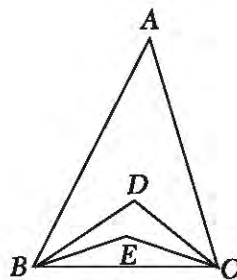
7. $\therefore D$ 為 $\triangle ABC$ 的內心，

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 40^\circ = 110^\circ,$$

又 E 為 $\triangle DBC$ 的內心，

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 110^\circ = 145^\circ,$$

$$\text{故 } \angle BDC + \angle BEC = 110^\circ + 145^\circ = 255^\circ$$



(D) 8. 如右圖， P 點為正 $\triangle ABC$ 內部的一點， P 點到 $\triangle ABC$ 三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的距離分別為 \overline{PD} 、 \overline{PE} 、 \overline{PF} ，且 \overline{AH} 為正 $\triangle ABC$ 的高，則其四者的關係為下列何者呢？

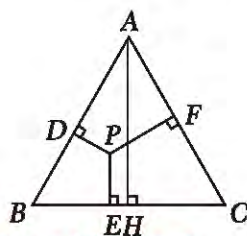
- (A) $\overline{PD} - \overline{PE} - \overline{PF} = \overline{AH}$
- (B) $\overline{PD} + \overline{PE} - \overline{PF} = \overline{AH}$
- (C) $\overline{PD} - \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AH}$
- (D) $\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AH}$

8. 作 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} ，設 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$ ，

$\therefore \triangle ABP$ 的面積 + $\triangle BCP$ 的面積 + $\triangle ACP$ 的面積 = $\triangle ABC$ 的面積，

$$\frac{1}{2} \times a \times \overline{PD} + \frac{1}{2} \times a \times \overline{PE} + \frac{1}{2} \times a \times \overline{PF} = \frac{1}{2} \times a \times \overline{AH},$$

$$\frac{1}{2} \times a \times (\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}) = \frac{1}{2} \times a \times \overline{AH}, \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AH}$$



(D) 9. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，已知 \overline{CP} 平分 $\angle C$ ， \overline{PQ} 平行 \overline{AC} ，求證： $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ ，則下列證明步驟何者有誤？

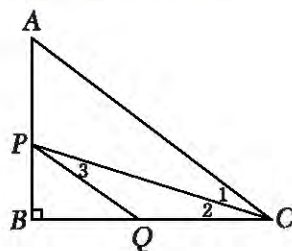
(A) $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (\overline{CP} 平分 $\angle C$)，且 $\angle 1 = \angle 3$ ($\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$)

(B) $\therefore \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{QC}$

(C) $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ 及 $\angle PAC = \angle QCA$

(D) \therefore 四邊形 $APQC$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{AP} = \overline{QC}$ ，故 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$

9. 四邊形 $APQC$ 為等腰梯形



(B) 10. 如右圖， $\overline{BD} = \overline{DC}$ ， $\overline{CF} = \overline{AF}$ ， $\overline{GE} \parallel \overline{FC}$ ， $\triangle ABC$ 面積為 18 平方單位，則四邊形 $GECF$ 面積為何？

- (A) 3
- (B) 5
- (C) 7
- (D) 9

10. $\therefore \overline{AD}$ 與 \overline{BF} 為兩中線， $\therefore G$ 為 $\triangle ABC$ 之重心，

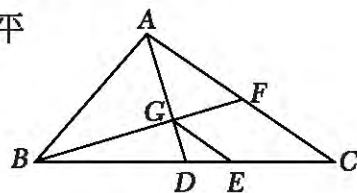
$$\triangle BGC \text{ 面積} = \triangle AGC \text{ 面積} = \frac{1}{3} \triangle ABC \text{ 面積}$$

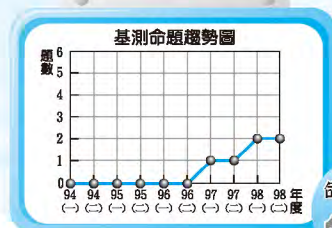
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \triangle GEC \text{ 面積} = \frac{1}{3} \triangle BGC \text{ 面積}$$

$$\text{四邊形 } GECF \text{ 面積} = \triangle GFC \text{ 面積} + \triangle GEC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \triangle AGC \text{ 面積} + \frac{1}{3} \triangle BGC \text{ 面積}$$

$$= \frac{1}{6} \triangle ABC \text{ 面積} + \frac{1}{9} \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{5}{18} \triangle ABC \text{ 面積}$$

$$= \frac{5}{18} \times 18 = 5 \text{ (平方單位)}$$





命題率
100%

能力 — 二次函數的圖形

一 二次函數的圖形

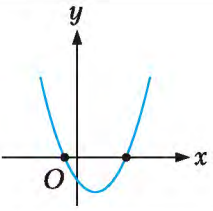
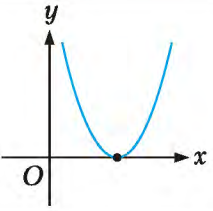
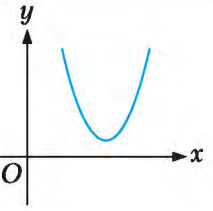
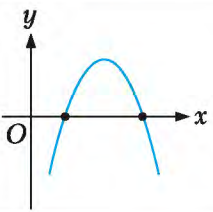
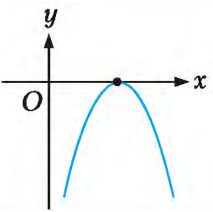
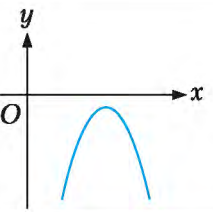
二次函數：型如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函數，稱為二次函數，其函數圖形為拋物線。

二 二次函數各種圖形變化之歸納

二次函數的一般式： $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)；標準式： $y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$)			
類型一： $y = ax^2$ ($b = c = 0$)，此時二次函數頂點在【原點】，對稱軸為【 y 軸】			
1. 當 $a > 0$ 時， 二次函數【開口向上】， 當 $ a $ 值愈大， 開口愈小。		2. 當 $a < 0$ 時， 二次函數【開口向下】， 當 $ a $ 值愈大， 開口愈小。	
類型二： $y = ax^2 + c$ ($b = 0$)，此時二次函數的頂點為 $(0, c)$ ，對稱軸為【 y 軸】			
1. 當 $c > 0$ 時， 二次函數頂點 向上 移動 $ c $ 個單位		2. 當 $c < 0$ 時， 二次函數頂點 向下 移動 $ c $ 個單位	
類型三：將 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，利用配方法化為 $y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$)			
<ul style="list-style-type: none"> ➢ 二次函數頂點坐標為 (p, q) ➢ 對稱軸為 $x - p = 0$ ➢ 圖形係將 $y = ax^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{在 } y \text{ 軸, 向上或下移動 } q \text{ 個單位} \\ \text{在 } x \text{ 軸, 向左或右移動 } p \text{ 個單位} \end{cases} \Rightarrow y = a(x - p)^2 + q$ 			
1. 當 $p > 0$ ， 二次函數頂點由 原點 向右 移動 $ p $ 個單位；		3. 當 $p < 0$ ， 二次函數頂點由 原點 向左 移動 $ p $ 個單位；	
2. 當 $q > 0$ ， 二次函數頂點由 原點 向上 移動 $ q $ 個單位		4. 當 $q < 0$ ， 二次函數頂點由 原點 向下 移動 $ q $ 個單位	

三 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸的交點

令 $y = 0$ ，則解方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其型式如下表所示：

判別式 D $D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
方程式解的性質	兩相異實根	重根	無(實數)解
拋物線與 x 軸交點	兩相異交點	一個交點(切點)	無交點
$a > 0$ 開口向上			
$a < 0$ 開口向下			

老師 傳授

二次函數的圖形

學生 實作

- 若二次函數圖形的頂點坐標為原點，且通過點 $(1, 5)$ ，試求此二次函數為何呢？
- 已知有三點坐標 $A(0, -5)$ 、 $B(1, -8)$ 、 $C(4, -5)$ 在某二次函數圖形上，試求此圖形之頂點坐標、及其與 x 、 y 軸的交點為何呢？

解

- 設此二次函數 $y = ax^2$ ， \because 通過點 $(1, 5)$
 $\Rightarrow 5 = a \times 1^2 \Rightarrow a = 5 \quad \therefore$ 二次函數為 $y = 5x^2$
- 設此二次函數為 $y = ax^2 + bx + c$
 將 $(0, -5)$ 、 $(1, -8)$ 、 $(4, -5)$ 代入

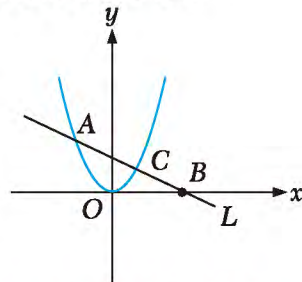
$$\begin{cases} -5 = c & \dots\dots\dots ① \\ -8 = a + b + c & \dots\dots ② \\ -5 = 16a + 4b + c & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 & \dots\dots ④ \\ 16a + 4b = 0 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -4, c = -5 \Rightarrow y = x^2 - 4x - 5$$

$$\Rightarrow y = (x^2 - 4x + 4) - 9 = (x - 2)^2 - 9$$
 \Rightarrow 頂點 $(2, -9)$
 與 x 軸交點坐標 \Rightarrow 令 $y = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) = 0$ ，
 $\Rightarrow x = 5$ 或 $-1 \Rightarrow (5, 0)$ 或 $(-1, 0)$
 與 y 軸交點坐標 \Rightarrow 令 $x = 0$
 $\Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5)$

- 若二次函數圖形通過 $(0, 3)$ 、 $(1, 4)$ ，且對稱於 y 軸，試求此二次函數為何呢？
- 如圖，二次函數與直線交於 $A(-2, 3)$ 、 C 兩點，且直線 L 交 x 軸於 $B(4, 0)$ ，請問： C 點坐標為何？



解

- 設二次函數 $y = ax^2 + b$ 將 $(0, 3)$ 、 $(1, 4)$ 代入

$$\begin{cases} 3 = a \times 0^2 + b \\ 4 = a \times 1^2 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 3$$
- 令 $y = ax^2$ ， $A(-2, 3)$ 代入得 $y = \frac{3}{4}x^2 \dots\dots ①$
 令 $y = mx + n$ ， $A(-2, 3)$ 、 $B(4, 0)$ 代入得

$$\begin{cases} 3 = -2m + n \\ 0 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \dots\dots ②$$

$$\Rightarrow ①、② \text{ 解聯立 } \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(x + 2) = 0, x = \frac{4}{3} \text{ 或 } -2 \text{ (不合)}$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x + 2, \text{ 得 } y = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow C \text{ 點 } (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

2 老師傳授

二次函數圖形的移動

學生實作

2

- 將二次函數 $y = x^2 + 3x$ 之圖形向右平移 2 個單位，請問：新圖形的二次函數為何呢？
- 將二次函數 $y = -2x^2 + 4x + 3$ 之圖形向左平移 3 個單位，再向下平移 2 個單位後，請問：新圖形的二次函數為何呢？

解

- $y = x^2 + 3x = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$
 \Rightarrow 頂點坐標 $(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ，
 圖形向右平移 2 單位
 \Rightarrow 頂點坐標 $(-\frac{3}{2} + 2, -\frac{9}{4}) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$
 新圖形二次函數 $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$
- $y = -2x^2 + 4x + 3 = -2(x - 1)^2 + 5$
 \Rightarrow 頂點坐標 $(1, 5)$ 圖形向左平方移 3 個單位，
 再向下平移 2 個單位 $\Rightarrow (-2, 3)$
 新圖形的二次函數為 $y = -2(x + 2)^2 + 3$

- 有一二次函數通過 $(2, -1)$ 、 $(1, 1)$ ，經過平移後與 $y = -2x^2$ 的圖形重合，請問：此二次函數為何呢？
- 將 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形，向左移 2 單位，再向上移 1 單位，得 $y = 2x^2 - 9x + 14$ ，請問： a 、 b 、 c 之值為何呢？

解

- 設二次函數 $y = -2x^2 + bx + c$
 \Rightarrow 通過 $(1, 1)$ 、 $(2, -1)$
 $\Rightarrow \begin{cases} 1 = -2 + b + c \\ -1 = -8 + 2b + c \\ b + c = 3 \\ 2b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow b = 4, c = -1$
 $\Rightarrow y = -2x^2 + 4x - 1$
- 平移後 a 值不變 $\Rightarrow a = 2$
 $y - 1 = 2(x + 2)^2 + b(x + 2) + c$
 $y - 1 = 2(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c$
 $\Rightarrow y = 2x^2 + (8 + b)x + 9 + 2b + c$
 $\begin{cases} 8 + b = -9 \\ 9 + 2b + c = 14 \end{cases} \Rightarrow b = -17, c = 39$
 $\Rightarrow a = 2, b = -17, c = 39$

Let's Go! 同步評量 1

1. $(2, 3)$ 在 $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 的圖形上(A) 1. 坐標平面上， $(2, 3)$ 這點會在下列哪一個二次函數的圖形上？

- (A)
- $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- (B)
- $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$
- (C)
- $y = (x + 2)^2 + 3$
- (D)
- $y = 2x^2 + 3$

(C) 2. 下列哪一個二次函數圖形會經過原點？

- (A)
- $y = -5x^2 + 12$
- (B)
- $y = x^2 - 3$
- (C)
- $y = 2x^2 + 3x$
- (D)
- $y = -2x^2 - 4x - 2$

2. 若一函數之函數圖形通過原點，則其常數項為 0，而在選項中，只有(C) $y = 2x^2 + 3x$ 的常數項為 0(C) 3. 二次函數 $y = -2x^2 + 3$ 圖形的頂點坐標為下列何者選項？

- (A)
- $(-2, 3)$
- (B)
- $(3, -2)$
- (C)
- $(0, 3)$
- (D)
- $(3, 0)$

3. $y = -2x^2 + 3$ 的頂點坐標為 $(0, 3)$ (A) 4. 二次函數 $y = x^2 - 1$ 的對稱軸方程式為下列何者選項？

- (A)
- $x = 0$
- (B)
- $y = -1$
- (C)
- $y = 0$
- (D)
- $x = -1$

4. $y = x^2 - 1$ 的圖形頂點為 $(0, -1)$ ，對稱軸為 y 軸，故對稱軸方程式為 $x = 0$

(A) 5. 下列哪一個函數圖形的開口最大？

- (A)
- $y = -\frac{1}{3}x^2$
- (B)
- $y = -\frac{3}{4}x^2$
-
- (C)
- $y = -\frac{1}{2}x^2$
- (D)
- $y = \frac{3}{2}x^2$

5. \therefore 在二次函數 $y = ax^2$ 中， $|a|$ 值愈小，開口愈大，

$$\text{又} \because \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}, \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}, \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

$$\left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}, \text{其中最小者為 } \frac{1}{3} \therefore y = -\frac{1}{3}x^2 \text{ 的開口最大}$$

(C) 6. 若將 $y = 2(x - 2)^2 - 3$ 的圖形，向左平移 m 單位，向下平移 n 單位，可得 $y = 2(x + 1)^2 - 5$ ，則 $m - n = ?$

