Unit 9 二次方根與商高定理

能力指標：◎（N-4-01）能理解二次方根的意義。
◎（N-4-01）能求二次方根的近似值。
◎（N-4-02）能理解二次方根最簡式的意義，並做化簡。
◎（N-4-02）能理解二次方根的加、減、乘、除規則。
◎（N-4-02、A-4-01）能理解簡單根式的化簡及有理化。
◎（S-4-08、A-4-03）能理解勾股定理（商高定理）。
◎（S-4-05、A-4-03）能由簡單面積計算導出勾股定理。
◎（S-4-05、A-4-03）能理解勾股定理的應用。

能力一：二次方根的意義與化簡

一、二次方根(平方根)

一個數 a 是另一個數 b 的平方，記作：$b^2=a$，亦即 b 是 a 的二次方根或稱為平方根。一個正數 a 的平方根有兩個，記作：$\pm\sqrt{a}$。

二、二次方根的性質（$a\in$ ¡ ）

屬　性	狀　　態	備　　註
$a>0$	$\pm\sqrt{a}$	2 個平方根
$a=0$	$\sqrt{0}=0$	1 個平方根 0
$a<0$	沒有平方根	負數沒有平方根
$a\geq 0$	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert=\left(\sqrt{a}\right)^2$	

三、二次方根的乘、除法

（一）乘法（當 $a\geq 0, b\geq 0$）$\Rightarrow \boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$

假設 $x=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\Rightarrow x^2=\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2=a\times b=ab\Rightarrow x=\sqrt{ab}\quad \therefore \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

（二）除法（當 $a\geq 0, b>0$）$\Rightarrow \boxed{\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b} \text{ 或 } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$

假設 $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad \therefore \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

（三）其它

1.當 $a \ge 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 b}=a\sqrt{b}$

2.當 $a \ge 0, b>0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$

3.當 $a \in \mathbb{R}$，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (當a \ge 0) \\ -a & (當a<0) \end{cases}$

4.當 $a, b \in \mathbb{R}$，$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=\begin{cases} (a-b) & (當a \ge b) \\ (b-a) & (當\ a<b) \end{cases}$

5.當 $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=0 \Leftrightarrow |a|+|b|=0 \Rightarrow a=0, b=0$

【平方根的性質】
講解一：

（1）$\frac{4}{49}$ 的平方根為何呢？ （2）$9\frac{1}{25}$ 的平方根為何呢？

Sol)

（1）$\frac{4}{49}$ 的平方根為$\pm\sqrt{\frac{4}{49}}=\pm\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\pm\frac{2}{7}$

（2）$9\frac{1}{25}$ 的平方根為$\pm\sqrt{9\frac{1}{25}}=\pm\sqrt{\frac{226}{25}}=\pm\frac{\sqrt{226}}{5}$

練習一：
（1）a 的平方根為±2，則 a＝？（2）1296 的平方根等於多少呢？
Sol)
（1）$\because a=(\pm 2)^2=4 \quad \therefore a=4^2=16$

（2）$\because 1296=36^2, \therefore 1296$的平方根亦即36的平方根$=\pm\sqrt{36}=\pm 6$

【平方根的計算與比較大小】
講解二：

（1）試求 $\sqrt{2\frac{1}{4}}-\sqrt{18\frac{1}{16}}+\sqrt{2\frac{34}{81}}=$？

（2）試比較 $a=\sqrt{\frac{4}{3}}, b=\sqrt{\frac{5}{4}}, c=\sqrt{\frac{9}{7}}$ 的大小為何呢？

Sol)

（1）$\sqrt{2\frac{1}{4}}-\sqrt{18\frac{1}{16}}+\sqrt{2\frac{34}{81}}=\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{289}{16}}+\sqrt{\frac{196}{81}}=\frac{3}{2}-\frac{17}{4}+\frac{14}{9}$

$=\frac{3\times18-17\times9+14\times4}{36}=\frac{-43}{36}$

（2）$a=\sqrt{\frac{4}{3}}$, $b=\sqrt{\frac{5}{4}}$, $c=\sqrt{\frac{9}{7}}\Rightarrow\frac{4}{3}>\frac{9}{7}>\frac{5}{4}\Rightarrow\sqrt{\frac{4}{3}}>\sqrt{\frac{9}{7}}>\sqrt{\frac{5}{4}}\Rightarrow a>c>b$

練習二：

（1）試求 $\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{2}=$ ？

（2）已知 a、b、c 均大於 0，若 $a\times\frac{7}{\sqrt{11}}=b\times\frac{\sqrt{7}}{11}=c\times\sqrt{\frac{7}{11}}$ ，試問 a、b、c 的大小為何呢？

Sol)

（1）$\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}$

$=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{10}-5\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

（2）$\left(\frac{7}{\sqrt{11}}\right)^2=\frac{49}{11},\ \left(\frac{\sqrt{7}}{11}\right)^2=\frac{7}{121},\ \left(\sqrt{\frac{7}{11}}\right)^2=\frac{7}{11}$

$\because\ \frac{49}{11}>\frac{7}{11}>\frac{7}{121}\Rightarrow a<c<b$

【十分鐘即時練習】

（D）1.求 $\frac{(3-5)^2+|-5-8|}{\sqrt{9-(-7)}}=$ ？(A)$\frac{7}{2}$　(B)$\frac{15}{2}$　(C)$\frac{9}{4}$　(D)$\frac{17}{4}$

