Unit21 二次函數

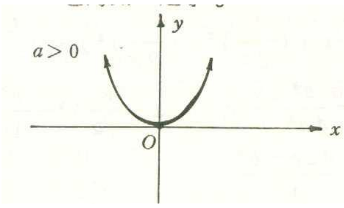
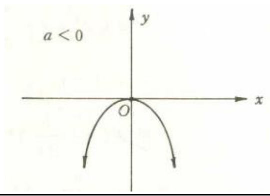
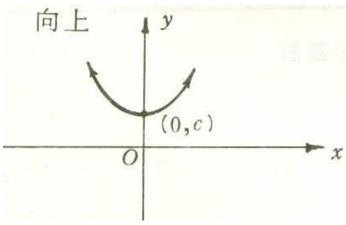
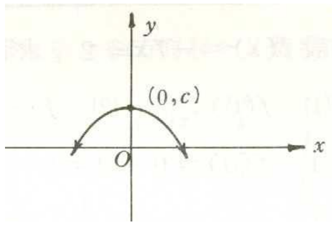
能力指標：◎（A-4-06）能以具體情境來理解二次函數的意義。
◎（A-4-06）能理解二次函數的樣式並繪出其圖形。
◎（A-4-06）能利用配方法繪出二次函數的圖形。
◎（A-4-06）能計算二次函數的最大值與最小值。
◎（A-4-06）能應用二次函數最大值與最小值的簡單性質。
◎（A-4-06、A-4-07）能理解二次函數的圖形與拋物線的概念。
◎（A-4-07）能理解拋物線的線對稱性質。

能力一：二次函數的圖形

一、二次函數的圖形

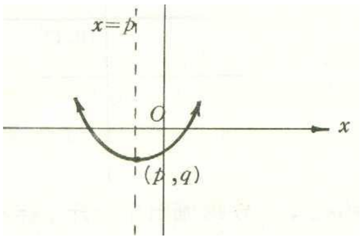
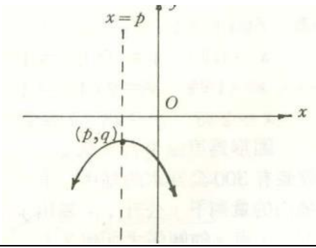
二次函數型如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函數，稱為二次函數，其函數圖形為拋物線。

二、二次函數各種圖形變化之歸納

<table>
<tr><td colspan="2">二次函數的標準式： $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">類型一： $y=ax^2\ \ (b=c=0)$，此時拋物線頂點在【原點】，對稱軸為【y 軸】。</td></tr>
<tr><td>① 當 a＞0 時，拋物線【開口向上】，當 a 值愈大，開口愈小。

</td><td>② 當 a＞0 時，拋物線【開口向下】，當 $|a|$ 值愈大，開口愈小。

</td></tr>
<tr><td colspan="2">類型二： $y=ax^2+c\ \ (b=0)$，此時拋物線的頂點為 $(0, c)$，對稱軸為【y 軸】；其圖形是將【類型一： $y=ax^2$ 】的圖形在 y 軸上，移動 c 個單位。</td></tr>
<tr><td>① 當 a＞0 時，拋物線【開口向上】。

</td><td>②當 a＜0 時，拋物線【開口向下】。

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">類型三：將 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，利用配方法化為 $y=a(x-p)^2+q$ 。

①拋物線頂點座標為 (p,q)； ②對稱軸為 $x-p=0$

③圖形係將 $y=ax^2 \Rightarrow$ 圖形在 y 軸方向上下移動 q 個單位；
圖形在 x 軸方向左右移動 p 個單位。</td></tr>
<tr><td>① 當 a＞0 時，拋物線【開口向上】。
</td><td>②當 a＜0 時，拋物線【開口向下】。
</td></tr>
</table>

【二次函數的圖形】

講解一：

（1）二次函數圖形的頂點為座標原點，對稱軸為 y 軸，且通過點（1,5），試求此二次函數為何呢？

（2）已知有三點座標 A（0,-5）、B（1,-8）、C（4,-5）在二次函數圖形上，試求此圖形之頂點座標、及其與 x、y 軸的交點為何呢？

Sol)

(1) 設此二次函數為 $y=ax^2$，Q 通過點 $(1,5)$

$\Rightarrow 5=a\times 1^2 \Rightarrow a=5\quad \therefore$ 二次函數為 $y=5x^2$

(2) 設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$ 將 $(0,-5)$, $(1,-8)$, $(4,-5)$ 代入

$\Rightarrow a=1,\ b=-4,\ c=5 \Rightarrow y=x^2-4x-5$

頂點座標 $\Rightarrow y=x^2-4x-5=(x^2-4x+4)-9=(x-2)^2-9 \Rightarrow$ 頂點 $(2,-9)$

與x軸交點座標 $\Rightarrow$ 令 $y=0 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x+1)(x-5)=0$,$x=5$ 或 (-1)

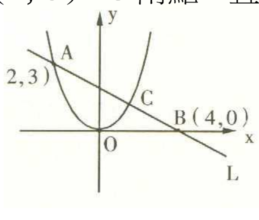
$\Rightarrow (5,0)$ 或 $(-1,0)$

與y軸交點座標 $\Rightarrow$ 令 $x=0 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow (0,-5)$