- (A)
- -1
- (B)
- 0
- (C)
- 1
- (D)
- 2

6. $y = 2(x - 2 + m)^2 - 3 - n$ 與 $y = 2(x + 1)^2 - 5$ 為同一函數圖形
故 $\begin{cases} -2 + m = 1 \\ -3 - n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow m - n = 1$

能力二

二次函數的極值

一 配方法及公式法

$$(一般式) y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow (標準式) y = a(x - p)^2 + q$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow \text{令 } p = -\frac{b}{2a}, q = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow y = a(x - p)^2 + q$$

$$\Rightarrow \text{二次函數的頂點坐標 } (p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

二 二次函數極值的歸納表

$$一般式 y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 標準式 y = a(x - p)^2 + q$$

① 當 $a > 0$ ，在 $x = p$ 時， y 有**最小值** q
 $y = a(x - p)^2 + q \geq q$

② 當 $a < 0$ ，在 $x = p$ 時， y 有**最大值** q
 $y = a(x - p)^2 + q \leq q$

$$y = a(x - p)^2 + q \Rightarrow p = -\frac{b}{2a}, q = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow \text{頂點坐標 } (p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

① 當 $a > 0$ ，在 $x = \frac{-b}{2a}$ 時
 $\Rightarrow y$ 有**最小值** $\frac{4ac - b^2}{4a}$

② 當 $a < 0$ ，在 $x = \frac{-b}{2a}$ 時
 $\Rightarrow y$ 有**最大值** $\frac{4ac - b^2}{4a}$

3 老師傳授

二次函數的極值

3 學生寫作

- 二次函數 $y = -3x^2 + ax + b$ ，當 $x = 3$ 時有最大值 4，請問： a 、 b 為何呢？
- 二次函數 $y = 2x^2 - 12x + 15$ ，當 $2 \leq x \leq 5$ 時，試求 y 之最大值與最小值為何？

解

1. $\because x = 3$ 時有最大值 4，

$$y = -3(x - 3)^2 + 4 = -3x^2 + 18x - 23$$

比較係數得 $a = 18, b = -23$

2. $y = 2x^2 - 12x + 15$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 15$$

$$= 2(x - 3)^2 - 3$$

\Rightarrow 當 $x = 3$ ， y 有最小值 -3 \Rightarrow 又 $\because 2 \leq x \leq 5$

$$\text{當 } x = 2 \Rightarrow y = 2(2 - 3)^2 - 3 = -1$$

$$\text{當 } x = 5 \Rightarrow y = 2(5 - 3)^2 - 3 = 5$$

$\Rightarrow y$ 的**最大值**為 5，**最小值**為 -3

- 設 $2x + y = 100$ ，試求 $x^2 + y^2$ 的最小值為何呢？
- 設 $1 \leq x \leq 4$ ，且 $y = x^2 - 4x + 5$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，請問： $M + m = ?$

解

$$1. \because 2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (100 - 2x)^2$$

$$= 5x^2 - 400x + 10000$$

$$= 5(x - 40)^2 + 2000 \geq 2000$$

$\therefore x^2 + y^2$ 有**最小值** 2000

$$2. \because y = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow \text{最小值 } m = 1$$

$$\text{當 } x = 4 \text{ 時，最大值 } M = 4^2 - 4 \times 4 + 5 = 5$$

$$\Rightarrow \underline{M + m = 5 + 1 = 6}$$

4 老師傳授

二次函數極值的應用

學生寫作 4

花嶺旅行社的花東旅行團，預定人數為30人，每人收費6000元，但若增加1人，則每人減收100元，請問：應增加多少人，旅行社才能收到最多錢？最多可收多少錢？

生活題

解

設增加 x 人，全部的收入為 y 元

$$\begin{aligned} y &= (30+x)(6000-100x) \\ &= -100x^2 + 3000x + 180000 \\ &= -100(x^2 - 30x + 15^2) + 180000 + 22500 \\ &= -100(x-15)^2 + 202500 \leq 202500 \end{aligned}$$

當 $x=15$ 時，有最大值 202500

∴ 應增加 15 人，最多可收 202500 元

如果牛肉攤商將 1 公斤牛肉定價為 400 元，則每日可賣 600 公斤，若每公斤價錢下跌 x 元，則多賣 $2x$ 公斤，請問：每公斤牛肉的定價為多少時，才可收入最大的金額呢？

生活題

解

設牛肉每公斤下跌 x 元時，其收入為 y 元

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= (400-x)(600+2x) \\ &= -2x^2 + 200x + 240000 \\ &= -2(x^2 - 100x + 2500) + 245000 \\ &= -2(x-50)^2 + 245000 \leq 245000 \end{aligned}$$

∴ 當 $x=50$ ， y 有最大值 245000 元

⇒ 每公斤的牛肉定價 = $400 - 50 = 350$ (元)

Let's Go!

同步評量

2

(C) 1. 二次函數 $y = -2(x-1)^2 + 3$ ，下列選項何者正確？

- (A) 有最小值 3 (B) 有最小值 -3
(C) 有最大值 3 (D) 有最大值 -3

$$\begin{aligned} 1. y &= -2(x-1)^2 + 3 \quad \because -2(x-1)^2 \leq 0 \\ \therefore y &= -2(x-1)^2 + 3 \leq 3, y \text{ 有最大值 } 3 \end{aligned}$$

(D) 2. 二次函數 $y = (x+2)^2 - 3$ ，當 $x = a$ 時， y 有最小值，則 $a = ?$

- (A) 3 (B) -3 (C) 2 (D) -2

$$2. \because y = (x+2)^2 - 3 \geq -3 \quad \therefore \text{當 } x = -2 \text{ 時, } y \text{ 有最小值 } -3, \therefore a = -2$$

(C) 3. 設二次函數 $y = x^2 - 4x + k$ 的最小值為 5，則 $k = ?$

- (A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 25

$$\begin{aligned} 3. y &= x^2 - 4x + k = (x^2 - 4x + 4) - 4 + k \\ &= (x-2)^2 + (k-4) \geq k-4 \Rightarrow k-4 = 5 \quad \therefore k = 9 \end{aligned}$$

(B) 4. 二次函數 $y = -x^2 + x + 3$ 的最大值等於多少？

- (A) 3 (B) $\frac{13}{4}$
(C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{9}{4}$

$$4. y = -x^2 + x + 3 = -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} + 3 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{4} \leq \frac{13}{4},$$

y 的最大值為 $\frac{13}{4}$

(A) 5. 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 有最小值，則下列選項何者正確？

- (A) $a > 0$ (B) $a < 0$
(C) $a = 0$ (D) 無法確定 a 值的正負

$$5. \because y = ax^2 + bx + c \text{ 有最小值 } \therefore a > 0$$

(D) 6. 若 $-3 \leq x \leq 5$ ，且 $y = -x^2 + 6x + 1$ 的最大值 M ，最小值 m ，則 $M + m = ?$

- (A) 20 (B) -61
(C) 16 (D) -16

$$\begin{aligned} 6. y &= -(x^2 - 6x) + 1 = -(x-3)^2 + 10 \\ \text{當 } x &= 3 \text{ 時, 則 } M = 10; \\ \text{當 } x &= -3 \text{ 時, 則 } m = -26, M + m = -16 \end{aligned}$$

(D) 7. 數線上兩點 $A(3)$ 、 $B(7)$ ，在 \overline{AB} 上有一點 P ，使 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 的值最大，則 P 點坐標為何？

- (A) -4 (B) 4
(C) -5 (D) 5

$$\begin{aligned} 7. \text{ 設 } P \text{ 點坐標為 } x \\ \overline{PA} \times \overline{PB} &= (x-3)(7-x) = -x^2 + 10x - 21 \\ &= -(x^2 - 10x + 5^2) - 21 + 25 \\ &= -(x-5)^2 + 4 \\ \therefore P \text{ 點坐標為 } 5 \end{aligned}$$

實力評量

生活應用題※，本書特有題◎，難題#

基本觀念題

- (C) 1. 假設 $y = -x^2 + 4x + 1$ ，請問：其最大值為何呢？
 (A) 無最大值 (B) 7 (C) 5 (D) 3

1. $y = -(x-2)^2 + 5$ ，當 $x=2$ 時， y 有最大值 5

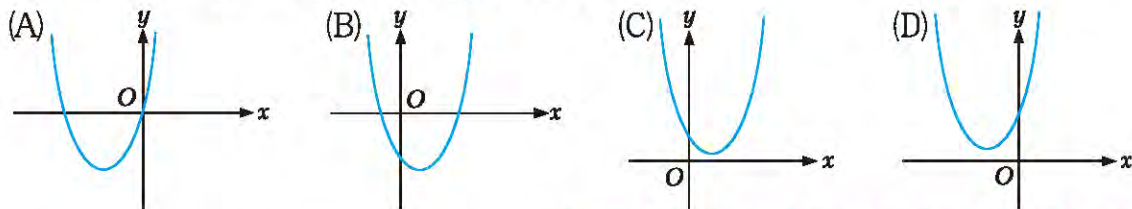
- (B) 2. 二次函數 $y = -x^2 - x + 2$ 的頂點在第幾象限？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四

2. $y = -x^2 - x + 2 = -(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 2 + \frac{1}{4} = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$
 \therefore 頂點 $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ 在第二象限

- (C) 3. $y = x^2 - 5x + 6$ 的圖形不經過第幾象限？
 (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

3. $y = x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 5x + \frac{25}{4}) + 6 - \frac{25}{4} = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$
 \therefore 頂點 $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$ ，開口向上，圖形不經過第三象限

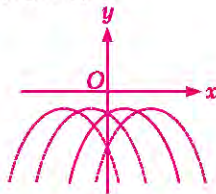
- (D) 4. 二次函數 $y = (x+1)^2 + 2$ 的圖形為下列何者？

4. $y = (x+1)^2 + 2$ 圖形的頂點坐標為 $(-1, 2)$ ，且開口向上

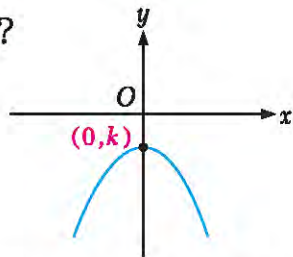
- (D) 5. 設二次函數在 $x=1$ 時有最小值 2，當 $x=0$ 時， $y=3$ ，請問：此二次函數為何呢？
 (A) $y = -x^2 + 2x + 3$ (B) $y = -x^2 - 2x + 3$
 (C) $y = x^2 + 2x + 3$ (D) $y = x^2 - 2x + 3$

5. $y = a(x-1)^2 + 2$ ($a > 0$)，將 $x=0, y=3$
 代入 $\Rightarrow a(-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$
 $\Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

- (B) 6. 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形完全在 x 軸的下方，則下列何者一定正確？
 (A) $a < 0, b^2 - 4ac < 0, c > 0$
 (B) $a < 0, b^2 - 4ac < 0, c < 0$
 (C) $a > 0, b^2 - 4ac > 0, c < 0$
 (D) $a < 0, b^2 - 4ac < 0$ ，無法判斷 c 的正負

6. $\because y = ax^2 + bx + c$ 的圖形在 x 軸下方，
 \therefore 圖形如圖所示，
 可知 $a < 0, c < 0, b^2 - 4ac < 0$ ，
 但無法確定 b 的正負

- (C) 7. 如右圖，函數 $y = ax^2 + k$ 之圖形，則 (a, k) 屬於第幾象限的點？
 (A) 一
 (B) 二
 (C) 三
 (D) 四

7. $y = ax^2 + k$ 頂點坐標為 $(0, k)$ 在 y 軸下方，故 $k < 0$ ，
 而圖形開口向下，故 $a < 0$ ， $\therefore (a, k)$ 在第三象限

- (D) 8. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形交 x 軸於 $A(5, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，交 y 軸於 $C(0, 5)$ ，則其頂點在坐標平面上第幾象限？
 (A) 一 (B) 二
 (C) 三 (D) 四

8. 設 $y = a(x-5)(x-1)$ ，以 $(0, 5)$ 代入得： $5 = a(-5)(-1)$ ， $\therefore a = 1$ ，
 故 $y = (x-5)(x-1) = x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$
 圖形的頂點坐標為 $(3, -4)$ ，在第四象限內

解題小幫手 第 6 題： $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形完全在 x 軸下方，則開口一定朝下，頂點的 y 坐標必為負，且一定沒有與 x 軸有交點。

(B) 9. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形與 x 軸之交點為 $(6, 0)$ 與 $(-2, 0)$ 且與 y 軸交於正向上，則下列選項何者正確？

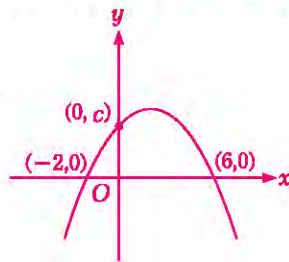
(A) $a > 0$

(B) $a < 0$

(C) $c < 0$

(D) 無法判定 a 、 c 的正負

9. 依題意二次函數的概略圖形如圖所示， \therefore 圖形開口向下
 $\therefore a < 0$ ，又圖形與 y 軸交於正向 $\therefore c > 0$



(C) 10. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(-1, 1)$ 、 $(4, 1)$ 、 $(m, 4)$ 、 $(n, 4)$ ，則 $m + n = ?$

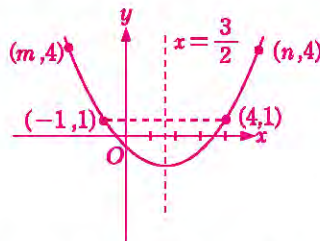
(A) -1

(B) 2

(C) 3

(D) 5

10. $y = ax^2 + bx + c$ 的大略圖形如圖所示，
 對稱軸為 $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{m+n}{2} = \frac{3}{2}$
 $\therefore m+n=3$



(B) 11. 若二次函數圖形 $y = -2x^2 + ax + 3$ 的對稱軸是直線 $x = -3$ ，則此圖形的頂點坐標為何？

(A) $(3, 21)$

(B) $(-3, 21)$

(C) $(-12, -21)$

(D) $(12, -21)$

$$11. y = -2x^2 + ax + 3 = -2(x^2 - \frac{a}{2}x) + 3$$

$$= -2(x - \frac{a}{4})^2 + \frac{24 + a^2}{8}$$

$\frac{a}{4} = -3, a = -12$ ，則 $y = -2(x+3)^2 + 21$
 \Rightarrow 頂點坐標 $(-3, 21)$

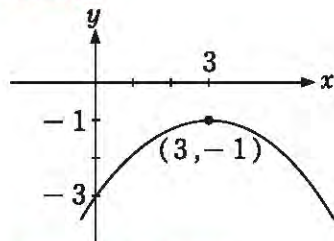
(A) 12. 如右圖，二次函數的頂點坐標為 $(3, -1)$ ，則此二次函數為下列何者？

(A) $y = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 1$

(B) $y = \frac{2}{9}(x-3)^2 - 1$

(C) $y = -\frac{2}{9}(x+3)^2 - 1$

(D) $y = \frac{2}{9}(x+3)^2 - 1$



12. $y = a(x-3)^2 - 1$ ，將 $(0, -3)$ 代入左式
 $-3 = a \times 9 - 1, a = -\frac{2}{9}, y = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 1$