Sol) 原式$=\frac{(-2)^2+|-13|}{\sqrt{16}}=\frac{4+13}{4}=\frac{17}{4}$

（C）2.下列有關平方根的敘述何者正確？(A)∵（±2）^{2}＝4　∴$\sqrt{4}$＝±2　(B)若a為b的平方根，則a＝b^2　(C)625的平方根為±5　(D)－16的平方根為±4

Sol) (A) $\sqrt{4}=2$ ；(B)b＝a^2；(C) 625 的平方根即是 25 的平方根$=\pm\sqrt{25}=\pm5$ ；(D) －16 沒有平方根。

（A）3.若$\sqrt{10-a}$為整數，則正整數 a 之值有多少個？　(A) 4 個(B) 3 個(C) 2 個(D) 1 個。

Sol) ∵ $\sqrt{10-a}$ 為整數，∴10－a＝0^2　∴a＝10，10－a＝1^2

∴a＝9，10－a＝2^2　∴a＝6，10－a＝3^2　∴a＝1　∴a 值共有 4 個

（C）4.若－3 為 3a＋b＋1 之一個平方根，且 a＋2b＋3 之平方根為±2，則 a－b 之平方根為　(A) 2 (B) 4 (C) ±2 (D) ±4。

Sol) $\begin{cases} 3a+b+1=(-3)^2=9 \\ a+2b+3=(\pm 2)^2=4 \end{cases} \Rightarrow a=3，b=-1$

（C）5.欲使$\sqrt{7b}$及 b 均為二位正整數，則 b 可為下列何數？　(A) 18 (B) 20 (C) 28 (D) 30。

Sol) (A) 7×18＝126 非完全平方數；(B) 7×20＝140 非完全平方根；(C) 7×28＝196＝14^2；(D) 7×30＝210 非完全平方數。

能力二：二次方根的近似值

一、二次方根的近似值

當一個大於 0 且非完全平方的數 a，將其開根號後，所得到的數值皆為無理數，亦即為一個不循環且無限的小數，因此，我們可以求其近似值代表該二次方根。

二、求近似值的方式

（一）使用計算機（常用，快速簡易，考試幾乎不考！）

簡易型計算機求正平方根的步驟：①先按所要開平方的數，②再按『$\sqrt{\ }$』鍵。即可得到近 8 位以上的近似值（視計算機的機型而定）。

eg:求 21 的平方根：在計算機上按『21』，在按『$\sqrt{\ }$』可得⇒ 4.5825756 ，此數為$\sqrt{21}$的近似值。

（二）使用乘開方表（平時幾乎不用，僅有基測會考！）

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	N^3
55	3025	7.416198	23.45208	166375
56	3136	7.483315	23.66432	175616
57	3249	7.549834	23.87467	185193
58	3364	7.615773	24.08319	195112

N	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
55	3.802952	8.193213	17.65174
56	3.825862	8.242571	17.75808
57	3.848501	8.291344	17.86316
58	3.870877	8.339551	17.96702

eg:由上表可查$\sqrt{56}$ B 7.483315，$\sqrt{570}$ B 23.87467 ，$58^2=3364$

（三）十分逼近法（一般考試都會考！）

若 a、x、b 皆為正數，則$a^2<x<b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2}<\sqrt{x}<\sqrt{b^2} \Leftrightarrow a<\sqrt{x}<b$

eg:試求$\sqrt{56}$的近似值到小數第一位？

$7^2<56<8^2 \Rightarrow \sqrt{7^2}<\sqrt{56}<\sqrt{8^2} \Rightarrow 7<\sqrt{56}<8$，

$7.4^2<56<7.5^2 \Rightarrow \sqrt{7.4^2}<\sqrt{56}<\sqrt{7.5^2} \Rightarrow 7.4<\sqrt{56}<7.5$

【方根與近似值】

講解一：

（1）已知$\sqrt{8}$ B 2.828, $\sqrt{80}$ B 8.944, 則$\sqrt{0.08}$ B？

（2）滿足$9\le\sqrt{n}<19$的正整數 n 有多少個呢？

Sol)

（1）Q $\dfrac{0.08}{8}=0.01$, $\therefore \sqrt{0.08}$ B $2.828\times\sqrt{0.01}=0.2828$

（2）Q $9\le\sqrt{n}<19 \Rightarrow 81\le n<361$

$\therefore$ n有361-81=280(個)

練習一：

（1）已知 72 的正平方根$\sqrt{72}$ B 8.485，請問哪一個數的正平方根為 0.8485 呢？

（2）已知$(4.24)^2=17.9776$, $(4.25)^2=18.0625$, $(4.243)^2=18.003045$，請利用四捨五入法求$\sqrt{18}$的近似值到小數第二位的結果為何呢？

Sol)

（1）$0.8485\div8.485=0.1 \Rightarrow$ 該數為$=72\times(0.1)^2=0.72$

Q 17.9776<18<18.0625 $\Rightarrow$ $(4.24)^2<\left(\sqrt{18}\right)<(4.25)^2$

（2）∴ 4.24<$\sqrt{18}$<4.25

Q $(4.243)^2$ =18.003045>18, ∴ $\sqrt{18}$<4.243 $\Rightarrow$ $\sqrt{18}$ B 4.24

【十分鐘即時練習】

（D）1.已知23＝4.79583，230＝15.16575，則$\sqrt{0.023}$＝？(A)0.0479583 (B)0.00479583 (C)1.516575 (D)0.1516575