練習一：

（1）二次函數圖形通過（0, 3）、（1,4），且對稱於 y 軸，試求此二次函數為何呢？

（2）如圖，拋物線與直線交於 A（2,-3）、C 兩點，且直線 L 交 x 軸於 B（4,0），請問 C 點座標為何呢？



Sol)

(1)設二次函數 $\Rightarrow$ $y=ax^2+b$

將$(0, 3)$, $(1, 4)$代入 $\Rightarrow \begin{cases} 3=a\times 0^2+b \\ 4=a\times 1^2+b \end{cases} \Rightarrow a=1, b=3 \Rightarrow y=x^2+3$

$(2)$$\because$ 拋物線頂點為原點,並以y軸為對稱軸,令 $y=ax^2$

$A(-2, 3) \Rightarrow 3=a\times(-2)^2 \Rightarrow a=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; y=\frac{3}{4}x^2$

設直線方程式為$y=mx+n$, 將$(-2, 3)$, $(4, 0)$代入

$\Rightarrow \begin{cases} 3=-2m+n \\ 0=4m+n \end{cases} \Rightarrow$ 得 $m=\frac{-1}{2}$, $n=2 \;\Rightarrow\; y=\frac{-1}{2}x+2$

$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}x^2 \\ y=\frac{-1}{2}x+2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2+2x-8=0 \Rightarrow (3x-4)(x+2)=0, x=\frac{4}{3}$或$(-2)$不合!

$x=\frac{4}{3}$代入$y=\frac{-1}{2}x+2$ 得 $y=\frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

【二次函數圖形的移動】

講解二：

（1）將二次函數 $y=x^2+3x$ 之圖形向右平移 2 個單位，請問新圖形的二次函數為何呢？

（2）將二次函數 $y=-2x^2+4x+3$ 之圖形向左平移 3 個單位，再向下平移 2 個單位後，請問新圖形的二次函數為何呢？

Sol)

(1) $y=x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \Rightarrow$ 頂點座標$\left(\frac{-3}{2}, \frac{-9}{4}\right)$,

圖形向右平移2單位 $\Rightarrow$ 頂點座標$\left(\frac{-3}{2}+2, \frac{-9}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$

新圖形二次函數 $\Rightarrow y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; y=x^2-x-2$

(2) $y=-2x^2+4x+3=-2(x-1)^2+5 \;\Rightarrow\;$ 頂點座標$(1, 5)$

圖形向左平移3個單位,再向下平移2個單位,

$\Rightarrow (1-3, 5-2) \Rightarrow (-2, 3)$

$\Rightarrow y=-2(x+2)^2+3 \;\Rightarrow\; y=-2x^2-8x-5$

練習二：

（1）有一拋物線通過（2,-1）、（1,1），經過平移後與 $y=-2x^2$ 的圖形重合，請問此拋物線之二次函數為何呢？

（2）將 $y=ax^2+bx+c$的圖形，向左移 2 單位，再向上移 1 單位，得 $y=2x^2-9x+14$，請問 a、b、c 之值為何呢？

Sol)

(1)設拋物線 $y=-2x^2+bx \Rightarrow$ 通過$(1, 1),(2, -1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=-2+b+c \\ -1=-8+2b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=3 \\ 2b+c=7 \end{cases} \Rightarrow b=4,\ c=-1 \Rightarrow y=-2x^2+4x-1$$

(2)平移後a值不變 $\Rightarrow$ $a=2$

$$y-1=2(x+2)^2+b(x+2)+c$$

$$y-1=2(x^2+4x+4)+bx+2b+c \Rightarrow y=2x^2+(8+b)x+9+2b+c$$

$$\begin{cases} 8+b=-9 \\ 9+2b+c=14 \end{cases} \Rightarrow b=-17,\ c=39 \Rightarrow a=2,\ b=-17,\ c=39$$

【十分鐘即時練習】

（A）1.下列那一個函數圖形的開口最大？

(A)$y=-\frac{1}{3}x^2$ (B)$y=-\frac{3}{4}x^2$ (C)$y=-\frac{1}{2}x^2$ (D)$y=\frac{3}{2}x^2$

Sol)∵在二次函數 $y=ax^2$ 中，$|a|$ 值愈小，則其開口愈大，

又∵$\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$，$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$，$\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$，其中最小者為$\frac{1}{3}$ ∴$y=-\frac{1}{3}x^2$的開口最大。

（A）2.坐標平面上，(2，3)這點會在下列那一個二次函數的圖形上？

(A)$y=\frac{1}{2}x^2+1$ (B)$y=\frac{1}{3}x^2-1$ (C)$y=(x+2)^2+3$ (D)$y=2x^2+3$

Sol)分別以(2，3)代入 $y=\frac{1}{2}x^2+1$、$y=\frac{1}{3}x^2-1$、$y=(x+2)^2+3$、$y=2x^2+3$ 中，

發現只有 $3=\frac{1}{2}\times 2^2+1$ 是成立的 ∴點(2，3)在 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 的圖形上。