(C) 13. 二次函數 $y = -4x^2 + 4x - 3$ 的圖形與 x 軸的交點狀況，下列何者正確？

(A) 有兩個交點

(B) 有一個交點

(C) 沒有交點

(D) 無法判斷

13. $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -32 < 0$ (沒有交點)

(D) 14. 若二次函數 $y = 3x^2 - 5x + 1$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點，則 $\overline{AB} = ?$

(A) $\frac{\sqrt{13}}{6}$

(B) $\frac{\sqrt{13}}{5}$

(C) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

14. 令 $y = 0, 3x^2 - 5x + 1 = 0$ ，
 $\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}, \overline{AB} = \left| \frac{5 + \sqrt{13}}{6} - \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

(D) 15. 若下列四個點均在 $y = 3(x - \frac{3}{4})^2 + 12$ 的圖形上，則哪一點的位置最低？

(A) $(-2, a)$

(B) $(-1, b)$

(C) $(0, c)$

(D) $(1, d)$

15. $y = 3(x - \frac{3}{4})^2 + 12$ 的最低點為 $(\frac{3}{4}, 12)$

愈靠近該點者 (即 x 坐標愈接近 $\frac{3}{4}$ 者)，其位置愈低

歷屆 基測題

(A) 1. 用配方法將 $y = -2x^2 + 12x + 1$ 化成 $y = -2(x+h)^2 + k$ 的型式，求 $h+k = ?$

(A) 16 (B) 21

(C) -20 (D) -14

1. $y = -2x^2 + 12x + 1 = -2(x^2 - 6x + 9) + 1 + 18 = -2(x-3)^2 + 19$
 $h = -3, k = 19 \therefore h+k = 16$

98 基測二

(D) 2. 在座標平面上，方程式 $y = 2x^2 - 9$ 的圖形交 x 軸於 $A、A'$ 兩點；方程式 $y = 2(x - \frac{2}{13})^2 - 8$ 的圖形交 x 軸於 $B、B'$ 兩點；方程式 $y = -2(x + \frac{3}{17})^2 + 5$ 的圖形交 x 軸於 $C、C'$ 兩點。比較 $\overline{AA'}、\overline{BB'}、\overline{CC'}$ 的長度，下列關係何者正確？

(A) $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ (B) $\overline{AA'} = \overline{BB'} > \overline{CC'}$

(C) $\overline{AA'} < \overline{BB'} < \overline{CC'}$ (D) $\overline{AA'} > \overline{BB'} > \overline{CC'}$

2. 三個方程式的 x^2 項係數的絕對值相等且三個方程式圖形的頂點與 x 軸的距離分別為 9、8、5

$\therefore 9 > 8 > 5, \therefore \overline{AA'} > \overline{BB'} > \overline{CC'}$

98 基測二

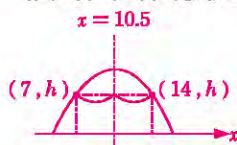
※(B) 3. 向上發射一枚砲彈，經 x 秒後的高度為 y 公尺，且時間與高度的關係為 $y = ax^2 + bx$ 。若此砲彈在第 7 秒與第 14 秒時的高度相等，則在下列哪一個時間的高度是最高的？

(A) 第 8 秒 (B) 第 10 秒

(C) 第 12 秒 (D) 第 15 秒

3. 二次函數圖形有對稱性質

$x = \frac{7+14}{2} = 10.5$



98 基測一

(D) 4. 下列哪一個函數，其圖形與 x 軸有兩個交點？

(A) $y = 17(x + 83)^2 + 2274$

(B) $y = 17(x - 83)^2 + 2274$

(C) $y = -17(x - 83)^2 - 2274$

(D) $y = -17(x + 83)^2 + 2274$

4. (A) 錯誤：開口向上，頂點 $(-83, 2274)$ ，與 x 軸無交點
 (B) 錯誤：開口向上，頂點 $(83, 2274)$ ，與 x 軸無交點
 (C) 錯誤：開口向下，頂點 $(83, -2274)$ ，與 x 軸無交點
 (D) 正確：開口向下，頂點 $(-83, 2274)$ ，與 x 軸交於兩點

98 基測一

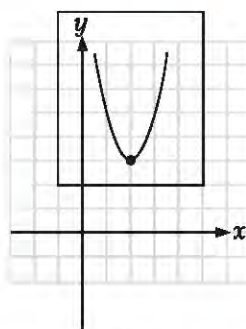
(A) 5. 小梅將一張畫有拋物線的透明片擺到坐標平面上，將拋物線頂點與點 $(2, 3)$ 重合，開口向上時，此拋物線為二次函數 $y = 2(x - 2)^2 + 3$ 的圖形，如圖(一)。若她將透明片反轉，使得開口向下且頂點的位置不變，如圖(二)，則圖(二)的拋物線為下列哪一個二次函數的圖形？

(A) $y = -2(x - 2)^2 + 3$

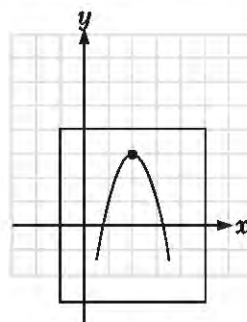
(B) $y = -2(x - 2)^2 - 3$

(C) $y = -2(x + 2)^2 + 3$

(D) $y = -2(x + 2)^2 - 3$



圖(一)



圖(二)

5. 開口向上 x^2 項係數為正，開口向下 x^2 項係數為負。
 此題的頂點不變，故圖(二)的二次函數為 $y = -2(x - 2)^2 + 3$

97 基測二

基測 趨勢題

(C) 1. 下列有關二次函數 $y = -9(x - \frac{2}{3})^2 + 45$ 的敘述何者正確？

(A) 此函數圖形的開口向上 (B) 當 $x = -\frac{2}{3}$ 時，有最小值 45

(C) 當 $x = \frac{2}{3}$ 時，有最大值 45 (D) 當 $x = 6$ 時，有最大值 45

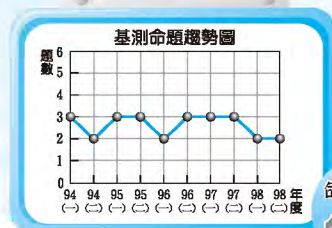
1. $y = -9(x - \frac{2}{3})^2 + 45$ $\therefore x^2$ 項係數為 -9，
 故圖形開口向下，且當 $x = \frac{2}{3}$ 時有最大值 45

(D) 2. 設二次函數 $y = -x^2 + 2bx + a$ 圖形的最高點坐標為 $(2, 5)$ ，請問： $a + b = ?$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. $y = -(x-b)^2 + a + b^2$ ，最高點 $(b, a + b^2) = (2, 5)$
 $b = 2, a = 1 \Rightarrow a + b = 3$

- (C) 3. 有關於二次函數 $y=f(x)=x^2-10x+24$ 的圖形，下列敘述何者正確呢？
- (A) 圖形全部落在第一象限中
 (B) 圖形有極小值出現在第二象限中
 (C) 圖形不經過第三象限
 (D) 圖形不經過第四象限
3. $y=f(x)=x^2-10x+24=(x-5)^2-1$
 當 $x=5$ 時，有極小值 -1 \therefore 極小值出現在第四象限，
 令 $y=0 \Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow x=4$ 或 6
 \Rightarrow 與 x 軸交於 $(4,0)$ ， $(6,0)$
 令 $x=0 \Rightarrow y=24$
 \Rightarrow 與 y 軸交於 $(0,24) \Rightarrow$ 圖形不經過第三象限
- (B) 4. 有關於函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ， $ac \neq 0$ 之圖形的敘述，下列何者錯誤呢？
- (A) 爲一拋物線
 (B) 與 x 軸至少有一個交點
 (C) 當 $b^2=4ac$ 時，與 x 軸僅有一個交點
 (D) 當 $b=0$ 時，與 x 軸的交點不可能只有一個
4. 當 $b^2-4ac < 0$ 時，圖形與 x 軸無交點
- (C) 5. 二次函數 $y=x(36-x)$ 的最大值爲何？
- (A) 36 (B) 320 (C) 324 (D) 234
5. $y=-x^2+36x=-(x^2-36x+18^2)+324$
 $=-(x-18)^2+324 \leq 324$ \therefore 最大值爲 324
- (D) 6. $y=(x-h)^2$ 之圖形與下列哪一個函數之圖形對稱於 x 軸？
- (A) $y=(x+h)^2$ (B) $y=x^2+h$
 (C) $y=x^2-h$ (D) $y=-(x-h)^2$
6. $y=(x-h)^2$ ，頂點 $(h,0)$ ，開口向上，
 則與其對稱於 x 軸之圖形頂點亦爲 $(h,0)$ 而開口向下，
 即爲 $y=-(x-h)^2$
- (B) 7. 在坐標平面上，若二次函數 $y=-3x^2+6x$ 的頂點 A 到原點 O 的距離爲 d ，則下列選項何者正確？
- (A) $2 < d < 3$ (B) $3 < d < 4$ (C) $4 < d < 5$ (D) $5 < d < 6$
7. $y=-3x^2+6x=-3(x^2-2x+1)+3=-3(x-1)^2+3$ ，頂點 $A(1,3)$
 $\therefore d=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ ，故 $3 < d < 4$
- (C) 8. 在坐標平面上兩點 $A(1,0)$ 、 $B(3,2)$ ，在 x 軸上取一點 C ，使得 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 的值最小，求 C 點坐標爲何？
- (A) $(0,-2)$ (B) $(-2,0)$
 (C) $(2,0)$ (D) $(0,2)$
8. 設 $C(x,0)$ ，
 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (x-1)^2 + (x-3)^2 + 2^2 = 2x^2 - 8x + 14$
 $= 2(x-2)^2 + 6$ ，
 $x=2$ 時有最小值
- ※(A) 9. 俊影老師要利用 100 公尺長的繩子圍出一個矩形的花園，其邊長各爲多少公尺才能使得圍成的面積最大呢？
- (A) 25、25 公尺 (B) 20、30 公尺
 (C) 22、28 公尺 (D) 18、32 公尺
9. 設長爲 x ，寬爲 $(50-x)$ 時，面積 $=x(50-x)$ 爲最大
 面積 $=-x^2+50x=-(x^2-50x+25^2)+625=-(x-25)^2+625$
 當 $x=25$ 時，有面積最大值 625
- ※(C) 10. 蘋果園裡種了 30 棵蘋果樹，平均每棵年產 400 個蘋果，若在此果園中每加種一棵蘋果樹，平均每棵年產量減少 10 個，則應種多少棵蘋果樹才能使年產量最多？
- (A) 5 (B) 15
 (C) 35 (D) 45
10. 設加種 x 棵，產量爲 y 個，
 $y=(30+x)(400-10x)=12000+100x-10x^2$
 $=-10(x^2-10x+25)+12000+250=-10(x-5)^2+12250 \leq 12250$
 $x=5$ 時產量最大，故應種 $30+5=35$ (棵)
- (D) 11. 若二次函數 $y=ax^2-12x+b$ ，在 $x=\frac{-3}{2}$ ，有最大值 10，則數對 (a,b) 爲何呢？
- (A) $(2,-3)$ (B) $(-3,2)$
 (C) $(1,-4)$ (D) $(-4,1)$
11. $y=ax^2-12x+b=a(x+\frac{3}{2})^2+10=ax^2+3ax+(\frac{9}{4}a+10)$
 $\Rightarrow \begin{cases} 3a=-12 \\ \frac{9}{4}a+10=b \end{cases} \Rightarrow a=-4, b=1$



命題率 100%

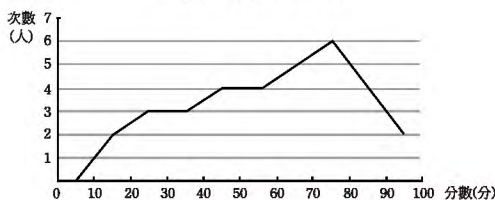
能力一 統計圖表的判讀

一 統計圖表的種類大致上有下列幾種：折線圖、直方圖、長條圖、圓形圖等。

1. 折線圖與直方圖：常用於分組的連續資料上，方便瞭解各組資料的分散情形及趨勢。

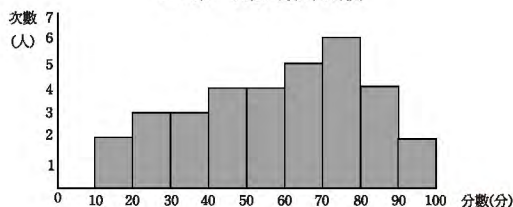
連續資料

218 第一次段考數學成績



折線圖

218 第一次段考數學成績

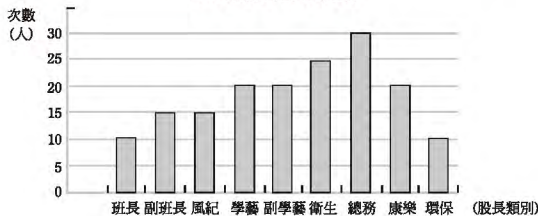


直方圖

2. 長條圖與圓形圖：常用於類別的間斷資料上，方便瞭解或比較各類別間的大小或各類量總量的百分率；因此，資料性質不同，所用圖表亦不相同。

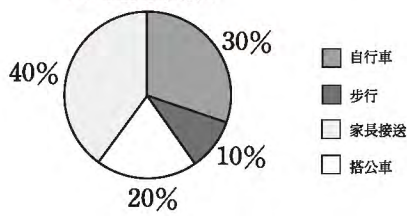
間斷資料

218 班級幹部得票數



長條圖

218 學生上學方式



圓形圖

二 連續資料的分組製表

1. 設組距時，避免資料重複，必須特別註明組距的邊界點。

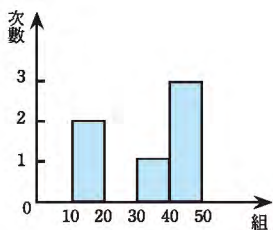
例 1：20~30 ($20 \leq a < 30$)，表示在 20 與 30 之間 (包含 20，不含 30)。

2. 相對次數：即該筆資料次數相對於總資料次數所占的比例。

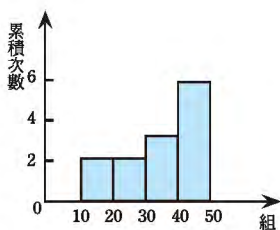
3. 累積次數：即該筆資料的次數為上一筆資料次數的累加。

4. 相對累積次數：即該筆資料累積次數相對於總資料次數所占的比例。

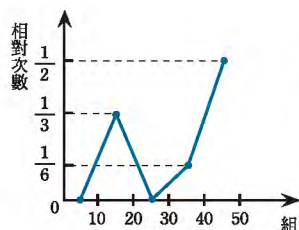
資料值 (a)	$0 \leq a < 10$	$10 \leq a < 20$	$20 \leq a < 30$	$30 \leq a < 40$	$40 \leq a < 50$
次數	0	2	0	1	3
相對次數	0	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
累積次數	0	2	2	3	6
相對累積次數	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{6}$