Sol) $\sqrt{0.023}$ ＝$\sqrt{\dfrac{230}{10000}}$ ＝$\dfrac{\sqrt{230}}{100}$ ＝0.156575

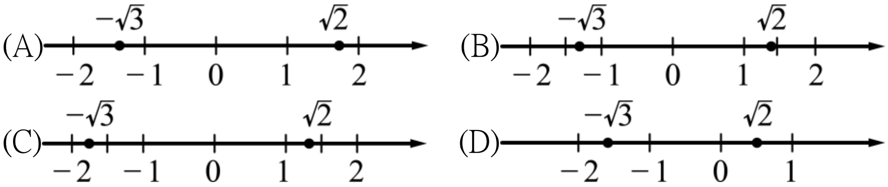
（D）2.已知滿足5≦x＜5.7的正整數x中最大值為a，最小值為b，若c亦為正整數，且使得$\sqrt{\dfrac{ac}{b}}$為整數，則c的最小值為何？(A)47 (B)48 (C)49 (D)50

Sol) 6^2≦（x）^{2}＜（5.7）^{2}，25≦x＜32.49，∴a＝32，b＝25，$\sqrt{\dfrac{ac}{b}}$ ＝$\sqrt{\dfrac{32c}{25}}$ 為整數，則 c＝25×2＝50

（A）3.滿足$\sqrt{87}$＜x＜$\sqrt{1998}$的整數x的個數為何？(已知$\sqrt{87}$ B 9.3274，$\sqrt{1998}$ B 44.6990） (A)35 (B)36 (C)37 (D)38

Sol)∵$\sqrt{87}$ B 9.3274，$\sqrt{1998}$ B 44.6990，9＜x＜45，∴整數 x 有 45－9－1＝35(個)

（C）4.試問-$\sqrt{3}$與$\sqrt{2}$在數線上的相對位置，下列那一選項較合理?



Sol) ∵3＝1.732… ∴－2＜－3＜－1.5，又∵2＝1.414… ∴1＜2＜1.5

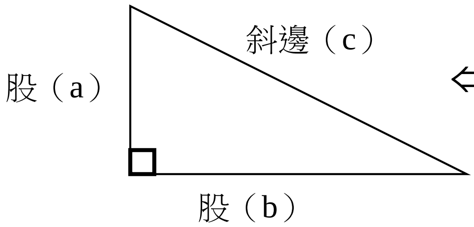
（A）5.已知$\sqrt{21}$＝4.5826， $\sqrt{2.1}$＝1.4491，則$\sqrt{210}$＝？(A)14.491 (B)45.826 (C)0.45826 (D)0.14491

Sol)∵$\sqrt{210}$ ＝$\sqrt{2.1\times100}$ ＝$\sqrt{2.1}$ ×10＝1.4491×10＝14.491

能力三：商高定理與應用

一、商高定理（畢氏定理）

若一個三角形有一內角是直角（Right Angle=90°），則此三角形為直角三角形，必符合下列規則：$\boxed{\text{兩股平方和等於斜邊的平方}}$。



$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

二、已知有一直角三角形的兩股為 a、b，斜邊為 c，則：

(1) $c^2 = a^2 + b^2 \;\Leftrightarrow\; c = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) $a^2 = c^2 - b^2 \;\Leftrightarrow\; a = \sqrt{c^2 - b^2}$

(3) $b^2 = c^2 - a^2 \;\Leftrightarrow\; b = \sqrt{c^2 - a^2}$

三、商高數

（一）商高數是指直角三角形三邊長皆為整數形式，常見的商高數如下所示：（3、4、5）、（5、12、13）、（7、24、25）、（8、15、17）、（9、40、41）、（20、21、29）等等，請同學要熟記上面之商高數，可省去許多繁雜的計算。如果不想死記，也可參考（二）商高數之通式。

（二）商高數之通式：

$\left(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2\right)$，其中 $m > n > 0$

【商高定理】

講解一：

（1）已知直角三角形的兩邊長分別為 6 和 8，試求第三邊的長為何呢？

（2）△ABC 中，∠C＝90°，以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 為邊長的兩正方形面積分別是 169cm^2、25cm^2，則 AC 多少 cm？

Sol)

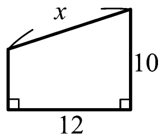
（1）第三邊=$\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=10$，若第三邊是其中一股，則 $\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，Ans：10 或 $2\sqrt{7}$

（2）$\because \angle C = 90° \therefore \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$，$169 = 25 + \overline{AC}^2$，$\therefore \overline{AC}^2 = 169 - 25$，$\overline{AC} = 12$

練習一：

（1）設矩形面積為120平方公分，寬為8公分，則對角線長是多少公分？

（2）右圖中的x值為何呢？

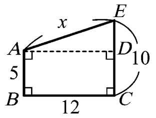


Sol)

（1）長方形的長＝120÷8＝15　∴對角線＝$\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$

（2）如圖，過A點作 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{CE}$ ，則 $\overline{AD}=\overline{BC}=12$ ，$\overline{ED}=10-5=5$ ，

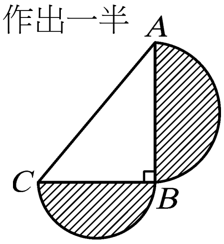
故 $x=\sqrt{5^2+12^2}=13$



【商高定理的應用】

講解二：

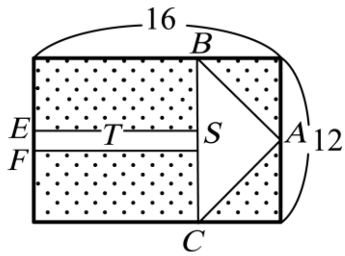
如圖，在△ABC 中，$\overline{AC}$ ＝10，∠B＝90°，若以 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 為直徑各自作出一半圓，則斜線部分面積共多少平方單位？