（C）3.下列那一個二次函數圖形會經過原點？

(A)$y=-5x^2+12$ (B)$y=x^2-3$ (C)$y=2x^2+3x$ (D)$y=-2x^2-4x-2$

Sol) 若一函數之函數圖形通過原點，則其常數項為0，而在選項中，只有(C)$y=2x^2+3x$的常數項為0。

（A）4.二次函數y＝x^2－1的對稱軸方程式為下列何者選項？

(A)x＝0　(B)y＝－1　(C)y＝0　(D)x＝－1

Sol) y＝x^2－1的圖形頂點為(0，－1)，對稱軸為y軸，故對稱軸方程式為x＝0。

（C）5.二次函數y＝－2x^2＋3圖形的頂點坐標為下列何者選項？

(A)(－2，3)　(B)(3，－2)　(C)(0，3)　(D)(3，0)

Sol) y＝－2x^2＋3 的頂點坐標為(0，3)。

能力二：二次函數的極值

一、配方法及公式法

標準式 $y=ax^2+bx+c \Leftrightarrow y=a\left(x-p\right)^2+q$

$$\Rightarrow y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow \text{令}p=\frac{-b}{2a},\ q=\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow y=a\left(x-p\right)^2+q$$

$$\Rightarrow \text{拋物線頂點座標}\left(p,q\right)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

二、二次函數極值的歸納表

<table>
<tr><td colspan="2">標準式 $y=ax^2+bx+c \Leftrightarrow y=a\left(x-p\right)^2+q$</td></tr>
<tr><td>① 當 a＞0，x=p，y 有最小值 q。
$y=a\left(x-p\right)^2+q\geq q$</td><td>② 當 a＜0，x=p，y 有最小值 q。
$y=a\left(x-p\right)^2+q\leq q$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y=a\left(x-p\right)^2+q \Rightarrow p=\frac{-b}{2a},\ q=\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow \text{拋物線頂點座標}\left(p,q\right)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$</td></tr>
<tr><td>① 當 a＞0 時，
若 $x=\frac{-b}{2a}$ 時 $\Rightarrow$ y有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$</td><td>② 當 a＜0，
若 $x=\frac{-b}{2a}$ 時 $\Rightarrow$ y有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$</td></tr>
</table>

【二次函數的極值】

講解一：

（1）二次函數 $y=2x^2-12x+15$ ，當 $2\le x\le 5$ 時，試求 y 之最大值與最小值＝？
（2）二次函數 $y=-3x^2+ax+b$ ，當 x=3 時有最大值 4，請問 a、b 為何呢？
Sol)

$(1)\ y=2x^2-12x+15=2\left(x^2-6x+9\right)-18+15=2\left(x-3\right)^2-3$

$\because 2\le x\le 5 \Rightarrow$ 當$x=2\Rightarrow y=2\left(2-3\right)^2-3=-1$

當$x=3\Rightarrow y=-3$(最小值)

當$x=5\Rightarrow y=2\left(5-3\right)^2-3=5$

$\Rightarrow$ y的最大值為5,最小值為-3

$(2)\ \because x=3$時有最大值4, $y=-3\left(x-3\right)^2+4=-3x^2+18x-23$

與 $y=-3x^2+ax+b$比較得 $a=18,\ b=-23$

練習一：
（1）設 $0\le x\le 4$ ，且 $y=x^2-4x+5$ 之最大值為 M，最小值為 m，請問 M+m=？
（2）設 $2x+y=100$ ，試求 x^2+y^2 的最小值為何呢？
Sol)

$(1)\ \because y=\left(x-2\right)^2+1\Rightarrow$ 最小值$m=1$

當=4時, 最大值$M=4^2-4\times 4+5=5\Rightarrow M+m=5+1=6$

$(2)\ \because 2x+y=100 \Rightarrow y=100-2x$

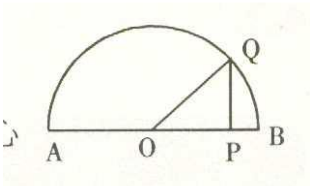
$x^2+y^2=x^2+\left(100-2x\right)^2=5x^2-400x+10000$

$=5\left(x-40\right)^2+2000\ge 2000$

$\therefore x^2+y^2$有最小值2000

【二次函數極值的應用】
講解二：

如圖，Q 點是以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上一點，O 是圓心，$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$ ，$\overline{OB}=6$ ，假設 $\overline{OP}=x$ ，請問當 x 是多少時，△OPQ 的面積最大呢？



Sol)

$\overline{OP}=x,\ \overline{OQ}=6$, 假設△OPQ面積為y, $y=\frac{1}{2}x\times\sqrt{36-x^2}$

$\Rightarrow y^2=\frac{1}{4}x^2\left(36-x^2\right)=\frac{1}{4}\left(-\left(x^2-18\right)^2+324\right)=\frac{-1}{4}\left(x^2-18\right)^2+81$

當$x^2=18$時, y^2最大值為81, $x=3\sqrt{2}$時, △OPQ的面積最大

練習二：

雲林縣肉品交易市場每 1 公斤豬肉成本為 300 元，如果豬肉攤商將每 1 公斤豬肉定價為 400 元，則每日可賣 600 公斤，若每公斤價錢上漲（或下跌 x 元），則少賣（或多賣）2x 公斤，請問：(1）每公斤豬肉的定價為多少時，才可收入最大的金額呢？（2）每公斤豬肉的定價為多少時，才可得到最大的利潤呢？