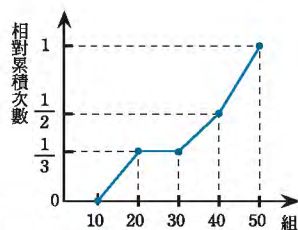
▲次數直方圖



▲累積次數直方圖



▲相對次數折線圖



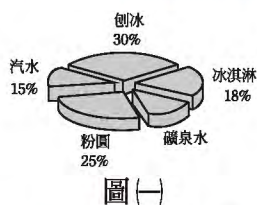
▲相對累積次數折線圖

老師傳授

統計圖表的判讀

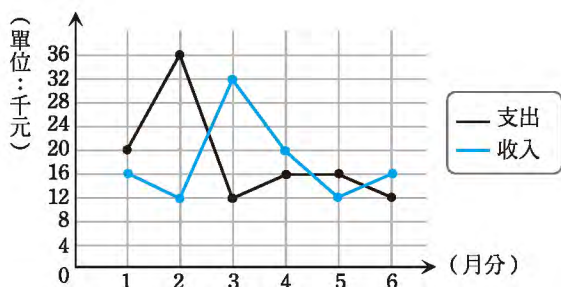
學生寫作

1. 奇鼎國中園遊會時，3年5班賣冰品及冷飲，結束後他們把各項收入繪製成圓形百分圖，如圖(一)，如果刨冰收入 1050 元，請問：總收入多少元？礦泉水收入多少元呢？



圖(一)

2. 圖(二)是陳先生 97 年上半年每月收入及支出折線圖，請問：(1) 陳先生平均每月收入多少元？(2) 陳先生 97 年上半年結餘或透支多少元？



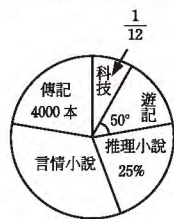
圖(二)

解

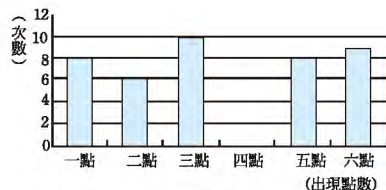
1. (1) 總收入 = $1050 \div 30\% = 3500$ (元)
- (2) $3500 \times (1 - 30\% - 15\% - 25\% - 18\%) = 3500 \times 12\% = 420$ (元)
2. (1) $(16 + 12 + 32 + 20 + 12 + 16) \div 6 = 18$, $18 \times 1000 = 18000$ (元)
- (2) $20 + 36 + 12 + 16 + 16 + 12 = 112$, $112 - 108 = 4$, $4 \times 1000 = 4000$ (元)，透支 4000 元

1. 圖(一)是奇鼎國中圖書館 2008 年書籍借出情形的圓形百分圖，如果 2008 年共借出 18000 本，請問：(1) 傳記這一項所占的圓心角為多少度？(2) 借出最多的項目與最少的項目相差多少本？

2. 哲南在賭場將一顆公正骰子連續投擲 50 次，並將結果記錄如圖(二)，但是兒子小麥把四點的那一條線擦掉了，請問：(1) 四點出現幾次呢？(2) 二點出現的次數占總次數的百分比為何呢？(3) 如果小麥投擲 200 次，按照圖(二)的結果，3 點應該出現大約多少次呢？



圖(一)



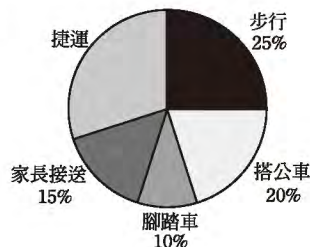
圖(二)

解

1. (1) $360^\circ \times \frac{4000}{18000} = 80^\circ$
- (2) $360^\circ - 80^\circ - 360^\circ \times \frac{1}{12} - 50^\circ - 360^\circ \times 25\% = 360^\circ - 80^\circ - 30^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 110^\circ$
 最多： $18000 \times \frac{110^\circ}{360^\circ} = 5500$ (本)
 最少： $18000 \times \frac{1}{12} = 1500$ (本)
 $5500 - 1500 = 4000$ (本)
2. (1) $50 - (8 + 6 + 10 + 8 + 9) = 9$ (次)
- (2) $\frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$
- (3) $10 \times (\frac{200}{50}) = 40$ (次)

Let's Go! 同步 評量 1

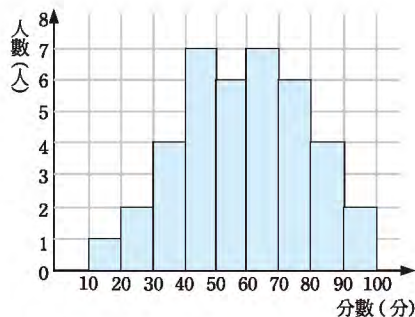
(B) 1. 右圖是奇鼎國中學生上學的交通情況統計圖，已知全校共有學生 2600 人，請問：搭捷運到學校有多少人呢？



- (A) 760
- (B) 780
- (C) 800
- (D) 820

1. $2600 \times (100 - 25 - 20 - 10 - 15)\% = 780$ (人)

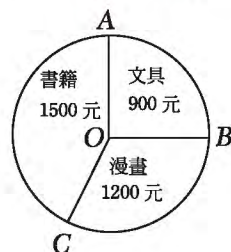
(C) 2. 右圖是 2 年 18 班第二次段考的數學成績直方圖，請問：80 分(含)以上占總人數的百分之幾呢？



- (A) 13.4
- (B) 14.4
- (C) 15.4
- (D) 16.4

2. $\frac{6}{39} \times 100\% \approx 15.4\%$

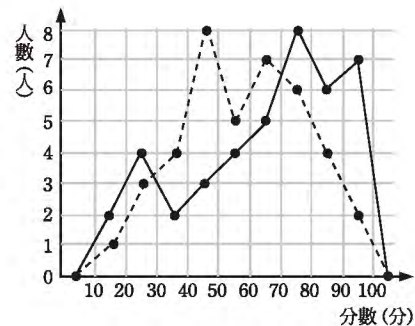
(C) 3. 右圖是育安書局耶誕節營收的圓形圖，請問： $\angle BOC$ 應是多少度呢？



- (A) 110°
- (B) 115°
- (C) 120°
- (D) 125°

3. $\angle BOC = \frac{1200}{1500 + 900 + 1200} \times 360^\circ = 120^\circ$

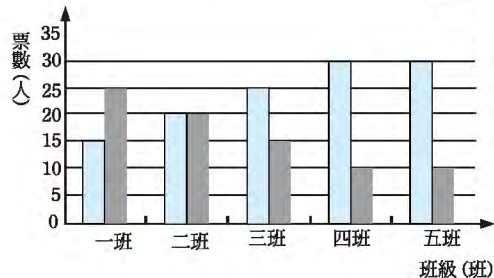
(D) 4. 右圖是第一次(實線)與第二次(虛線)段考的數學成績折線圖，請問：50 到 100 分之間的人數變化為何？



- (A) 增加 5 人
- (B) 減少 5 人
- (C) 增加 6 人
- (D) 減少 6 人

4. 第一次 = $4 + 5 + 8 + 6 + 7 = 30$ ，
第二次 = $5 + 7 + 6 + 4 + 2 = 24$
 \therefore 第二次較第一次減少 6 人

(A) 5. 模範生選舉要選出一名模範生代表，長婷與珍昌兩人出馬競選，試由右圖的統計表格(藍色是長婷，灰色是珍昌)，請問：哪一位候選人當選呢？



- (A) 長婷
- (B) 珍昌
- (C) 平手
- (D) 不能比較

5. 長婷得票 = 120 票，
珍昌得票 = 80 票

解題小 偏方 第 3 題：求圓形圖中的夾角，必須找出每個類別的比例，再乘上 360° 。

能力二

平均數、中位數與眾數

一 算術平均數 (M)

算術平均數簡稱為**平均數**，係指將一群數值資料的數值加總除以數值的個數。

其公式如下所示：

$$M = \frac{\text{各數的總和}}{\text{各數的個數}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

二 中位數 (M_d)

中位數是指將一群數值資料**依照大小排序**之後，位居該排列次序最中間的那一位所代表的數值。其算法如下所示：

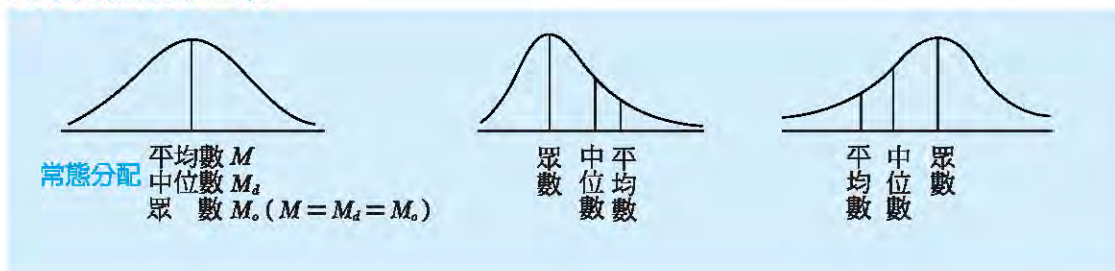
1. 先將一群數值**由小到大順序排列**。
2. 若該群數值的個數 (N) 共有 [**奇數個**] \Rightarrow 第 $\frac{N+1}{2}$ 的數值為中位數。
3. 若該群數值的個數 (N) 共有 [**偶數個**] \Rightarrow 第 $\frac{N}{2}$ 及 $\frac{N}{2} + 1$ 的數值之平均數為中位數。

三 眾數 (M_o)

眾數 (M_o) 是指一群數值資料中**出現最多次的數值**，也是被用於描述數值資料的集中趨勢。

四 平均數、中位數及眾數的關係

1. 平均數、中位數及眾數，並不一定會相同，因為原理不同，使用時機不同，因此也會有所不同。如果以一個**常態分配圖**來說，此三者會相同，但若資料不是成常態分配，則會有下列不同的情形出現。



名稱	特點	用途
平均數	受極端值的影響	能用於表達百分比
中位數	受排序的影響	用於有次序的資料
眾數	受次數多寡影響	可用於非數值的資料

3. 兩份資料合併

兩份資料合併	眾數不一定是先前任一個資料的眾數
	中位數不一定是先前任一個資料的中位數
數份資料合併	平均數可由數份資料比例及原平均求得

4. 調整資料值的影響

如果將原來次數分配表的每一個資料加、減、乘一個定數 A ，則新資料值：

- | |
|-----------------------------------|
| (1) 新的眾數 = 舊的眾數 $(+、-、\times)A$ |
| (2) 新的中位數 = 舊的中位數 $(+、-、\times)A$ |
| (3) 新的平均數 = 舊的平均數 $(+、-、\times)A$ |

2

老師傳授

平均數與中位數

學生寫作

2

1. 假設有一數列為 2、4、6、8、10、12 六個數的算術平均數為 V ，中位數為 M ，請問：其大小關係為何呢？
2. 育安 10 次測驗的平均分數是 83 分，史老師將他 10 次考試的最低分（52 分）與最高分（98 分）去掉，作為育安學期末的平均分數，請問：育安學期末的平均分數為何呢？
3. 胡瑾掬同學的學測成績，要甄選台中一中的加權分數一覽表如下：

科目	國文	英語	數學	自然	社會
分數	78	80	80	76	74
加權	1	2	3	2	1

試問加權後的平均分數為何？（四捨五入到小數點第一位）

解

1. 算數平均數 $V = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6}$
 $= 7$
 中位數 $M = \frac{6 + 8}{2} = 7 \Rightarrow V = M$
2. $\frac{83 \times 10 - 52 - 98}{8} = 85$ (分)
3. 加權後平均成績
 $= \frac{(78) + (80 \times 2) + (80 \times 3) + (76 \times 2) + 74}{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$
 $\doteq 78.2$

1. 麒仲前四次考試的平均分數為 88 分，請問：第五次要考多少分，才能使五次的平均分數為 90 分呢？
2. 育平的期末考考四科，已知國文、數學、生物三科平均分數是 82 分；國文、英文、數學三科平均分數是 90 分；國文、英文、生物三科平均分數是 88 分，英文、數學、生物三科平均分數是 84 分，請問：此四科的平均分數為何呢？
3. 溫加飽同學第一次段考三科分數如下：

科目	國文	英文	數學
節數	5	4	4
分數	86	75	90

請依照（節數）加權方式，計算溫同學的平均分數為何？（四捨五入到小數點第一位）

解

1. 設 5 次需考 x 分
 $(4 \times 88 + x) \div 5 = 90, x = 98$ (分)
2. $\left. \begin{array}{l} \text{國} + \text{數} + \text{生} = 82 \times 3 \\ \text{國} + \text{英} + \text{數} = 90 \times 3 \\ \text{國} + \text{英} + \text{生} = 88 \times 3 \\ \text{英} + \text{數} + \text{生} = 84 \times 3 \end{array} \right\}$
 $\Rightarrow \text{平均} = \frac{(82 + 90 + 88 + 84) \times 3}{3 \times 4} = 86$ (分)
3. 加權後平均成績
 $= \frac{(86 \times 5) + (75 \times 4) + (90 \times 4)}{5 + 4 + 4} \doteq 83.8$

3 老師 傳授

平均數、中位數、眾數

學生 實作 3

投擲兩顆骰子 40 次，每次兩顆骰子出現的點數和的次數分配表如下表，試求出現點數和的
(1) 平均數 (四捨五入求至小數第一位)；(2) 中位數；(3) 眾數。

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	2	3	1	5	4	6	9	7	2	1	0

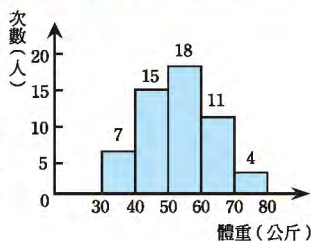
解

$$(1) (2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 6 + 8 \times 9 + 9 \times 7 + 10 \times 2 + 11) \div 40 = \frac{274}{40} \approx 6.9$$

$$(2) 40 \div 2 = 20, 20 + 1 = 21, \text{由小至大排序找第 } 20 \text{ 位數為 } 7, \text{第 } 21 \text{ 位數為 } 7 \Rightarrow \text{中位數} = \frac{7+7}{2} = 7$$

$$(3) \text{眾數} = 8$$

右圖，為 3 年 18 班學生體重直方圖。請問：



(1) 全班學生體重的平均數？(四捨五入求至小數第一位)

(2) 全班學生體重的中位數？

(3) 全班學生體重的眾數？

解

$$(1) \text{取組中點，並以 } 55 \text{ 為標準值，平均數} = (35 \times 7 + 45 \times 15 + 55 \times 18 + 65 \times 11 + 75 \times 4) \div 55 = 55 + (-20 \times 7 - 10 \times 15 + 10 \times 11 + 20 \times 4) \div 55 = 55 - 100 \div 55 = 55 - 1.82 = 53.18 \approx 53.2 \text{ (公斤)}$$