Sol) 斜線部分面積＝以 $\overline{AC}$ 為直徑的半圓面積　$\therefore \frac{1}{2}\times(\frac{10}{2})^2\pi=\frac{25}{2}\pi$

練習二：

如圖，橙果園藝公司設計一長方形庭園，其中長方形庭園長 16 公尺，寬 12 公尺，在其內部規劃 S 區（△ABC 為等腰直角三角形）為觀賞休憩區，T 區（長方形區域）為人行步道區，使得剩餘的花草區的面積為 141 平方公尺，試問 T 區的寬度（$\overline{EF}$）是多少公尺？



Sol)△ABC 為等腰直角三角形，則 $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{12}{\sqrt{2}}$ ＝62，

△ABC 面積為 $\frac{6\sqrt{2}\times6\sqrt{2}}{2}$ ＝36，

△ABC 中，$\overline{BC}$ 上的高為 $\frac{6\sqrt{2}\times6\sqrt{2}}{12}$ ＝6，16－6＝10，

則 16×12－36－10×$\overline{EF}$＝141，10×$\overline{EF}$＝15，$\overline{EF}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$

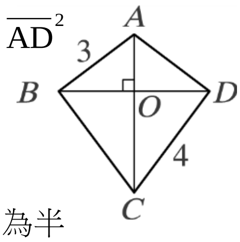
【十分鐘即時練習】

（B）1.已知直角三角形中，兩股長的平方和等於斜邊長的平方。若一直角三角形的兩股長各為 2 公分及 3 公分，且斜邊長為 a 公分，則下列那一個選項是正確的？(A)3.0＜a＜3.5　(B)3.5＜a＜4.0　(C)4.0＜a＜4.5　(D)4.5＜a＜5.0

Sol) a=$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ B3.6

（D）2.直角三角形之兩股長的比為3：4，且其周長為72公分，則三角形斜邊上的高為下列何者？(A)$\frac{12}{5}$公分　(B)$\frac{24}{5}$公分　(C)$\frac{36}{5}$公分　(D)$\frac{72}{5}$公分

Sol)設兩股分別為 3r，4r，則斜邊長為 5r，又 3r+4r+5r＝72，∴r＝6，故斜邊上高＝$\frac{3r \cdot 4r}{5r}$ ＝$\frac{12r}{5}$ ＝$\frac{72}{5}$ (公分)

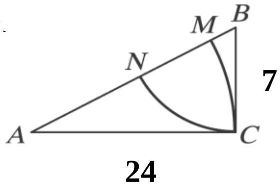


（C）3.如圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$於 O，$\overline{AB}$＝3，$\overline{CD}$＝4，求$\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$＝？　(A) 7 (B) 16 (C) 25 (D) 36。

Sol) $\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=\overline{BO}^2+\overline{CO}^2+\overline{AO}^2+\overline{DO}^2$

$=(\overline{BO}^2+\overline{AO}^2)+(\overline{CO}^2+\overline{DO}^2)=3^2+4^2=25$

（D）4.如圖，在直角△ABC 中，兩股長為 7 和 24，分別以 A 為圓心，24 為半徑，以 B 為圓心，7 為半徑畫弧，交斜邊於 M、N，則$\overline{MN}$的少？　(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。



Sol)$\sqrt{7^2+24^2}$ ＝25，7+24-25＝6

（C）5.一個三角形邊長為 $10\frac{1}{2}$，10，$10\frac{9}{2}$，則此三角形的面積為　(A)$\frac{75}{2}$平方單位(B) 75 平方單位(C)$\frac{105}{2}$平方單位(D) 105 平方單位。

Sol) $10\frac{1}{2}:10:10\frac{9}{2}=\frac{21}{2}:\frac{20}{2}:\frac{29}{2}=21:20:29$，∵ $21^2+20^2=29^2$

∴為直角△，面積＝$10\frac{1}{2}\times10\times\frac{1}{2}=\frac{75}{2}$

【基本觀念題】

（B）1.敘述甲：－8是64的平方根；乙：－12是－144的平方根；丙：0.3是0.9的平方根；丁：$-\frac{4}{5}$是$\frac{16}{25}$的平方根；以上四個敘述中，正確的有幾個？

(A)1個　(B)2個　(C)3個　(D)4個

Sol)∵$(-8)^2$＝64　∴－8 是 64 的平方根：甲是正確的敘述

∵$(-12)^2$＝144　∴－11 不是－144 的平方根：乙是錯誤的敘述

∵0.3^2＝0.09　∴0.3 不是 0.9 的平方根：丙是錯誤的敘述

∵$(-\frac{4}{5})^2=\frac{16}{25}$　∴$-\frac{4}{5}$ 是$\frac{16}{25}$ 的平方根：丁是正確的敘述

故正確的敘述有 2 個。

（D）2.下列何者正確？(A) $\sqrt{169}$ ＝±13　(B) $\sqrt{(-4)^2}$ ＝－4　(C) $\sqrt{9\frac{4}{25}}=3\frac{2}{5}$

(D) $-\sqrt{(-11)}$=-11

Sol)選項中（A）$\sqrt{169}$=13，（B）$\sqrt{(-4)^2}=|-4|=4$，（C）$\sqrt{9\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{229}{25}}=\frac{\sqrt{229}}{5}$，