Sol)

(1)設每公斤豬肉下跌x元時,其收入為y元

$$\Rightarrow y=(400-x)(600+2x)=-2x^2+200x+240000$$

$$=-2(x^2-100x+2500)+245000 \Rightarrow -2(x-50)^2+245000 \le 245000$$

$\therefore$ 當$x=50$, y有最大值 $\Rightarrow$ 每公斤的豬肉定價$=400-50=350$(元)

(2)設每公斤上漲x元, 可得利潤y元

$$\Rightarrow y=(400+x)(600-2x)-300(600-2x)=(100+x)(600-2x)$$

$$=-2x^2+400x+60000=-2(x^2-200x+10000)+80000$$

$$=-2(x-100)^2+80000 \le 80000$$

$\therefore$ 當$x=100$時, y有最大值 $\Rightarrow$ 每公斤的定價$=400+100=500$(元)

【十分鐘即時練習】

（C）1.二次函數$y=-2(x-1)^2+3$，下列選項何者正確？

(A)有最小值3　(B)有最小值-3　(C)有最大值3　(D)有最大值-3

sol) $y=-2(x-1)^2+3$　$\because -2(x-1)^2 \leqq 0$　$\therefore y=-2(x-1)^2+3 \leqq 3$，y 有最大值 3。

（D）2.二次函數$y=(x+2)^2-3$，當$x=a$時，y有最小值，則$a=$？

(A)3　(B)-3　(C)2　(D)-2

Sol)$\because y=(x+2)^2-3 \geqq -3$　$\therefore$當 $x=-2$ 時，y 有最小值-3，"$a=-2$。

（B）3.二次函數$y=-x^2+x+3$的最大值等於多少？

(A)3　(B)$\frac{13}{4}$　(C)$\frac{11}{4}$　(D)$\frac{9}{4}$

Sol) $y=-x^2+x+3=-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}+3=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4} \leqq \frac{13}{4}$，y 的最大值為$\frac{13}{4}$。

（A）4.若二次函數$y=ax^2+bx+c$有最小值，則下列選項何者正確？

(A)$a>0$　(B)$a<0$　(C)$a=0$　(D)無法確定a值的正負

Sol) $\because y=ax^2+bx+c$ 有最小值　$\therefore a>0$

（C）5.設二次函數$y=x^2-4x+k$的最小值為5，則k＝？

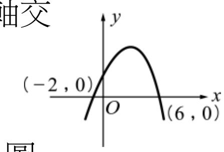
(A)4　(B)5　(C)9　(D)25

Sol) $y=x^2-4x+k=(x^2-4x+4)-4+k=(x-2)^2+(k-4)\geqq k-4$"$k-4=5$　∴$k=9$

【基本觀念題】

（B）1.二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形與x軸之交點為(6，0)與(−2，0)且與y軸交於正向上，則下列選項何者正確？

(A)$a>0$　(B)$a<0$　(C)$c<0$　(D)無法判定a、c的正、負



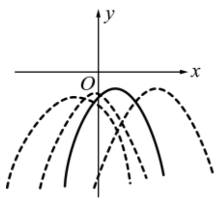
Sol) 依題意二次函數的概略圖形如圖所示，∵圖形開口向下　∴$a<0$，又∵圖形與 y 軸交於正向　∴$c>0$。

（D）2.二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形交x軸於A(5，0)、B(1，0)，交y軸於C(0，5)，則其頂點在坐標平面上第幾象限？(A)一　(B)二　(C)三　(D)四

Sol) 設 $y=a(x-5)(x-1)$以(0，5)代入得：$5=a(-5)(-1)$，∴$a=1$，故 $y=(x-5)(x-1)=x^2-6x+5=(x^2-6x+9)-9+5=(x-3)^2-4$

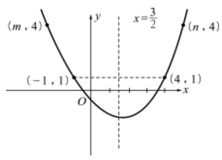
圖形的頂點坐標為(3，−4)，在第四象限內。

（B）3.若二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形完全在x軸的下方，則下列何者一定正確？(A)$a<0$，$b^2-4ac<0$，$c>0$　(B)$a<0$，$b^2-4ac<0$，$c<0$　(C)$a>0$，$b^2-4ac>0$，$c<0$　(D)$a<0$，$b^2-4ac<0$，無法判斷c的正負



Sol) ∵$y=ax^2+bx+c$ 的圖形在 x 軸下方，∴圖形如圖所示，可知 $a<0$，$c<0$，$b^2-4ac<0$，但無法確定 b 的正負

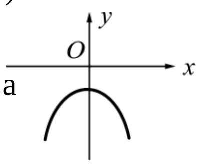
（C）4.已知二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形通過(−1，1)、(4，1)、(m，4)、(n，4)，m_n，則m＋n＝？(A)−1　(B)2　(C)3　(D)5