(2) 全體同學 55 (人)

$$\Rightarrow \text{中位數的位置} = \frac{55 + 1}{2} = 28$$

\therefore 中位數在 50~60 (公斤) 這一組

(3) 眾數在 50~60 (公斤) 這一組

Let's Go! 同步 評量 2

(D) 1. SOGO 百貨公司年終摸彩送給 60 位員工禮券如右表，請問：禮券平均價值為多少元呢？

禮券面額(元)	人數(人)
1000	x
1500	10
2000	20
2500	15
總計	60

- (A) 1719.6
- (B) 1917.6
- (C) 1617.9
- (D) 1791.6

$$1. \frac{1000 \times 15 + 1500 \times 10 + 2000 \times 20 + 2500 \times 15}{60} = 1791.6$$

(B) 2. 算術平均數可以知道資料的何種性質？

- (A) 資料分散性
- (B) 資料集中性
- (C) 週期性
- (D) 相關性

2. 算術平均數、中位數、眾數皆為了解資料的集中性

(C) 3. 文羽在平時考試十次中最高分為 98 分，最低分是 52 分，若老師將此兩分數去掉之後，文羽的平均分數為 80 分，請問：文羽原來的平均分數為何呢？

- (A) 77
- (B) 78
- (C) 79
- (D) 80

$$3. \frac{80 \times 8 + 98 + 52}{10} = 79$$

(D) 4. 老師分派五位同學將寒假作業裝訂，每一位同學裝訂一份所花的時間分別是：12、14、16、11、12 (單位：秒)，請問如果平均時間為 a ，中位數為 b ，則 $a + b = ?$

- (A) 1
- (B) 12
- (C) 13
- (D) 25

$$4. \text{平均數 } a = \frac{12 + 14 + 16 + 11 + 12}{5} = 13, \text{中位數 } b = 12, a + b = 25$$

- (C) 5. 今天老師要育安計算班上同學的成績，並且每一位同學都各加 5 分，請問：「算術平均數」與「中位數」分別有何變化呢？
- (A) 增加 5 分、減少 5 分 (B) 減少 5 分、增加 5 分
(C) 增加 5 分、增加 5 分 (D) 減少 5 分、減少 5 分

5. 每一位同學各加 5 分，算術平均數也會增加 5 分，中位數亦同

能力三 全距、四分位距、百分位數與盒狀圖

一 全距 (R)

全距是用來表示一群數值資料在團體中分散的情形，其意義是指一群數值資料中最大值與最小值的差。全距較易受到數值資料極端值影響，在解釋分散情形時比較不可靠。

$$R = \text{Max} - \text{min} \quad (\text{Max} : \text{資料中的最大值} ; \text{min} : \text{資料中的最小值})$$

二 四分位數與四分位距

- 「四分位數」係指將一群數值資料由小到大排序，全群個數 (N) 的第四分之一位 ($N/4$) 之數值，即為該群的第一個四分位數 (Q_1)；依序全群個數的第四之二位 ($2N/4$) 之數值，即為該群的第二個四分位數 (Q_2)，也是中位數 (M_d)；而全群個數的第四之三位 ($3N/4$) 之數值，即為該群的第三個四分位數 (Q_3)。
- 「四分位距 (IQR)」係指 Q_1 到 Q_3 的距離；若四分位距 (Q) 數值愈大，代表該群數值資料分散較大；反之，則分散情形較小。四分位距的特點是較不受到數值資料極端值 (太大或太小) 的影響，較能準確描述資料的分散情形。

$$IQR = (Q_3 - Q_1)$$

全距、四分位距的速解法

名稱	位置	判斷
min	排序中最小的數。	
Q_1	$n \times \frac{1}{4} = m$	1. 當 $m =$ 整數時，取第 m 個與第 $m + 1$ 的數，所對應數值之平均 2. 當 $m =$ 非整數時，取大於 m 的最小整數，所對應數值
Q_2	$n \times \frac{2}{4} = m$	
Q_3	$n \times \frac{3}{4} = m$	
Max	排序中最大的數。	
全距 = $\text{Max} - \text{min}$ ；四分位距 = $Q_3 - Q_1$		
n ：排序後的資料個數。 Q_1 ：第一四分位數； Q_2 ：第二四分位數； Q_3 ：第三四分位數		

三 百分位數 (P_p)

若數值資料的個數相當大，可將資料由小到大排序，且將其分成一百個等分，則各分隔點稱為百分位數。

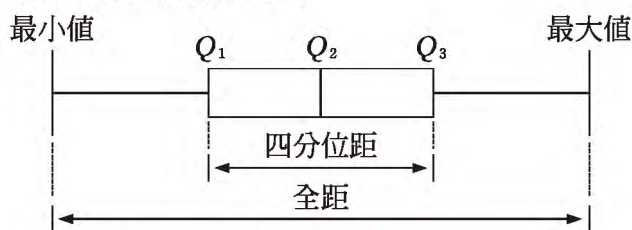
- | |
|----------------------------------|
| 第 25 個百分位數 = 第一個四分位數 Q_1 |
| 第 50 個百分位數 = 第二個四分位數 Q_2 = 中位數 |
| 第 75 個百分位數 = 第三個四分位數 Q_3 |

2. 資料未分組 \Rightarrow 求第 k 個百分位數(1) 先將資料由小到大排列： $a_1、a_2、a_3、\dots、a_n$ 。(2) 求 $m = n \times \frac{k}{100}$ ，判斷 $\begin{cases} m = \text{整數} \Rightarrow \text{第 } k \text{ 個百分位數} = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}。 \\ m = \text{非整數} \Rightarrow \text{大於 } k \text{ 的最小整數 } p, \text{ 第 } k \text{ 百分位數} = a_p。 \end{cases}$ 3. 資料分組 \Rightarrow 求第 k 個百分位數

(1) 將分組資料作成「累積次數百分比」折線圖。

(2) 在縱軸 $k\%$ 處畫一水平線交折線圖於一點，再過此點向下畫一鉛直線，交橫軸於 m 點，則 m 為第 k 百分位數。

四 盒狀圖 (Box Plot)

利用一群資料中最小值、 Q_1 、 Q_2 (中位數)、 Q_3 、最大值，這 5 個數據所繪製的圖形，用以瞭解資料分散的程度。※中位數 (Q_2) 不一定在盒狀圖中間

4

老師傳授

全距、四分位距與盒狀圖

學生寫作

4

體育老師測量班上 11 位同學的脈搏每分鐘的跳動次數，分別為 81、77、78、85、90、73、65、82、63、72、92，請問：這些同學脈搏每分鐘跳動次數的四分位距為何呢？全距為何呢？請畫出盒狀圖。

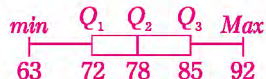
解

(1) 將資料由小到大重新排序如下：

63、65、72、73、77、78、81、82、85、90、92

(2) 找 $Q_1 \Rightarrow 11 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ \Rightarrow 找第 3 位數值， $Q_1 = 72$ 找 $Q_2 \Rightarrow 11 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ \Rightarrow 找第 6 位數值， $Q_2 = 78$ (中位數)找 $Q_3 \Rightarrow 11 \times \frac{3}{4} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$ \Rightarrow 找第 9 位數值， $Q_3 = 85$ 四分位距 $= Q_3 - Q_1 = 85 - 72 = 13$ (3) 全距 $=$ 最大值 $-$ 最小值 $= 92 - 63 = 29$

(4) 盒狀圖



生物課時，老師指定八組各帶一隻小白老鼠來走迷宮，經過測試八隻老鼠走迷宮花費的時間如下：2、6.5、2.5、8.6、9.3、7.2、16.5、18 (單位：秒)，請問：小白老鼠走迷宮秒數的四分位距為何呢？全距為何呢？請畫出盒狀圖。

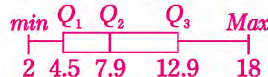
解

(1) 將資料由小到大重新排序如下：

2、2.5、6.5、7.2、8.6、9.3、16.5、18

(2) 找 $Q_1 \Rightarrow 8 \times \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow$ 找第 2 位與第 3 位數值之平均值， $Q_1 = \frac{2.5 + 6.5}{2} = 4.5$ 找 $Q_2 \Rightarrow 8 \times \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow$ 找第 4 位與第 5 位數值之平均值， $Q_2 = \frac{7.2 + 8.6}{2} = 7.9$ 找 $Q_3 \Rightarrow 8 \times \frac{3}{4} = 6 \Rightarrow$ 找第 6 位與第 7 位數值之平均值， $Q_3 = \frac{9.3 + 16.5}{2} = 12.9$ 四分位距 $= Q_3 - Q_1 = 12.9 - 4.5 = 8.4$ (3) 全距 $=$ 最大值 $-$ 最小值 $= 18 - 2 = 16$

(4) 盒狀圖



5 老師 傳授

百分位數與盒狀圖

學生 實作 5

3年28班，28位同學體重由輕到重如下所示：
32、33、36、42、43、45、45、47、49、
50、50、50、51、52、52、53、55、57、
57、58、58、60、63、63、65、66、72、
74。

試求：

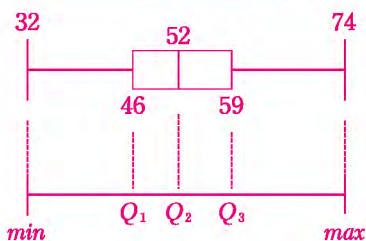
- (1) 第45百分位數？
- (2) $(Q_1, Q_2, Q_3) = ?$
- (3) 盒狀圖中哪段最集中？哪段最分散？

解

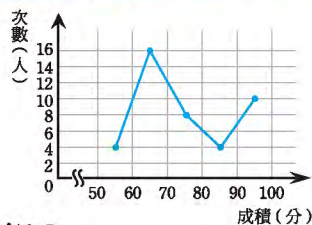
(1) $28 \times \frac{45}{100} = 12.6$ ，第45百分位數 = $a_{13} = 51$

(2) $28 \times \frac{1}{4} = 7$ ， $Q_1 = \frac{a_7 + a_8}{2} = \frac{45 + 47}{2} = 46$
 $28 \times \frac{1}{2} = 14$ ， $Q_2 = \frac{a_{14} + a_{15}}{2} = \frac{52 + 52}{2} = 52$
 $28 \times \frac{3}{4} = 21$ ， $Q_3 = \frac{a_{21} + a_{22}}{2} = \frac{58 + 60}{2} = 59$
 $(Q_1, Q_2, Q_3) = (46, 52, 59)$

- (3) 全距 = 最大值 - 最小值 = $74 - 32 = 42$ ，
 四分位距 = $Q_3 - Q_1 = 59 - 46 = 13$
 最集中： $Q_1 \sim Q_2$
 最分散： $Q_3 \sim \text{最大值} (Max)$



右圖是3年28班週考數學成績折線圖，若以組中點代表該組的資料值，請問：



- (1) 第75百分位數在哪一組？
- (2) Q_1, Q_2, Q_3 在哪一組？
- (3) 全距與四分位距大約為何？
- (4) 盒狀圖中哪段最集中？哪段最分散？

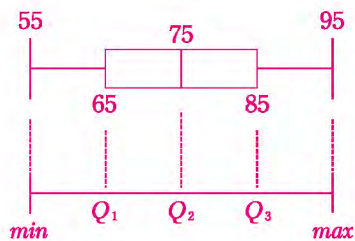
解

(1) $42 \times \frac{75}{100} = 31.5$ ，第75百分位數 = a_{32}
 \Rightarrow 在80~90(分)這一組

(2) $42 \times \frac{1}{4} = 10.5$ ， $Q_1 \Rightarrow$ 在60~70(分)這一組
 $42 \times \frac{1}{2} = 21$ ， $Q_2 \Rightarrow$ 在70~80(分)這一組
 $42 \times \frac{3}{4} = 31.5$ ， $Q_3 \Rightarrow$ 在80~90(分)這一組

- (3) 取資料組中點計算全距和四分位距
 全距 $\div 95 - 55 = 40$ ，
 四分位距 $\div Q_3 - Q_1 = 85 - 65 = 20$

- (4) 四段皆相同



Let's Go! 同步 評量 3

- (B) 1. 恆春鎮去年一年每月的均溫 18° 、 20° 、 24° 、 28° 、 29° 、 29° 、 30° 、 31° 、 33° 、 30° 、 25° 、 20° ，則其四分位距為何？

- (A) 6 (B) 8
(C) 10 (D) 12

1. 排序： $18, 20, 20, 24, 25, 28, 29, 29, 30, 30, 31, 33$
 $Q_1 \Rightarrow 12 \times \frac{1}{4} = 3$ ，取第3與第4位之平均， $Q_1 = \frac{20 + 24}{2} = 22$
 $Q_3 \Rightarrow 12 \times \frac{3}{4} = 9$ ，取第9位與第10位之平均， $Q_3 = \frac{30 + 30}{2} = 30$
 \Rightarrow 四分位距 = $30 - 22 = 8$

- (B) 2. 有一組資料的四分位距為50，若將此資料每個數同乘上6倍，再加上2時，則新的四分位距為何？

- (A) 50 (B) 300 (C) 302 (D) 無法判斷

2. $50 \times 6 = 300$

(C) 3. 有一組資料 10 個數，其中 Q_3 (第三四分位數) 為 18，若將 10 個數同乘上 7 倍，在同時加上 7，則 Q_3 應為下列何者？

- (A) 18 (B) 126 (C) 133 (D) 無法判斷

$$3. 18 \times 7 + 7 = 133$$

(C) 4. 柚子班上有女生 24 人，依身高 (公分) 的次序由矮到高排序如下：143、144、145、146、147、147、148、148、148、149、150、151、151、151、152、152、155、156、157、157、158、159、160、163。則下列敘述何者正確？

- (A) 第 10 百分位數為 144 公分
 (B) 第 15 百分位數為 146.5 公分
 (C) 第 78 百分位數為 157 公分
 (D) 第 90 百分位數為 159.5 公分

$$4. (A) P_{10} = 24 \times 0.1 = 2.4, \text{取第 3 位} \Rightarrow 145$$

$$(B) P_{15} = 24 \times 0.15 = 3.6, \text{取第 4 位} \Rightarrow 146$$

$$(C) P_{78} = 24 \times 0.78 = 18.72, \text{取第 19 位} \Rightarrow 157$$

$$(D) P_{90} = 24 \times 0.9 = 21.6, \text{取第 22 位} \Rightarrow 159$$

(B) 5. 承上題，柚子班上 24 位女生身高的四分位距為何？

- (A) 8.5 (B) 9
 (C) 9.5 (D) 10

$$5. 24 \times \frac{1}{4} = 6, Q_1 = \frac{a_6 + a_7}{2} = 147.5; 24 \times \frac{3}{4} = 18, Q_3 = \frac{a_{18} + a_{19}}{2} = 156.5$$

$$\text{四分位距} = Q_3 - Q_1 = 9$$

能力四 機率與抽樣

一 機率

若一次試驗可能出現 n 種結果，且每一種結果發生的機會都相等，則每種結果發生的機率為 $\frac{1}{n}$ 。

1. 試驗

丟擲一枚質地均勻 (公正) 的硬幣，會出現正面及反面，二種結果。

丟擲一顆質地均勻 (公正) 的骰子，會出現一~六點，六種結果。

2. 事件

在每一種試驗中，總會出現許多結果，其中的「部分結果」的組合稱為事件。

3. 事件機率

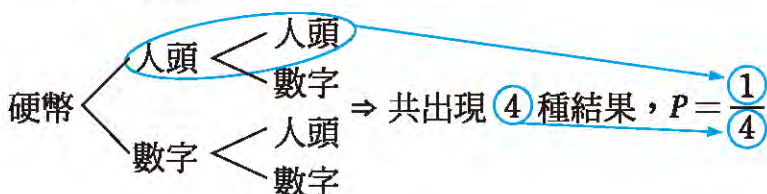
在一試驗中，可能發生的結果有 m 種，在每一種結果發生的機會相等之下，若事件包含其中 n 種可能的結果，即是事件發生的機率 $P = \frac{n}{m}$ 。