（D）$-\sqrt{(-11)}=-|-11|=-11$

（B）3.請問 $\frac{4}{49}$ 的平方根是下列那一個選項？(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\pm\frac{2}{7}$ (C) $\sqrt{\frac{4}{49}}$ (D) $-\sqrt{\frac{4}{49}}$

Sol) $\frac{4}{49}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{\frac{4}{49}}=\pm\sqrt{\frac{2^2}{(7)^2}}=\pm\frac{2}{7}$

（D）4. 請問 $9\frac{1}{25}$ 的平方根為何呢？(A) $3\frac{1}{5}$　(B) $-3\frac{1}{5}$　(C) $\pm3\frac{1}{5}$　(D)以上皆非

Sol) $9\frac{1}{25}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{9\frac{1}{25}}=\pm\sqrt{\frac{226}{25}}=\pm\frac{\sqrt{226}}{5}$

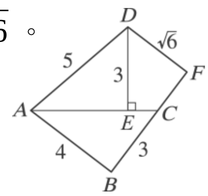
（D）5.若 a＝3＝1.732……，則 a 與 1.732 的大小為何？(A)a＜1.732　(B) a≤1.732　(C)a=1.732　(D) a＞1.732

Sol) ∵1.732……＞1.732　∴a＞1.732

（A）6.假設8是3x＋1的平方根，則下列何者是x的值呢？(A)21(B)25(C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{17}{3}$

Sol) $3x+1=8^2$，$3x+1=64$，$3x=63$　∴$x=21$

（B）7.如圖，$\overline{AB}\perp\overline{BF}$，$\overline{DF}\perp\overline{BF}$，$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AD}=5$，$\overline{DE}=3$，$\overline{DF}=\sqrt{6}$，求 $\overline{CF}$＝？　（A）$\sqrt{3}$（B）2（C）$\sqrt{5}$（D）$\sqrt{6}$。

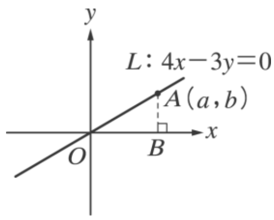


Sol) $\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\overline{AE}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\overline{EC}=5-4=1$　∴$\overline{DC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow\overline{CF}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{4}=2$

（A）8.如圖，坐標平面上點 A（a，b）在直線 L：4x－3y＝0 上，$\overline{AB}\perp$ x 軸於 B 點。若△AOB 面積為 84 平方單位，則△AOB 周長為多少單位長？　(A) $12\sqrt{14}$ (B) $12\sqrt{12}$ (C) $6\sqrt{14}$ (D) $6\sqrt{12}$。



Sol) A（a，b）代入 4a－3b＝0，$a=\frac{3}{4}b$

⇒△AOB 面積＝$\frac{1}{2}\times a\times b=84$，$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}b\times b=84$

$b=\pm4\sqrt{14}$（負不合）　∴$a=\frac{3}{4}\times4\sqrt{14}=3\sqrt{14}$

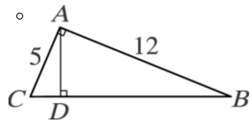
∴$\overline{OA}=\sqrt{(3\sqrt{14})^2+(4\sqrt{14})^2}=5\sqrt{14}$ ∴周長＝$3\sqrt{14}+4\sqrt{14}+5\sqrt{14}=12\sqrt{14}$

（B）9.設一直角三角形的斜邊長為 a^2+b^2，一股長為 2ab，則另一股長為　(A) a^2-b^2 (B) $|a^2-b^2|$ (C) $(a^2-b^2)^2$ (D) a^2-ab+b^2。

sol) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(2ab)^2}=\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}$

$=\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4}=\sqrt{(a^2-b^2)^2}=|a^2-b^2|$

（C）10.在△ABC 中，∠A＝90°，$\overline{AB}=12$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於 D，則下列何者錯誤？ (A) $\overline{BC}=13$ (B) $\overline{AD}=\frac{5\times12}{13}$ (C) $\overline{CD}=4$ (D) $\overline{BD}=\frac{144}{13}$。

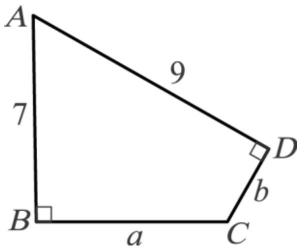


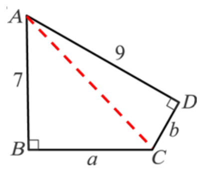
Sol) (A) $\overline{BC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，(B) $\overline{AD}=\frac{5\times12}{13}$ (C) $\overline{CD}\times13=5^2$，$\overline{CD}=\frac{25}{13}$，

(D) $\overline{BD}\times13=12^2$ $\therefore\overline{BD}=\frac{144}{13}$

【溫故歷屆基測試題】

（B）1.如圖，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$、$\overline{AD}\perp\overline{CD}$，且$\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CD}=b$、$\overline{AD}=9$，求（a＋b）（a－b）＝？ （A）16（B）32（C）63（D）130。【95.基測二】

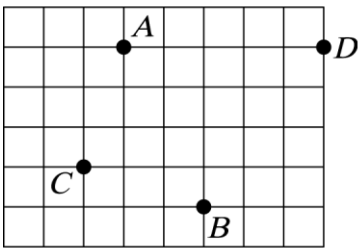




Sol)連接$\overline{AC}$，在△ABC 中，$\overline{AC}^2=7^2+a^2$，在△ADC 中，$\overline{AC}^2=9^2+b^2$，