Sol) $y=ax^2+bx+c$ 的大略圖形如圖所示，對稱軸為 $x=\frac{3}{2}$ " $\frac{m+n}{2}=\frac{4+(-1)}{2}=\frac{3}{2}$

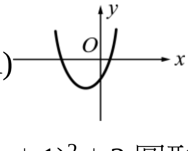
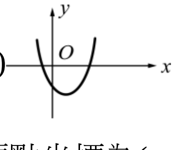
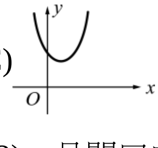
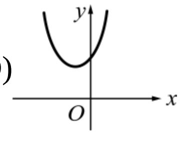
∴$m+n=3$

（C）5.如圖，函數$y=ax^2+k$之圖形，則(a，k)屬於第幾象限的點？(A)一　(B)二　(C)三　(D)四



Sol) $y=ax^2+k$ 頂點坐標為(0，k)在 y 軸下方，故 $k<0$，而圖形開口向下，故 $a<0$，∴(a，k)在第三象限。

（D）6.二次函數$y=(x+1)^2+2$的圖形為下列何者？

(A)

(B)

(C)

(D)


Sol) $y=(x+1)^2+2$ 圖形的頂點坐標為(−1，2)，且開口向上。

（B）7.拋物線$y=-x^2-x+2$的頂點在第幾象限？(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

Sol) $y=-x^2-x+2=-(x^2+x+\frac{1}{4})+2+\frac{1}{4}=-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$ $\therefore$頂點$(-\frac{1}{2},\frac{9}{4})$

在第二象限。

（C）8.$y=x^2-5x+6$的圖形不經過第幾象限？(A)一(B)二(C)三(D)四 象限。

Sol) $y=x^2-5x+6=(x^2-5x+\frac{25}{4})+6-\frac{25}{4}=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}$，$\therefore$頂點$(\frac{5}{2},-\frac{1}{4})$，

開口向上，圖形不過第三象限

（C）9.假設$y=-x^2+4x+1$，請問其極大值為何呢？（A）無極大值（B）7（C）5（D）3。

Sol) $y=-(x-2)^2+5$ 當 $x=2$時, y的極大值5

（D）10.設二次函數在 x=1 時有最小值2，且 x=0 則 y=3，請問此二次函數為何呢？（A）$y=-x^2+2x+3$（B）$y=-x^2-2x+3$（C）$y=x^2+2x+3$（D）$y=x^2-2x+3$。

Sol) $y=a(x-1)^2+2\ (a>0)\ \Rightarrow y=3\ x=0$ 代入左式

$\Rightarrow a(-1)^2+2=3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$

【溫故歷屆基測試題】

（C）1.有一算式“（50－□）×（□＋10）”，其中兩個 □ 內規定皆填入相同的正整數。例如：當 □ 填入“1”時，“（50－1）×（1＋10）＝539”，即此算式的值為 539。求此算式的最大值為何？（A）700（B）800（C）900（D）1000。【93.基測一】

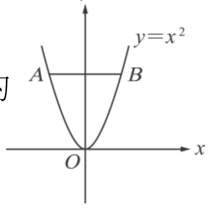
Sol) 令□=x, $(50-x)(x+10)=-x^2+40x+500=-(x^2-40x+20^2)+500+400$

$=-(x-20)^2+900 \Rightarrow$ 當x=20時, 可得最大值

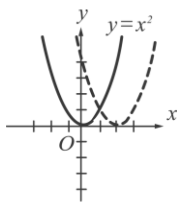
（D）2.下列哪一個二次函數，其圖形和 $y=4x^2-8x$ 的圖形有相同的頂點？（A）$y=2x^2-4x$（B）$y=-2(x+1)^2$（C）$y=2(x+1)^2+4$（D）$y=-2(x-1)^2-4$。【93.基測二】

Sol) $y=4x^2-8x=4(x^2-2x)=4(x-1)^2-4$

圖形的頂點座標$(1,-4)$與之相同頂點的為$y=-2(x-1)^2-4$



（C）3.如圖，A、B 分別為 $y=x^2$上兩點，且 $\overline{AB}\perp y$ 軸。若 $\overline{AB}=6$，則直線 AB 的方程式為何？（A）$y=3$（B）$y=6$（C）$y=9$（D）$y=36$。【91.基測二】



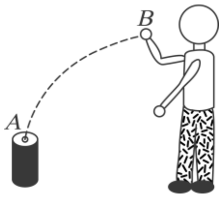
Sol) $\because$ A,B兩點對稱y軸 $\therefore$設$B(a,a^2)$, 則$A(-a,a^2)$,

又$\overline{AB}=6$, $\therefore a-(-a)=6$, $2a=6$, $a=3 \Rightarrow A(-3,9)$, $B(3,9) \Rightarrow y=9$

（D）4.如圖，將二次函數 $y=x^2$ 的圖形向右移動兩個單位長，則下列哪一個二次函數的圖形，可為虛線所表示的圖形？ （A）$y=x^2+2$（B）$y=x^2-2$（C）$y=(x+2)^2$（D）$y=(x-2)^2$。【90.基測一】