4. 樹狀圖

樹狀圖是一種簡單的方式，可以將可能發生的結果一一列出，方便我們去探討某事件發生的機率。

例 2：若以一枚公正硬幣投擲兩次，出現兩次都是人頭的機率為何？

樹狀圖的畫法如下圖所示：



二 機率的三大基本問題

1. 擲骰子問題：

- (1) 擲 n 顆骰子或 n 次，有 6^n 種結果。
 (2) 擲 2 顆骰子，【各點數和】出現的機率如下表所示：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機 率	$\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. 丟硬幣問題：

- (1) 丟 n 枚硬幣或 n 次，有 2^n 種情形。
 (2) 丟三次一枚公正硬幣，各事件發生的機率如下表所示：

事 件	三 正	二正一反	一正二反	三 反
機 率	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. 取球問題：

- (1) 有一個袋子，裝有紅球 n 顆、白球 m 顆，每次各取一球，**取出後放回**，則有下列情形：

① 取出紅球的機率 $P = \frac{n}{n+m}$ ② 取出白球的機率 $P = \frac{m}{n+m}$

- (2) 有 A、B 兩個袋子，A 袋裝有紅球 n 顆、白球 m 顆，B 袋裝有紅球 r 顆、白球 s 顆；兩袋每次各取一球，**取出後放回**，則有下列情形：

事 件	皆紅球	皆白球	A 紅 B 白	A 白 B 紅
機 率	$P = \frac{n}{n+m} \times \frac{r}{r+s}$	$P = \frac{m}{n+m} \times \frac{s}{r+s}$	$P = \frac{n}{n+m} \times \frac{s}{r+s}$	$P = \frac{m}{n+m} \times \frac{r}{r+s}$

※【機率的變化多樣化，以上僅提供幾種基本型態，希望同學能透徹瞭解不要死記！】

三 抽樣

抽樣是爲了節省人力、物力與時間的一種方法，主要用來能夠推估接近整體母群的結果。因此，**抽樣是存在有誤差的**，**而且抽取的樣本也必須具有代表性**，否則會影響整體推估的效果。

(一) 簡單的推估方法 (捉放法)

$$\frac{\text{標記物總數}}{\text{母群體總數}} = \frac{\text{抽中的標記物總數}}{\text{抽樣總數}}$$

例 3：臺南七股沿岸有黑面琵鷺上千隻，今天我們要瞭解其大概有多少隻，可使用捉放法，先隨機捉一定數量的黑面琵鷺將其作記號，再放置回原棲息地，經過一段時間之後（使其混雜在母群中），再隨機捉回一定數量的黑面琵鷺，依照公式做運算即可得知其母群概數爲何。

6

老師傳授

機率 I

學生寫作

6

有二十顆球，球上分別標明 1、2、…、20 號，任取一球，請回答下列問題：

1. 抽到號碼是 3 的倍數的機率為何呢？
2. 抽到號碼是質數，且號碼不小於 10 的機率為何？

解

1. 3 的倍數有：

3、6、9、12、15、18 (共 6 個)

$$P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

2. 號碼是質數且不小於 10 的數有：

11、13、17、19 (共 4 個)

$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

英語演講比賽，史老師欲以抽籤方式由衍邵、佑鈞、崇賢三人中選一名參加比賽，若先由衍邵抽、佑鈞次之、崇賢最後，請問：誰被抽中的機率最大呢？

生活題

解

由衍邵先抽，則衍邵抽中的機率為 $\frac{1}{3}$ 。

衍邵沒抽中時，

由佑鈞抽中的機率為 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 。

衍邵與佑鈞皆沒抽中，

而崇賢抽中的機率為 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$

因此三人抽中的機率相等

7

老師傳授

機率 II

學生寫作

7

季芬以投擲一粒公正骰子的點數當作一元二次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ 中 x 的係數 a 的值，今季芬投擲這粒公正骰子一次，使此方程式有解的機率為多少？

解

方程式有解必須符合判別式 $D \geq 0$

$$D = b^2 - 4ac = a^2 - 4 \times 1 \times 2 = a^2 - 8 \geq 0$$

$a = 3, 4, 5, 6 (a \leq 6)$

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

設一元二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的係數 a 和 b 是由擲骰子的點數決定，擲第一次得 a ，擲第二次得 b ，請問：此方程式有相等實根（重根）的機率為何呢？

解

方程式有相等實根（重根），則判別式 $D = 0$

$$D = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow a^2 = 4b, \text{ 可知 } a \text{ 必為偶數}$$

當 $a = 2$ 時， $b = 1$ ，當 $a = 4$ 時， $b = 4$

$$\text{當 } a = 6 \text{ 時，} b = 9 \text{ (不合)，機率 } P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

8

老師傳授

抽樣

學生寫作

8

家樂福舉辦年終摸彩活動，總經理想知道摸彩箱中有多少張彩券，於是請秘書丟入紅色的紙片（大小與彩券相同）200 張，均勻攪拌後，隨機抓取一把，其中有 5 張紅色紙片，10 張彩券，請問：摸彩箱中大約有多少彩券呢？

解

生活題

設摸彩箱中有彩券 x 張

$$\frac{200}{x + 200} = \frac{5}{10 + 5} \Rightarrow 3000 = 5x + 1000$$

$$\Rightarrow x = \underline{400} \text{ (張)}$$

桃園機場海關檢驗美國進口的櫻桃，有 300 盒櫻桃禮盒，每盒有 100 顆櫻桃，今天抽驗其中 15 盒，發現有 30 顆有蟲蟲出現，請問：有蟲蟲的機率是多少呢？大概有多少顆櫻桃有蟲蟲呢？

生活題

解

15 盒共有 $15 \times 100 = 1500$ 顆

$$\text{有蟲蟲的機率} \Rightarrow P = \frac{30}{1500} = 0.02 = \underline{2\%}$$

$$\text{有蟲蟲的櫻桃顆數} \Rightarrow 300 \times 100 \times 2\% = \underline{600} \text{ (顆)}$$



- (D) 1. 下列何種情況不實施抽樣較為恰當？
- (A) 進口奶粉的帶菌程度 (B) 廣播節目的收視率
(C) 市長候選人的民意支持度 (D) 全班學生的興趣調查
- (D) 2. 同時投擲兩顆骰子，請問：下列敘述何者錯誤？
- (A) 一粒出現 1 點，另一粒出現 6 點的機率為 $\frac{1}{18}$
(B) 兩粒都出現 6 點的機率為 $\frac{1}{36}$
(C) 出現的點數和為 9 的機率為 $\frac{1}{9}$
(D) 出現的點數和不大於 6 的機率為 $\frac{2}{3}$
- (B) 3. 從車站到學校有 4 條路線，小胖打算由車站到學校，同時阿瘦打算從學校到車站，兩人各隨機選擇一條路線，試問兩人相遇的機率為何？
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$
- (A) 4. 魚池裡養了一些虱目魚，從池裡捉了 20 條魚作上記號後放回池中，經過一段時間後，再從池中隨機抓出 50 條魚，其中有 4 條魚身上有記號，則池中約有多少條魚？
- (A) 250 (B) 300 (C) 200 (D) 350
- (B) 5. 有一批奇異果共有 900 箱，每箱內有 40 顆，現在欲抽樣調查奇異果的損傷情形，打開其中二箱，結果共有 5 顆損傷，則抽樣調查的結果中，完整沒損傷的機率為何？
- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{13}{16}$

1. ∵ 全班人數不多，所以不用抽樣，直接調查即可

2. 出現點數和不大於 6 的機率為

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

3. 若車站到學校有 1、2、3、4，四條路，小胖：車站到學校，阿瘦：學校到車站，所有事件有 $4^2 = 16$ (種)，兩人相遇有 (1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 4) 共四種， $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

4. 設約有 x 條魚， $\frac{20}{x} = \frac{4}{50}$ ，
 $1000 = 4x$ ， $x = 250$

5. 兩箱共 $40 \times 2 = 80$ (顆)，機率為 $\frac{80 - 5}{80} = \frac{75}{80} = \frac{15}{16}$



生活應用題※，本書特有題◎，難題#



- (A) 1. 仁鴻第一次段考 6 科的平均是 86.5 分，如果數學不算，其它 5 科的平均是 93 分，則他的數學成績是幾分？
- (A) 54 (B) 56 (C) 58 (D) 59
- (B) 2. 若有 9 筆資料由小而大排序為 $a_1、a_2、\dots、a_9$ ，若拿掉 a_3 ，則此時中位數為何呢？
- (A) $\frac{a_4 + a_5}{2}$ (B) $\frac{a_5 + a_6}{2}$ (C) a_5 (D) a_6

1. $86.5 \times 6 - 93 \times 5 = 519 - 465 = 54$ 分

2. $a_1、a_2、a_4、a_5、a_6、a_7、a_8、a_9$ ，共 8 項，中位數為第 $\frac{8}{2} = 4$ 位與第 $\frac{8}{2} + 1 = 5$ 位數值的平均 = $\frac{a_5 + a_6}{2}$

- (C) 3. 奇鼎國中第一次段考數學有 15 % 的人考 95 分，20 % 的人考 90 分，5 % 的人考 85 分，12 % 的人考 80 分，18 % 的人考 75 分，其餘的人考 70 分，則此次段考數學成績的中位數為何？

3. $100\% - (15\% + 20\% + 5\% + 12\% + 18\%) = 30\%$
 $30\% + 18\% + 12\% = 60\%$ ，中位數為 80

- (A) 70 (B) 75 (C) 80 (D) 85

- (D) 4. 有一組資料恰為等差數列，共有 13 項，公差是 3，求其四分位距為何？

4. $13 \times \frac{1}{4} = 3.25$ ， $13 \times \frac{3}{4} = 9.75$ ，

$Q_3 - Q_1 = a_{10} - a_4 = a_1 + 9d - (a_1 + 3d) = 6d = 6 \times 3 = 18$

- (D) 5. 史老師家庭每月支出 50000 元，其中衣著每月支出 5000 元，以圓面積圖表示，則其圓心角的大小為幾度？

5. $360^\circ \times \frac{5000}{50000} = 360^\circ \times \frac{1}{10} = 36^\circ$

- (A) 45° (B) 31.5° (C) 50° (D) 36°

- (A) 6. 查理布朗給史努比六月分家庭預算圓面積圖中，交通費所占扇形之兩半徑的夾角為 60°，請問：交通費占總預算的多少？

6. 占 $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

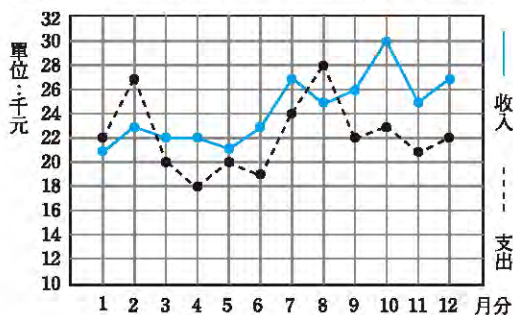
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

- (C) 7. 奇鼎國中將全校學生人數分一年級男生、一年級女生、二年級男生、二年級女生、三年級男生、三年級女生六組繪製圓面積圖，得三年級男生所占的圓心角為 45°，若三年級男生有 300 人，則該校全校學生共有多少人？

7. 設全校有 x 人，
 則 $\frac{300}{x} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$ ， $\frac{300}{x} = \frac{1}{8}$
 $\therefore x = 2400$

- (A) 1350 (B) 2000 (C) 2400 (D) 4500

- (D) 8. 奧麗薇小姐去年 12 個月的收支情形如下圖所示，則下列何者正確？



8. (A) 觀察折線圖可知收入最多的是 10 月
 (B) 整年平均收入為
 $(21 + 23 + 22 + 22 + 21 + 23 + 27 + 25 + 26 + 30 + 25 + 27) \div 12 = 292 \div 12 = 24.333\dots$
 全年平均收入約為 24333 元
 (C) 整年平均支出為
 $(22 + 27 + 20 + 18 + 20 + 19 + 24 + 28 + 22 + 23 + 21 + 22) \div 12 = 266 \div 12 = 22.1666\dots$
 全年平均支出約為 22167 元
 (D) 收支相抵不夠的月分有 1 月、2 月、8 月共 3 個月

- (A) 收入最多的是 8 月分 (B) 整年平均收入為 24000 元
 (C) 整年平均支出為 20000 元 (D) 有 3 個月收支相抵不夠

- (D) 9. 小菁參加全民英檢共有 15000 人參加，小菁成績的百分位數為 99，則下列何者不可能是她的名次？

9. $15000 \times \frac{1}{100} = 150$ 表示在 150 名內，故(D)不可能

- (A) 1 (B) 15 (C) 30 (D) 151

- (D) 10. 小華在基測中，成績的百分位數為 97，此表示下列何者？
- (A) 他的成績贏過 97 人 (B) 約有 97 % 的人成績比他好
 (C) 他的成績平均 97 分 (D) 他的成績約贏過 97 % 的人
10. (A) 應該是贏過考生人數的 97 %
 (B) 應該是有 97 % 的人成績比他差
 (C) 無法知道分數

- ※(C) 11. 彰化到新竹，走山線有 4 種方法，走海線有 5 種方法，則某人以抽籤決定由彰化到新竹走海線的機率是多少？

11. 走海線的機率為 $\frac{5}{9}$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{5}{4}$

(A) 12. 投 1 粒骰子兩次，則出現的點數和為 7 之機率為何？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$

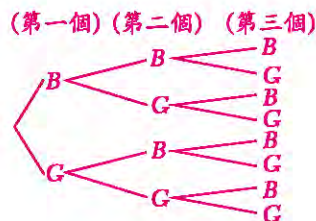
12. 點數和為 7 有 (1, 6)、(2, 5)、(3, 4)、(4, 3)、(5, 2)、(6, 1) \therefore 機率為 $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

(C) 13. 一個有三個小孩的家庭，其中兩個男孩、一個女孩的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{8}$
(B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{3}{8}$
(D) $\frac{5}{8}$

13. 畫樹狀圖如圖

\therefore 二個男孩，一個女孩的事件有 (B, B, G), (B, G, B), (G, B, B) 三種結果，故機率為 $\frac{3}{8}$



(C) 14. 將 0、1、2、3、4 五個數中任取二個數字 (不重複) 排成一個二位數，此二位數為偶數的機率為何？

- (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{8}{3}$
(C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{8}$