$\therefore 7^2+a^2=9^2+b^2,\ a^2-b^2=9^2-7^2=32$

（A）2.如圖為 A、B、C、D 四點在方格紙上的位置圖，其中每一點均位於某兩線的交點上。關於△ABC 與△ABD 的形狀，下列判斷何者正確？ （A）兩個都是等腰三角形（B）兩個都不是等腰三角形（C）△ABC 是等腰三角形，△ABD 不是等腰三角形（D）△ABC 不是等腰三角形，△ABD 是等腰三角形。【95.基測二】



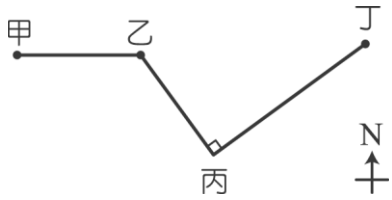
Sol) $\triangle ABC$中, $\overline{AB}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20},\ \overline{AC}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},\ \overline{BC}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},$

$\Rightarrow\triangle ABC$為等腰直角三角形,

$\triangle ABD$中, $\overline{AB}=\sqrt{20},\ \overline{AD}=5,\ \overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5\Rightarrow\triangle ABD$為等腰三角形

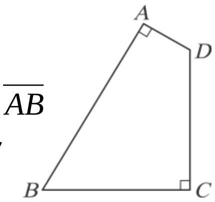
（C）3.如圖，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，

朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可到達丁地，則此車程需多少分鐘？ （A）19.5（B）24（C）25（D）28。【94.基測二】



Sol) ∵ 等速度，∴距離比 = 時間比，

乙到丁的時間 $= \sqrt{8^2+15^2} = 17$，∴甲到丁的時間 $= 8+17=25$

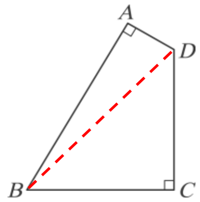


（B）4.如圖，$ABCD$ 為一四邊形，$\angle A = \angle C = 90^\circ$，$\overline{BC} = \overline{CD} = 5$、$\overline{AD} = 2$，$\overline{AB}$ 的長會落在下列哪一個範圍內？ （A）$5 < \overline{AB} < 6$（B）$6 < \overline{AB} < 7$（C）$7 < \overline{AB} < 8$（D）$8 < \overline{AB} < 9$。【91.基測二】

Sol) 連接 $\overline{BD}$，在 $\triangle BCD$ 中，$\overline{BC} = \overline{CD} = 5$，$\overline{BD} = \sqrt{50}$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{46}$，

$6^2 < 46 < 7^2$，$6 < \sqrt{46} < 7$



（C）5.下列有關 $\sqrt{10}$ 的敘述，何者<u>不正確</u>？ （A）$\sqrt{10}$ 是方程式 $x^2 = 10$ 的一個解（B）在數線上可以找到坐標為 $\sqrt{10}$ 的點（C）$\sqrt{10} = 2\sqrt{5}$（D）$\sqrt{10} < 4$。【92.基測一】

Sol) (A) $x^2 = 10$，$x = \pm\sqrt{10}$

(B) 在數線上可以找到座標為 $\sqrt{10}$ 的點

(C) $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$

(D) $\sqrt{10} = 3.26\ldots$

（C）6.比較 $\dfrac{5}{2}$，$\sqrt{\dfrac{5}{2}}$，$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 四數的值，何者最大？

（A）$\dfrac{5}{2}$（B）$\sqrt{\dfrac{5}{2}}$（C）$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。【92.基測二】

Sol)

$(A)\dfrac{5}{2} = \sqrt{\dfrac{25}{4}}$，$(B)\sqrt{\dfrac{5}{2}}$，$(C)\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{25}{2}}$，$(D)\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$，

$\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ 最大

【模擬學力基測試題】

（C）1.下列敘述何者錯誤呢？(A)395 的正平方根比 20 小　(B)15 的正平方根介於 3 與 4 之間　(C)235 的正平方根比 15 小　(D)441 的平方根為±21

Sol) (A)$\because 20^2 = 400 > 395$　$\therefore 395 < 20$

(B)$\because 3^2 = 9 < 15$，$4^2 = 16 > 15$　$\therefore 3 < \sqrt{15} < 4$，故選項(B)為錯誤的選項

(C)$\because 15^2 = 225 < 235$　$\therefore 235 > 15$

(D)441 的平方根為 $\pm\sqrt{441} = \pm 21$

（C）2.若ab＞0，則下列何者正確？(A)$\sqrt{a}+\sqrt{b} = |a+b|$ (B) $\sqrt{a}=a$

(C)$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$　(D) $\sqrt{a}+\sqrt{b} = a+b$

Sol)　(A)$\because a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$　$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b} \neq |a+b|$ (B) $\sqrt{a} = |a| \neq a$

(C)$\sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|} = \sqrt{|a| \times |b|} = \sqrt{ab}$

(D) $\sqrt{a}+\sqrt{b} = |a|+|b| \neq a+b$

（D）3.已知$b^2 = 625$，$b > 0$，則b的平方根為何呢？(A)25　(B)±25　(C)5　(D)±5

Sol) $\because b^2 = 625 = 25^2$且$b > 0$　$\therefore b = 25$，b的平方根為 $\pm\sqrt{25} = \pm 5$