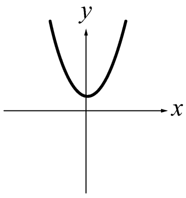
Sol) $y=x^2 \Rightarrow$ 圖形往右移2個單位 $\Rightarrow y=(x-2)^2$

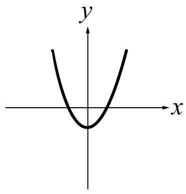
（B）5.如圖，小智丟垃圾的路徑是一個二次函數 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x+c$ 的圖形。已知小智是在此二次函數圖形的頂點（即 B 點）將垃圾丟出，且從 $A(0，1)$ 點進入筒內。若 B 點的坐標為 $(a，b)$，則 $b=$？ （A）3（B）4（C）5（D）6。【90.基測二】

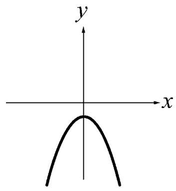


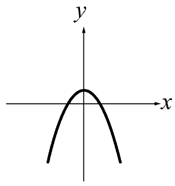
Sol)
$$y=\frac{-1}{3}x^2+2x+c=\frac{-1}{3}(x^2-6x)+c=\frac{-1}{3}\left(x^2-6x+(-3)^2\right)+c+3$$
$$=\frac{-1}{3}(x-3)^2+c+3 \Rightarrow \text{頂點}(3,\ c+3)$$
$$\text{將A}(0,\ 1)\text{代入} \Rightarrow 1=\frac{-1}{3}(-3)^2+c+3 \Rightarrow c=1 \Rightarrow \text{頂點}(3,\ 4) \Rightarrow b=4$$

（D）6.已知二次函數 $y=ax^2+k$，其中 $a<0$，$k>0$，下列哪一個選項可能是此二次函數的圖形？【91.基測一】

（A）

（B）

（C）

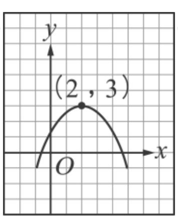
（D）

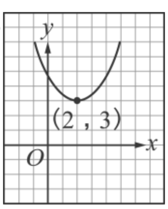
Sol) $y=ax^2+k$, $\because a<0$ $\therefore$ 圖形開口向下, 又 $k>0$ $\therefore$ 頂點在y軸的正向

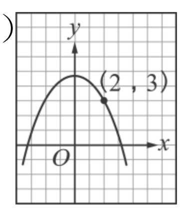
（A）7.若用配方法將二次函數 $y=-2x^2-4x+1$ 寫成 $y=-2(x-h)^2+k$ 的形式，求 $h+k=$？ （A）2（B）4（C）-4（D）-2。【91.基測一】

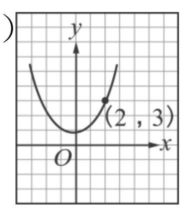
Sol) $y=-2(x+1)^2+1+2=-2(x+1)^2+3$,$\therefore h=-1, k=3,\ h+k=2$

（A）8.下列為四個二次函數的圖形，哪一個函數在 $x=2$ 時有最大值 3？【92.基測一】

（A）

（B）

（C）

（D）

Sol)開口向下，頂點為（2,3）的圖形。

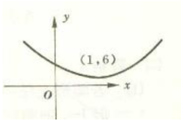
【模擬學力基測試題】

（D）1.設二次函數 $y=-x^2+2bx+a$ 圖形的最高點座標為（2, 5），請問 a+b=？（A）0（B）1（C）2（D）3。

Sol) $y=-(x-b)^2+a+b^2$ 最高點 $(b, a+b^2)=(2,5)$, $b=2, a=1 \Rightarrow a+b=3$

（C）2.請問 $y=x^2-2x+7$ 的圖形為下列何者呢？（A）與 y 軸相交於兩點的拋物線（B）與 x 軸相交之橢圓（C）與 x 軸不相交之拋物線（D）與 x 軸相切於一點的拋物線。

Sol) $y=(x-1)^2+6$ 可得圖形之最低點 $(1,6)$, 且開口向上,
$(\because a=1>0)$ $\therefore$ 圖形與x軸無交點, 但與y軸恰交於一點

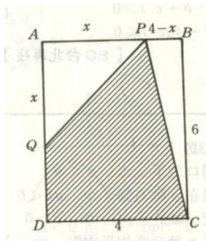


（B）3.設矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=6$，在 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ 上各取一點 P、Q，使 $\overline{AP}=\overline{AQ}$，則四邊形 PQDC 之最大面積為何呢？（A）$\frac{31}{2}$（B）$\frac{33}{2}$（C）$\frac{35}{2}$（D）$\frac{37}{2}$（平方單位）

如圖, 設 $\overline{AP}=\overline{AQ}=x$, □PQDC=□ABCD-△APQ-△PBC

Sol) $\square PQDC=6\times 4-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\times 6\times(4-x)=\frac{-1}{2}x^2+3x+12=\frac{-1}{2}(x^2-6x+9)+12+\frac{9}{2}$

$=\frac{-1}{2}(x-3)^2+\frac{33}{2}\le\frac{33}{2}$ $\therefore$ 當x=3時, □PQDC有最大面積 $\frac{33}{2}$(單位^2)