14. (1) 任取二數字 (不重複) 排成二位數有 $5 \times 4 - 4 = 16$ (個)

(2) 此二位數為偶數有 10、12、14、20、24、30、32、34、40、42 共 10 個 \therefore 為偶數的機率為 $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

(C) 15. 甲、乙兩人由 1、2、3、4 四個數字，各自任意寫出一個數字 (設每個數字被寫的機會相等)，則甲所寫數字大於乙所寫數字的機率為何？

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$
(C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{12}$

15. \therefore

甲	2	3	4
乙	1	1, 2	1, 2, 3

，共 6 種可能 \therefore 甲、乙兩人由 1、2、3、4 四個數字，各自任意出一個數字有 $4 \times 4 = 16$ (種) 可能， \therefore 機率 = $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

歷屆基測題

(A) 1. 小琳班上 25 位同學射飛鏢命中紅心的次數依序為 3、5、5、5、2、4、6、7、3、9、0、9、3、3、4、5、1、2、3、8、1、4、6、0、3。此資料的眾數為何？

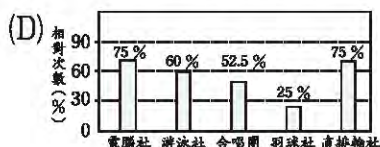
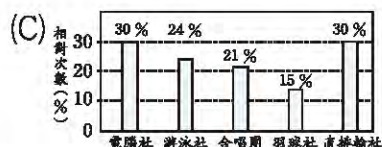
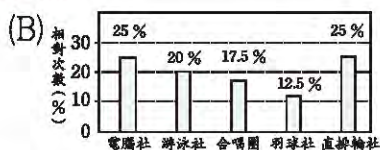
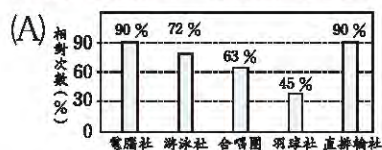
- (A) 3 (B) 5
(C) 6 (D) 9

1. 將數據整理成如表

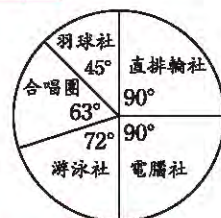
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2	6	3	4	2	1	1	2

可知眾數為 3

(B) 2. 右圖為某校各社團人數的圓形圖。若將該校各社團人數的相對次數畫成長條圖，則此圖應為下列何者？



基測二



2. 電腦社： $\frac{90}{360} = 25\%$ ，
游泳社： $\frac{72}{360} = 20\%$ ，
合唱團： $\frac{63}{360} = 17.5\%$ ，
羽球社： $\frac{45}{360} = 12.5\%$ ，
直排輪社： $\frac{90}{360} = 25\%$
故選(B)

解題小 第 14 題：0~4 整數中任取二數字 (不重複) 組成的二位數，共有 $5 \times 4 - 4 = 16$ (種)。

(A) 3. 某抽獎盒內有 99 顆球，其中白球有 50 顆，且盒內每顆球被抽中的機會均相等。若小涓自此盒中抽球，且每抽中一顆白球即可獲得一項贈品，則下列關於小涓抽球的敘述何者錯誤？

- (A) 一次抽出 50 球不一定可獲得贈品
 (B) 只抽一球就獲得贈品的機率大於 $\frac{1}{2}$
 (C) 一次抽出 80 球至少可獲得 31 項贈品
 (D) 一次抽出 62 球與一次抽出 61 球，可獲得贈品的機率相等

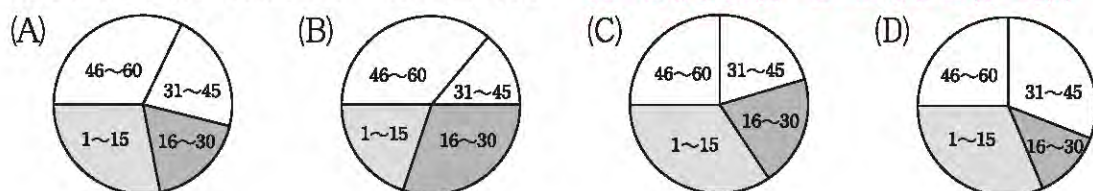
3. (A) 非白球有 49 顆，一次抽出 50 球至少有一顆白球，所以一定可獲得贈品
 (B) $\frac{50}{99} > \frac{50}{100} (= \frac{1}{2})$
 (C) 一次抽出 80 球至少可抽中 $80 - 49 = 31$ 顆白球，至少可獲得 31 項贈品
 (D) 一次抽出 62 球與一次抽出 61 球，可獲得贈品的機率都是 1，所以相等
 故選(A)

(C) 4. 甲、乙各丟一次公正骰子大小。若甲、乙的點數相同時，算兩人平手；若甲的點數大於乙時，算甲獲勝；若乙的點數大於甲時，算乙獲勝。求甲獲勝的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$
 (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$

4. \therefore 平手的機率 = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
 又甲勝與乙勝的機率相等
 \therefore 甲勝的機率 = $(1 - \frac{1}{6}) \div 2 = \frac{5}{12}$

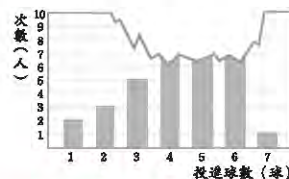
(D) 5. 阿良將全校學生某次數學成績分成 1~15、16~30、31~45、45~60 四組，並製成圓形圖，其中該校數學成績的第 25、50、75 百分位數分別為 14、32、45。若下列有一選項為此資料的圓形圖，則此圖為何？



5. 由題意知 14 分以下的占 25%，14~32 分占 25%，32~45 分占 25%，45~60 分占 25%，選(D)

(C) 6. 右圖為某班 35 名學生投籃成績的長條圖，其中上面部分破損導致資料不完全。已知此班學生投籃成績的中位數是 5，則根據右圖，無法確定下列哪一選項中的數值？

- (A) 3 球以下 (含 3 球) 的人數
 (B) 4 球以下 (含 4 球) 的人數
 (C) 5 球以下 (含 5 球) 的人數
 (D) 6 球以下 (含 6 球) 的人數



6. \therefore 中位數落在第 18 個人且中位數 = 5
 又由圖知道 4 球得至少 7 人，進 1~3 球的有 10 人
 \therefore 進 4 球的有 7 人
 但無法確定進 5 球、6 球的各有幾人
 選(C)

基測趨勢題

(B) 1. 將一粒公正的骰子連擲二次，出現點數和小於 6 的機率為 a ，出現點數和大於 6 的機率為 b ，則 $a + b = ?$

- (A) $\frac{27}{36}$ (B) $\frac{31}{36}$
 (C) $\frac{27}{31}$ (D) $\frac{30}{31}$

1. 點數和為 6 有 (1,5)、(2,4)、(3,3)、(4,2)、(5,1) 共有 5 種， $\therefore 36 - 5 = 31 \Rightarrow$ 機率 = $\frac{31}{36}$

*(C) 2. 一列開往豐原的電聯車有三節車廂供乘客搭乘，芳琦、詩涵兩人任意搭乘這三節車廂到豐原 (每節車廂被選擇的機會均等)，則二人在同一車廂之機率為何？

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- (D) 3. 投擲一粒公正的骰子兩次，令第一次得到的點數為 x ，第二次得到的點數為 y ，則下列敘述何者正確？
- (A) 於每次實驗中， $x > y$ 的機率為 $\frac{1}{2}$
 (B) 於每次實驗中， x 為 1 點的機率為 $\frac{1}{2}$
 (C) 於每次實驗中， (x, y) 為 $2x + y = 6$ 的解，機率為 $\frac{1}{6}$
 (D) 若於每次實驗後，將所得的 (x, y) 繪於坐標平面上，則必落在第一象限上
- (A) 4. 將一枚公正的硬幣連投 3 次，則 3 次都出現正面的機率是 a ，2 次出現正面且 1 次出現反面的機率是 b ，只出現 1 次正面的機率是 c ，最少有 1 次出現正面的機率是 d ，則 $a + b + c - d = ?$
- (A) 0 (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{8}$
- (D) 5. 籤筒中有 10 枝籤，分別標有 1, 2, …, 10 等號碼，從其中抽出一枝，若其號碼為 a ，則此號碼使 $a - 3$ 為正數， $a - 7$ 為負數之機率為何？
- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{10}$
- (C) 6. 以坐標平面的原點開始，擲一公正的硬幣，若出現正面，則向右移一單位；若出現反面，則向上移一單位，試問擲硬幣四次到達 $(3, 1)$ 的機率是多少？
- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{16}$
- (C) 7. 有七個數由小到大排列，其算術平均數為 47，前四個數的算術平均數為 42，後四個數的算術平均數為 51，請問：此七個數的中位數為何呢？
- (A) 23 (B) 33 (C) 43 (D) 53

3. (A) $P = \frac{15}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ 。(B) $P = \frac{1}{6}$
 (C) $P = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ (D) 機率有正沒有負

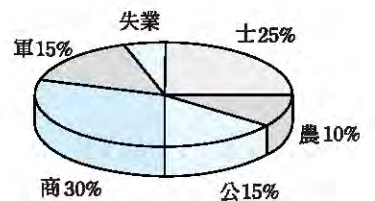
4. $a = \frac{1}{8}, b = \frac{3}{8}, c = \frac{3}{8}, d = \frac{7}{8}$
 $\Rightarrow a + b + c - d = \frac{1+3+3-7}{8} = 0$

5. $\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a - 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow 3 < a < 7$
 $a = 4, 5, 6 \Rightarrow P = \frac{3}{10}$

6. $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

7. 中位數 = $42 \times 4 + 51 \times 4 - 47 \times 7 = 43$

- ※(D) 8. 右圖是奇鼎國中調查校內學生家長職業的結果，已知家長是務農與從商的相差 100 人，請問：目前有多少位的學生家長失業呢？



(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25

8. 全校人數 $\Rightarrow 100 \div 20\% = 500$
 $500 \times (100 - 15 - 30 - 15 - 10 - 25)\% = 25$ 人

- (B) 9. 已知一袋中有紅、白兩種色球共 24 顆，自其中隨機抽取 5 球，得到紅球 3 顆，則袋中最有可能的紅球數目為何呢？
- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16

9. 由題目可知紅球約占全部的 $\frac{3}{5}$ ，因此袋中最有可能的紅球數目為 $24 \times \frac{3}{5} = \frac{72}{5} = 14.4$ ，四捨五入取整數為 14

- #(A) 10. 袋子中原有相同大小的色球 5 個，其中黃球 4 個、白球 1 個，後來又放入黃球、白球各 2 個，則取得白球的機率會如何改變呢？
- (A) 加球後變大 (B) 加球後變小
 (C) 加球後不變 (D) 加球後變為原來的兩倍

10. 原本取得白球的機率為 $\frac{1}{5}$ ，後來取得白球的機率為 $\frac{1+2}{5+2+2} = \frac{1}{3}$ ，所以機率變大

解題小 備方 第 9 題：隨機抽 5 球，得紅球 3 顆，亦即機率為 $\frac{3}{5}$ 。

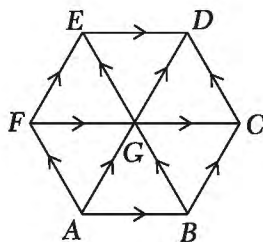
第 10 題：將原本取得白球的機率 $\frac{b}{a}$ ，分母與分子各加上後來放入黃球與白球的顆數。

1~6 冊 模 擬 試 題

- (C) 1. 因式分解 $-\frac{3}{13}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{14}{13}$ 為下列何者?
 (A) $\frac{1}{26}(2x+7)(3x-4)$ (B) $\frac{1}{26}(2x-7)(3x+4)$
 (C) $-\frac{1}{26}(2x+7)(3x-4)$ (D) $-\frac{1}{26}(2x-7)(3x-4)$

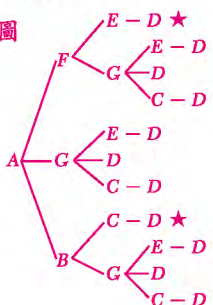
1. 原式 = $-\frac{1}{26}(6x^2 + 13x - 28) = -\frac{1}{26}(2x+7)(3x-4)$

- (D) 2. 右圖為迷宮的平面圖，若依照箭頭指示方向前進，請問從 A 經過 G 走到 D 的機率為多少？



- (A) $\frac{7}{10}$
 (B) $\frac{9}{10}$
 (C) $\frac{7}{11}$
 (D) $\frac{9}{11}$

2. 樹狀圖



全部共 11 種路徑，僅有打★的 2 種路徑未通過 G 點，故機率為
 $P = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$

- (A) 3. 老師問同學，若把 36 顆糖果分成兩堆，此兩堆糖果數的乘積最大為何？

- (A) 324 (B) 361
 (C) 400 (D) 441

3. $y = x(36-x) = -x^2 + 36x = -(x^2 - 36x + 18^2) + 18^2 = -(x-18)^2 + 324$ ，
 當 $x = 18$ 時，有最大值 324

- (A) 4. 若 $a = \frac{97}{399} \div \frac{3}{7}$ 、 $b = \frac{97}{399} \div \frac{4}{7}$ 、 $c = \frac{97}{399} \div \frac{5}{7}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？

- (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$
 (C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$

4. $\because \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} \therefore \frac{97}{399} \div \frac{3}{7} > \frac{97}{399} \div \frac{4}{7} > \frac{97}{399} \div \frac{5}{7}$
 $\Rightarrow a > b > c$

- (C) 5. 一張 GASH 點數卡若以定價的八折售出，則賠本 35 元，若以定價的九五折售出，則可賺 40 元，則這一張 GASH 點數卡的成本有多少元？

- (A) 335 (B) 365 (C) 435 (D) 465

5. 設定價為 x 元， $0.8x + 35 = 0.95x - 40$ ， $x = 500$
 成本 = $500 \times 0.8 + 35 = 435$ (元)

- (D) 6. 若 $A = 2 \times 10^6$ 、 $B = 2.5 \times 10^7$ ，若以科學記號表示，下列何者正確？

- (A) $A + B = 27 \times 10^6$
 (B) $A - B = 2.3 \times 10^7$
 (C) $A \times B = 5 \times 10^{14}$
 (D) $A \div B = 8 \times 10^{-2}$

6. (A) $A + B = (2 \times 10^6) + (2.5 \times 10^7) = (0.2 \times 10^7) + (2.5 \times 10^7) = 2.7 \times 10^7$
 (B) $A - B = (2 \times 10^6) - (2.5 \times 10^7) = (0.2 \times 10^7) - (2.5 \times 10^7) = -2.3 \times 10^7$
 (C) $A \times B = (2 \times 10^6) \times (2.5 \times 10^7) = 5 \times 10^{13}$
 (D) $A \div B = (2 \times 10^6) \div (2.5 \times 10^7) = 0.8 \times 10^{-1} = 8 \times 10^{-2}$