（A)滿足$\sqrt{87} < x < \sqrt{1998}$的整數x的有多少個呢？(A)35　(B)36　(C)37　(D)38

sol) $\because 9^2 = 81 < 87$，$10^2 = 100 > 87$　$\therefore 9 < \sqrt{87} < 10$，又$44 < \sqrt{1998} < 45$

$\therefore 9\ldots\ldots < x < 44\ldots\ldots \Rightarrow$ x 的整數值共有 $44 - 9 = 35$ (個)

（C）4.請問2401的平方根等於多少呢？(A)±49　(B)49　(C)±7　(D)7

Sol) $\because 2401 = 7^4$ $\therefore 2401 = 49^2$，2401 的平方根即為 49 的平方根為±7

（A）5.若 x＋y 的負平方根是－3，且 x－y 的正平方根是 5，求 x＋y＝？

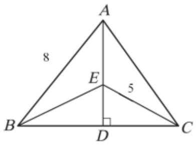
(Ａ)9(Ｂ)8(Ｃ)7(Ｄ)6。

Sol) $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=25 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=17 \\ y=-8 \end{cases}$，$x+y = 17-8 = 9$

（B）6.家齊在電算器依序按下 $\boxed{12} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }}$，結果顯示出 3.4641，若他改按 $\boxed{3} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }}$，則會顯示下列哪個數值？　(Ａ)0.86602　(Ｂ)1.73205　(Ｃ)1.4641　(Ｄ)1.12414。

Sol) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} = 3.4641$　$\therefore \sqrt{2} = 1.73205$

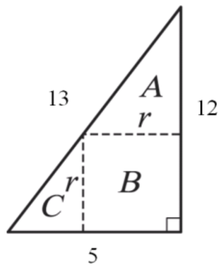
（D）7.如圖，△ABC 中，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D，E 是 $\overline{AD}$ 上的任一點，已知 $\overline{AB} = 8$，$\overline{CE} = 5$，求 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2$ 之值為何？（A）86（B）87（C）88（D）89。



Sol) 由商高定理可知 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = 64 + 25 = 89$

（A）8.有一直角三角形，其兩股長分別為 6cm、8cm，現欲從這個直角三角形

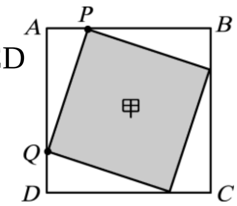
中剪下一個最大的正方形，則此正方形的邊長是多少 cm？（A）$\frac{50}{17}$（B）$\frac{50}{19}$（C）$\frac{60}{17}$（D）$\frac{60}{19}$



Sol)令此正方形的邊長為 r，則直角三角形面積＝$\frac{5\times 12}{2}$＝30＝A＋B＋C

則$\frac{(12-r)\ \cdot r}{2}+r^2+\frac{(5-r)\ r}{2}=30$，$12r-r^2+2r^2+5r-r^2=60$

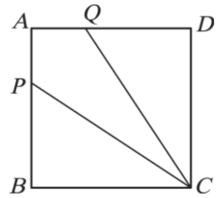
$17r=60\Rightarrow r=\frac{60}{17}$



（A）9.已知正方形甲是面積為 841 平方公分，若$\overline{AP}$＝10 公分，則正方形 ABCD 的面積為何？（A）1681（B）1156（C）1074（D）981。

sol)甲的邊長＝$\sqrt{841}$＝29，則$\overline{AQ}=\sqrt{29^2-20^2}$＝21，

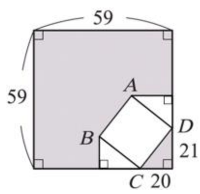
$\overline{AD}=\overline{AB}$＝20＋21＝41，⇒面積＝$41^2$＝1681



（C）10.如圖，正方形 ABCD 的邊長為 15，$\overline{CP}$和$\overline{CQ}$將此正方形面積分成三等分，則$\overline{CP}$＝？（A）$5\sqrt{35}$（B）$\sqrt{315}$（C）$5\sqrt{13}$（D）$3\sqrt{15}$。

Sol) $\frac{15^2}{3}$＝75，15．$\overline{PB}$＝75×2，$\overline{PB}$＝10，則$\overline{PC}=\sqrt{10^2+15^2}=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$

【進階練習題】



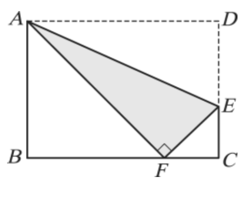
（C）1.如圖，四邊形 ABCD 為一正方形，則灰色部分的面積為何？
（A）2430（B）2530（C）2535（D）2540

Sol) $\overline{CD}=\sqrt{20^2+21^2}$＝29

灰色面積＝59^2－（29）^{2}－2×$\frac{20\times 21}{2}$＝（59＋29）（59－29）－210

＝88×30－105＝2535

（B）2.如圖，矩形 ABCD 中，$\overline{AB}$＝15，$\overline{AD}$＝17，今將其折疊，使頂點 D 落在$\overline{BC}$上一點 F，請問$\overline{BF}+\overline{EF}$=？（A）16.2（B）18.2（C）20.2（D）22.2



Sol)$\overline{AF}=\overline{AD}$＝17　∴$\overline{BF}=\sqrt{17^2-15^2}$＝8

設$\overline{EF}$＝x，則$\overline{DE}$＝x，$\overline{CE}$＝15－x，又$\overline{CF}$＝17－8＝9