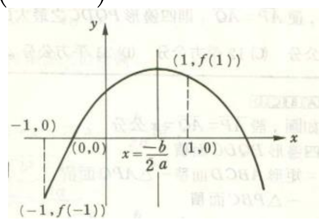


（D）4.若二次函數 $y=ax^2-12x+b$，在 $x=\frac{-3}{2}$，有極大值 10，則數隊（a, b）為何呢？（A）（2,-3）（B）（-3,2）（C）（1,-4）（D）（-4,1）。

Sol) $y=ax^2-12x+b=a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+10=ax^2+3ax+\left(\frac{9}{4}+10\right)\Rightarrow\begin{cases}3a=-12\\ \frac{9}{4}a+10=b\end{cases}\Rightarrow a=-4, b=1$

（D）5.如右圖，$a\neq 0$，$y=f(x)=ax^2+bx+c$，請問下列何者為正確呢？（A）$a(a+b+c)>0$（B）$b(a-b+c)>0$（C）$c(a-b+c)>0$（D）$a(b^2-4ac)<0$

Sol) 圖形開口朝下 $\Rightarrow a<0$, 頂點在y軸右側 $\Rightarrow ab<0 \Rightarrow b>0$
圖形交y軸於正向 $\Rightarrow c>0$, 圖形與x軸交相異兩點 $\Rightarrow b^2-4ac>0$
又 $(1, f(1))$ 在x軸上方 $\Rightarrow f(1)>0\Rightarrow a+b+c>0$
而 $(-1,f(-1))$ 在x軸下方 $\Rightarrow f(-1)<0\Rightarrow a-b+c<0$ $\therefore a(b^2-4ac)<0$



（C）6.拋物線方程式為 $y=(a-1)x^2+ax+a$，若使拋物線開口向上，且圖形均在 x 軸上方，請問 a 的範圍為何呢？（A）$a>1$（B）$a>\frac{6}{5}$（C）$a>\frac{4}{3}$（D）$a>\frac{3}{2}$。

Sol) $y=(a-1)x^2+ax+a$ 恆為正, $\Rightarrow \begin{cases} a-1>0 \\ a^2-4(a-1)a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>1 \\ a(3a-4)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>1 \\ a>\frac{4}{3} \text{ 或 } a<0 \end{cases} \Rightarrow a>\frac{4}{3}$

（B）7.有關於函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，$ac\neq 0$ 之圖形的敘述，下列何者錯誤呢？

（A）為一拋物線（B）與 x 軸至少有一個交點（C）當 $b^2=4ac$ 時，與 x 軸僅有一個交點（D）當 b=0 時，與 x 軸的交點不可能只有一個。

Sol) 當 $b^2-4ac<0$ 時,圖形與x軸無交點

（C）8.有關於函數 $y=f(x)=x^2-10x+24$ 的圖形，下列敘述何者正確呢？（A）圖形全部落在第一象限中（B）圖形有極小值出現在第二象限中（C）圖形不經過第三象限（D）圖形不經過第四象限。

Sol)
$y=f(x)=x^2-10x+24=(x-5)^2-1$ 當x=5時, 有極小值 (-1) ∴極小值出現在第四象限

令y=0 $\Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow x=4$ 或 $6, \Rightarrow$ 與x軸交於 $(4,0)$, $(6,0)$

令x=0 $\Rightarrow y=24 \Rightarrow$ 與y軸交於 $(0,24) \Rightarrow$ 圖形不經第三象限

（B）9.在坐標平面上，若二次函數 $y=-3x^2+6x$ 的頂點A到原點O的距離為d，則下列選項何者正確？(A) $2<d<3$　(B) $3<d<4$　(C) $4<d<5$　(D) $5<d<6$

Sol) $y=-3x^2+6x=-3(x^2-2x+1)+3=-3(x-1)^2+3$，頂點 A(1，3)

∴ $d=1^2+3^2=10$，而 $3<d<4$。

（D）10.$y=(x-h)^2$ 之圖形與下列何函數之圖形對稱於x軸？(A) $y=(x+h)^2$　(B) $y=x^2+h$　(C) $y=x^2-h$　(D) $y=-(x-h)^2$

Sol) $y=(x-h)^2$，頂點(h，0)，開口向上，則與其對稱於 x 軸之圖形頂點亦為(h，0)而開口向下，即為 $y=-(x-h)^2$。

【進階練習題】

（A）1.若二次函數 $y=(a+b)x^2+2cx-(a-b)$，在 $x=-\frac{1}{2}$ 時，y有最小值 $-\frac{a}{2}$，則 a：b：c＝？(A)1：1：1　(B)1：2：3　(C)2：1：3　(D)1：3：4

Sol) y＝（a＋b）x^2＋2cx－（a－b）＝（a＋b）（x＋$\frac{1}{2}$）^{2}－$\frac{a}{2}$＝（a＋b）x^2＋（a＋b）x＋$\frac{a+b}{4}$－$\frac{a}{2}$ ∴$\begin{cases} a+b=2c\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ -a+b=\frac{-a+b}{4}\ldots 2 \end{cases}$ ⇒ －4a＋4b＝－a＋b，3b＝3a