- (C) 7. 若 A 為整數，且 $|-3\frac{1}{6}| < |A| < |-6\frac{1}{3}|$ ，則 A 共有多少個？

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

7. 原式 $\Rightarrow 3\frac{1}{6} < |A| < 6\frac{1}{3}$ ， $|A| = 4, 5, 6$ ，
 $A = \pm 4, \pm 5, \pm 6$ ，共 6 個

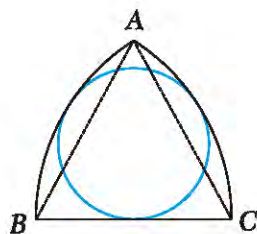
- (B) 8. 下列哪一個算式有誤？

- (A) $\frac{5}{7} \div \frac{7}{5} = \frac{25}{49}$ (B) $3 \div (2+5) = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{3}{7}$
 (C) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ (D) $(3-5) \div 7 = \frac{3}{7} - \frac{5}{7} = \frac{-2}{7}$

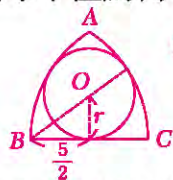
8. (B) 有誤！

正確為 $3 \div (2+5) = 3 \div 7 = \frac{3}{7}$

- (B) 9. 如右圖，有一拱門由 \widehat{AB} 、 \widehat{AC} 與 \overline{BC} 所構成，其中 \widehat{AB} 、 \widehat{AC} 分別以 C 、 B 為圓心， \overline{BC} 為半徑所做的弧，若 $\overline{BC} = 5$ 公尺，則此拱門內所能通過的最大圓球半徑為何？



- (A) $\frac{13}{8}$ (B) $\frac{15}{8}$
(C) $\frac{17}{8}$ (D) $\frac{19}{8}$



$$9. \overline{BO} = 5 - r, (5 - r)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + r^2$$

$$\Rightarrow 25 - 10r + r^2 = \frac{25}{4} + r^2, r = \frac{15}{8}$$

- (C) 10. 利用右列乘開方表，求 $(1.264911)^2 - \sqrt{1.7}$ 的值为何？

N	N ²	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
15	225	3.872983	12.24745
16	256	4.000000	12.64911
17	289	4.123106	13.03840

(A) 0.196160

(B) 0.206160

(C) 0.296160

(D) 0.306160

$$10. (1.264911)^2 - \sqrt{1.7} = (12.64911 \times 10^{-1}) - \sqrt{\frac{170}{100}}$$

$$= (\sqrt{160} \times 10^{-1})^2 - \frac{13.03840}{10}$$

$$= (160 \times 10^{-2}) - 1.303840 = 0.296160$$

- (C) 11. 試化簡 $\frac{1}{\sqrt{4^{-1}} + (\sqrt{4})^{-1}}$ 為下列何者？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 4

$$11. \text{原式} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

- (A) 12. 若 A 是 35 到 45 的整數乘積， $A = 35 \times 36 \times 37 \times 38 \times \dots \times 45$ ，則下列哪個不是 A 的質因數？

- (A) 17 (B) 19 (C) 37 (D) 41

12. 因為(A) $17 \times 2 = 34$ 、 $17 \times 3 = 51$
34 與 51 皆不在 35~45 之間

- (B) 13. 若 x 、 y 是正整數，且 $x^2 - 65$ 是 y 的平方，則 x 可能的值為下列何者？

(A) 4 或 32 (B) 9 或 33

(C) 4 或 9 (D) 32 或 33

$$13. x^2 - 65 = y^2, x^2 - y^2 = 65, (x - y)(x + y) = 65$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 32 \end{cases}, \textcircled{2} \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

- (C) 14. 如右圖，A、B、C、D、E 為圓 O 上五個點，若 $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ ， $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\angle 1 = 36^\circ$ 、 $\angle 2 = 54^\circ$ ，則 \widehat{BC} 為多少度呢？

(A) 30°

(B) 45°

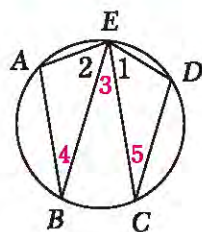
(C) 60°

(D) 75°

$$14. \angle 1 = 36^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 72^\circ, \angle 2 = 54^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 108^\circ$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 \therefore \widehat{BC} = \widehat{AE} = \widehat{ED}$$

$$3\widehat{BC} + \widehat{AB} + \widehat{CD} = 360^\circ, 3\widehat{BC} = 180^\circ, \widehat{BC} = 60^\circ$$



- (D) 15. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 是直角， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{CD} = 5$ ，則 $\overline{AC} = ?$

(A) $5\sqrt{3}$

(B) $5\sqrt{5}$

(C) $3\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{5}$

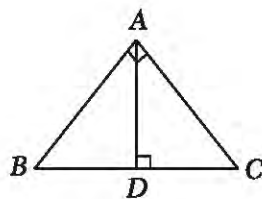
$$15. \text{令 } \overline{BD} = x, x(x + 5) = 6^2,$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 9)(x - 4) = 0, x = 4 \text{ 或 } (-9) \text{ (不合)}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC} = 5 \times 9 = 45,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



- (B) 16. 在直角坐標平面上，如果兩直線 $ax - 3y = 6$ 與 $-bx + ay = 8$ 的交點坐標為 $(3, 5)$ ，則 $a + b = ?$

(A) 15 (B) 16

(C) 17 (D) 18

$$16. \text{將 } (3, 5) \text{ 代入 } \begin{cases} ax - 3y = 6 \\ -bx + ay = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 15 = 6 \\ -3b + 5a = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 9 \end{cases}, a + b = 16$$

(A) 17. 解聯立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$, 求 $x+y=?$

- (A) $-\frac{7}{9}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{27}{9}$

17. 原式 $\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - y = 9 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 3y = -5, y = -\frac{5}{3}$
 代入 $\textcircled{2} \quad 3x + \frac{5}{3} = 9 \Rightarrow x = \frac{22}{9}, x+y = \frac{-7}{9}$

- (C) 18. 有兩種鹽酸溶液，分別含有 60% 與 40% 的鹽酸，應該各取多少公克，才能混合出含鹽酸 55% 的鹽酸溶液 400 公克呢？

- (A) 60% 的鹽酸 250 克、40% 的鹽酸 150 克
 (B) 60% 的鹽酸 150 克、40% 的鹽酸 250 克
 (C) 60% 的鹽酸 300 克、40% 的鹽酸 100 克
 (D) 60% 的鹽酸 100 克、40% 的鹽酸 300 克

18. 設取 60% 的鹽酸溶液 x 克、40% 的鹽酸溶液 y 克
 $\Rightarrow \begin{cases} x + y = 400 \\ 0.6x + 0.4y = 0.55 \times 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 400 \\ 3x + 2y = 1100 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 300 \text{ (60\% 鹽酸溶液)} \\ y = 100 \text{ (40\% 鹽酸溶液)} \end{cases}$

- (D) 19. 有一個三角形三個內角分別為 a° 、 b° 、 c° ，若 $a:b=2:3$ 、 $2b:3c=6:39$ ，求三內角的度數為何？

- (A) $a = 10^\circ$ 、 $b = 30^\circ$ 、 $c = 140^\circ$
 (B) $a = 20^\circ$ 、 $b = 40^\circ$ 、 $c = 120^\circ$
 (C) $a = 10^\circ$ 、 $b = 40^\circ$ 、 $c = 130^\circ$
 (D) $a = 20^\circ$ 、 $b = 30^\circ$ 、 $c = 130^\circ$

19. $a:b=2:3, b:c=3:13$
 $\Rightarrow a:b:c=2:3:13$
 $a = 180^\circ \times \frac{2}{2+3+13} = 20^\circ$,
 $b = 180^\circ \times \frac{3}{2+3+13} = 30^\circ$
 $c = 180^\circ \times \frac{13}{2+3+13} = 130^\circ$

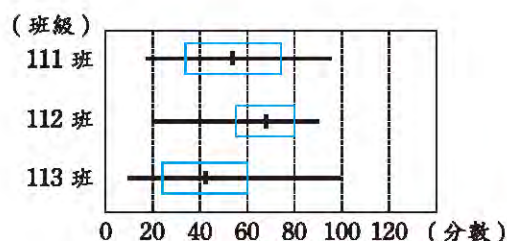
- (C) 20. 某次段考，老師說班長的成績比全班 33 位同學的平均分數多 3 分，則下列敘述何者正確？

- (A) 班長在班上的成績不可能是第 1 名
 (B) 班長在班上的成績可能是最後 1 名
 (C) 班長的成績可能比第 17 位同學的分數低
 (D) 班長成績不可能是第 23 名

20. (A) 有可能是第一名
 (B) \because 班長成績比平均分數高 3 分， \therefore 不可能是最後一名
 (C) 中位數是第 17 位同學，班長的成績有可能比他低
 (D) 班長的成績有可能是第 23 名！

- (A) 21. 右圖是 111、112、113 三個班級數學週考成績的盒狀圖，請依照圖示，判斷下列敘述何者正確？

- (A) 111 班有 50% 以上的人成績未達 60 分
 (B) 三個班級的最低分都是 20 分
 (C) 三個班級的人數皆相同
 (D) 113 班的成績差異性比 112 班的成績差異性小



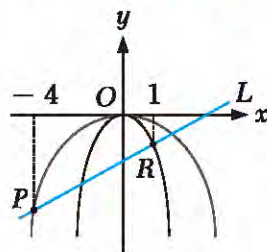
21. (B) 僅有 112 班
 (C) 無法判斷人數
 (D) 113 班比 112 班大

- (A) 22. 如右圖，直角坐標平面上有兩條拋物線 $y = -x^2$ 、 $y = -\frac{1}{4}x^2$ ， P 、 R 為直線 L 與拋物線的交點，其 x 坐標為 -4 與 1 ，則此直線 L 的方程式為何？

- (A) $5y = 3x - 8$
 (B) $5y = 3x + 8$

- (C) $y = \frac{-3}{5}x - \frac{8}{5}$
 (D) $y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$

22. 令 $R(1, t)$ 代入 $y = -x^2, t = -1 \Rightarrow R(1, -1)$
 令 $P(-4, s)$ 代入 $y = -\frac{1}{4}x^2, s = -4 \Rightarrow P(-4, -4)$
 代入 $y = ax + b$
 $\Rightarrow \begin{cases} -1 = a + b \\ -4 = -4a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{-8}{5} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{8}{5} \Rightarrow 5y = 3x - 8$



(C) 23. 下列何者為 $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 21$ 的因式?

- (A) $(x-2)$ (B) $(x+3)$ (C) $(x-6)$ (D) $(x-7)$

$$23. \frac{-1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 21 = \frac{-1}{2}(x^2 + x - 42) \\ = \frac{-1}{2}(x-6)(x+7)$$

(D) 24. 有一輛汽車行駛了 25000 公里時，車上有五個輪胎(4 個行駛、1 個備胎)恰好被均等使用，每個輪胎被使用的里程數有多少公里呢?

- (A) 5000 (B) 6250 (C) 11250 (D) 20000

$$24. \frac{25000 \times 4}{5} = 20000$$

(D) 25. 有大小兩種正方體的積木，大積木的一個面的面積是 0.36 平方公分，小積木的一個邊的長度是 0.01 公分，請問要用多少個小積木堆起來，才會和一個大積木的體積一樣大呢?

- (A) 60 (B) 360 (C) 21600 (D) 216000

$$25. \frac{\text{大積木邊長}}{\text{小積木邊長}} = \frac{\sqrt{0.36}}{0.01} = \frac{0.6}{0.01} = 60, \\ \text{體積} = 60^3 \text{ 倍} = 216000$$

(A) 26. 請計算 $1974 \times 42 + 57 \times 1974 = ?$

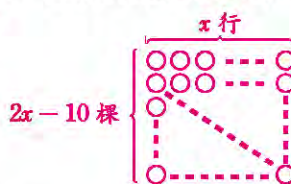
- (A) 195426 (B) 195246
(C) 195642 (D) 195462

$$26. 1974 \times (42 + 57) = 1974 \times (100 - 1) \\ = 197400 - 1974 = 195426$$

(B) 27. 伊甸園中，種了 600 顆蘋果樹，每行所種的果樹比行數的兩倍少 10，請問每行種幾顆樹?

- (A) 20 (B) 30
(C) 40 (D) 50

27.



設果園的行數為 x
每行所種的果樹為 $2x - 10$ (棵)
 $x(2x - 10) = 600, 2x^2 - 10x - 600 = 0$
 $x^2 - 5x - 300 = 0, (x - 20)(x + 15) = 0$
 $x = 20$ 或 (-15) (負不合)
 \Rightarrow 每行種了 $2 \times 20 - 10 = 30$ (棵)

(C) 28. 奇鼎國中數學段考中，小英、小鴻、小菁三人及格的機率分別為 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ ，請問至少一人及格的機率為何?

- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{14}{15}$ (D) $\frac{13}{15}$

$$28. \text{至少一人及格的機率} = 1 - (\text{三人均不及格的機率}) \\ = 1 - [(1 - \frac{3}{5})(1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{1}{2})] = 1 - (\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}) \\ = 1 - \frac{2}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

(C) 29. 若 a 、 b 均為實數， $ab > 0$ ， $a + b = 7$ ， $|a - 1| > 5$ ，則下列敘述何者正確?

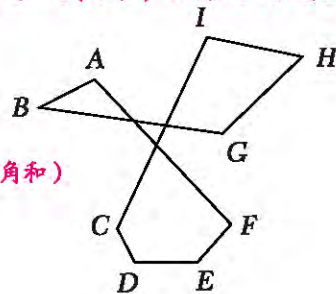
- (A) $a > 6, b > 1$ (B) $a < 6, b > 0$
(C) $a > 6, b < 1$ (D) $a < 5, b > 2$

$$29. \begin{cases} ab > 0 \\ a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b \text{ 同號} \\ a, b \text{ 均為正} \end{cases}, \text{ 又 } |a - 1| > 5 \\ \Rightarrow a > 6 \text{ 或 } a < -4 \text{ (不合)} \Rightarrow a > 6, b < 1$$

(C) 30. 如右圖，求 $\angle A \sim \angle I$ 共九個角的和為多少度呢?

- (A) 540°
(B) 720°
(C) 900°
(D) 1080°

$$30. \angle A + \angle B + \angle C + \dots + \angle I \\ = (\text{三角形內角和} + \text{五邊形內角和} + \text{四邊形內角和}) - (\text{三角形內角和}) \\ = (180^\circ + 540^\circ + 360^\circ) - 180^\circ = 900^\circ$$



(A) 31. 如右圖，兩弦 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 E 點， $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，且 $\angle BEC = 140^\circ$ ，則 $\angle ACD = ?$

- (A) 120°
(B) 115°
(C) 110°
(D) 105°

$$31. \text{設 } \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = x^\circ \\ \text{則 } \widehat{AD} = 360 - 3x^\circ \\ \therefore \angle BEC = 140^\circ \\ \therefore \frac{1}{2}(360 - 3x^\circ + x^\circ) = 140, x = 40^\circ \\ \angle ACD = \frac{1}{2}(360^\circ - 3x^\circ) = 120^\circ$$