∴在△CEF 中，x^2＝（15－x）^{2}＋9^2＝225－30x＋x^2＋81

30x＝306，x＝$\frac{102}{10}$＝10.2，$\overline{BF}+\overline{EF}$=18.2

（D）3 若$\sqrt{3}$≒1.732，$\sqrt{7}$≒2.645，試求$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$＝？（請四捨五入至小數第二位）（A）1.915（B）-1.915（C）1.73（D）-1.73

Sol) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$＝-1.73

（D）4.請化簡$\frac{(-3)^{11}}{-3^8}-\sqrt{(-33)^2}-\frac{-5^4}{(-5\sqrt{5})^2}+(-\frac{7}{9})\div\frac{7}{6}=$？（A）$\frac{1}{3}$（B）$\frac{-1}{3}$（C）$\frac{5}{3}$（D）$\frac{-5}{3}$

Sol) $\frac{(-3)^{11}}{-3^8}$-33+$\frac{5^4}{25\cdot 5}$+(-$\frac{7}{9}$)×$\frac{6}{7}$＝3^3-33+5+(-$\frac{2}{3}$)=27-33+5-$\frac{2}{3}$＝$\frac{-5}{3}$

（A）5.若 a＝$\sqrt{12}+\sqrt{7}$，b＝$\sqrt{11}+\sqrt{8}$，則 b^2-a^2＝？（A）4($\sqrt{22}-\sqrt{21}$)（B）-4($\sqrt{22}-\sqrt{21}$)（C）2($\sqrt{22}-\sqrt{21}$)（D）-2($\sqrt{22}-\sqrt{21}$)

Sol) b^2-a^2＝$(\sqrt{11}+\sqrt{8})^2-(\sqrt{12}+\sqrt{7})^2$＝11+8+2$\sqrt{88}$-(12+7+2$\sqrt{84}$)
＝2$\sqrt{88}$-2$\sqrt{84}$＝4$\sqrt{22}$-4$\sqrt{21}$= 4($\sqrt{22}-\sqrt{21}$)

（B）6.請計算$(11+\sqrt{119})^6\times(11-\sqrt{119})^7$＝？（A）22+2$\sqrt{119}$（B）22-2$\sqrt{119}$（C）-22+2$\sqrt{119}$（D）-22-2$\sqrt{119}$

Sol)∵(11＋$\sqrt{119}$)×(11－$\sqrt{119}$)＝$11^2-\left(\sqrt{119}\right)^2$＝121－119＝2

∴原式＝（11＋$\sqrt{3}$）^{6}×（11－$\sqrt{3}$）^{6}×（11－$\sqrt{3}$）＝2×(11－$\sqrt{119}$)＝22-2$\sqrt{119}$

（C）7.設 a＝$\sqrt{17}-\sqrt{3}$，b＝$\sqrt{13}-\sqrt{7}$，c＝$\sqrt{15}-\sqrt{5}$，比較 a、b、c 的大小關係為何？（A）a＜b＜c（B）a＜c＜b（C）b＜c＜a（D）c＜a＜b

Sol) a^2＝（$\sqrt{17}-\sqrt{3}$）^{2}＝17-2$\sqrt{51}$＋3＝20-2$\sqrt{51}$
b^2＝（$\sqrt{13}-\sqrt{7}$）^{2}＝13-2$\sqrt{91}$＋7＝20-2$\sqrt{91}$
c^2＝（$\sqrt{15}-\sqrt{5}$）^{2}＝15-2$\sqrt{75}$＋5＝20-2$\sqrt{75}$

Q $\sqrt{91}>\sqrt{75}>\sqrt{51}$，又 a、b、c 皆負數⇒b＜c＜a

（B）8.已知 x、y 均為正整數，3$\sqrt{x}$－5$\sqrt{y}$＝15 且 2$\sqrt{x}$＋3$\sqrt{y}$＝48，求 x-y＝？（A）199（B）189（C）179（D）169

Sol) $\begin{cases}3\sqrt{x}-5\sqrt{y}=15\cdots\cdots①\\2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=48\cdots\cdots②\end{cases}$ ①×3：9$\sqrt{x}$－15$\sqrt{y}$＝45……③

②×5：10$\sqrt{x}$＋15$\sqrt{y}$＝240…④ ， ③＋④：19$\sqrt{x}$＝285，$\sqrt{x}$＝15

∴x＝225 ∴2×15＋3$\sqrt{y}$＝48，3$\sqrt{y}$＝18，$\sqrt{y}$＝6，y＝36 x-y=189

（C）9.如果符號〔$\sqrt{x}$〕表示$\sqrt{x}$的整數部分，例如〔$\sqrt{2}$〕＝1，〔$\sqrt{5}$〕＝2，則$\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$＝？（A）10（B）11（C）12（D）13

Sol) ∵2^2＝4，3^2＝9，4^2＝16，5^2＝25， ∴求值式＝2＋3＋3＋4＝12

（C）10 已知 x、y 為整數，且$\sqrt{(2x+3y-3)^2}+\sqrt{(3x-4y-13)^2}$＝0，求 15x-4y 的平方根。（A）±3（B）±5（C）±7（D）±9

Sol)｜2x＋3y－3｜＋｜3x－4y－13｜＝0⇒$\begin{cases}2x+3y=3\\3x-4y=13\end{cases}$⇒x＝3，y＝－1

∴15x-4y＝15×3-(4×(-1))＝49 ∴15x-4y 的平方根=±$\sqrt{49}$＝±7