∴a＝b 代入 1，得 2a＝2c ∴a＝ｃ，則 a＝b＝c，a：b：c＝1：1：1

（C）2.二次函數y＝x（36－x）的最大值為何？(A)36 (B)320 (C)324 (D)234

Sol) y＝－x^2＋36x＝－（x^2－36x＋18^2）＋324＝－（x－18）^{2}＋324≦324，∴最大值 324

（C）3.蘋果園裡種了30棵蘋果樹，平均每棵年產400個蘋果，若在此果園中每加種一棵蘋果樹，平均每棵年產量減少10個，則應種多少棵蘋果樹才能使年產量最多？(A)5棵 (B)15棵 (C)35棵 (D)45棵

Sol) 設加種 x 棵，產量為 y 個，y＝（30＋x）（400－10x）＝12000＋100x－10x^2
＝－10（x^2－10x＋25）＋12000＋250＝－10（x－5）^{2}＋12250≦12250
當 x＝5 時產量最大，故應種 30＋5＝35（棵）

（C）4.下列有關二次函數y＝−9(x−$\frac{2}{3}$)^2＋45的敘述何者正確？(A)此函數圖形的開口向上 (B)y的最小值為45 (C)y的最大值為45 (D)y的最大值為44

Sol) y＝－9（x－$\frac{2}{3}$）^{2}＋45 ∵x^2 項係數為－9，故圖形開口向下，有最大值 45

（B）5.俊影老師要利用 100 公尺長的繩子圍出一個矩形的花園，其邊長各為多少公尺才能使得圍成的面積最大呢？（A）25、25 公尺（B）20、30 公尺（C）22、28 公尺（D）18、32 公尺。

Sol)設長為 x，寬為（50-x）時，面積=x(50-x)為最大

面積$=-x^2+50x=-\left(x^2-50x+25^2\right)+625=-x\left(x-25\right)^2+625$

當x=25時,有面積最大值625 $\Rightarrow 25\times 25$

$\left(\because a+b\text{為定值, 當}a=b\text{時, }a\times b\text{為最大值, }\left(\frac{100}{4}\right)^2=25\times 25\right)$

（B）6.東蔘旅行社招攬香港旅遊兩天一夜的旅行團，為避免影響品質，人數以不超過35人為限，每人收費5000元。若人數不足35人，每減少1人則旅費加收200元，試問此旅行社最多共可收到多少旅費？(A)175000元 (B)180000元 (C)190000元 (D)195000元

Sol)設減少 x 人，收入為 y

y＝（35－x）（5000＋200x）＝175000＋2000x－200x^2
＝－200（x^2－10x＋25）＋175000＋5000＝－200（x－5）^{2}＋180000≦180000，故最多收入 180000 元

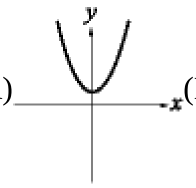
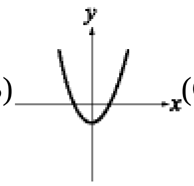
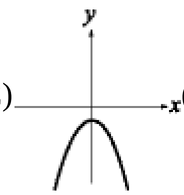
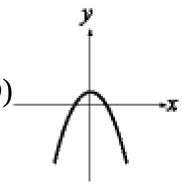
（C）7.若二次函數$y=-x^2+2x+k-4$有最大值為2，則$k=$？(A)7　(B)6　(C)5　(D)4

Sol)$y=-x^2+2x+k-4=-(x^2-2x+1)+k-4+1$，則 $k-3=2$ $\therefore k=5$

（D）8.北港溪整治工程中，水中汙泥深度為水深的$\frac{1}{3}$，則整條溪長度與水深的總和為120公尺，若將整條溪視為長方形，而每處理1平方公尺的汙泥費用為5萬元，則此工程費用最高多少元？(A)3600萬元　(B)4200萬元　(C)5400萬元　(D)6000萬元

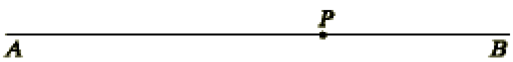
Sol)設水深 x 公尺，則溪長度（$120-x$）公尺，汙泥深$\frac{1}{3}$ x 公尺，若費用為 y，$y=\frac{1}{3}x(120-x)\times 5=-\frac{5}{3}(x^2-120x+3600)+6000=-\frac{5}{3}(x-60)^2+6000\leqq 6000$，故最高 6000 萬元

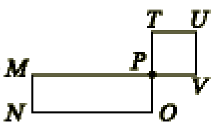
（D）9.已知二次函數$y=ax^2+k$，其中$a<0$，$k>0$，則下列那一個選項可能是此二次函數的圖形？

(A)(B)(C)(D)

Sol)$\because y=ax^2+k$ 中，$a<0\rightarrow$拋物線開口向下，$k>0\rightarrow$拋物線與 y 軸交於 y 軸上方

（B）10如圖(a)，在長度為28的$\overline{AB}$上取一點P。用$\overline{AP}$圍成一個長方形PMNO，其中$\overline{PM}=3\overline{PO}$，再用$\overline{BP}$圍成一個正方形PVUT，如圖(b)。已知$\overline{PO}=t$時，長方形與正方形的面積和有最小值s，則s＝？　(A)14　(B)21　(C)28　(D)49

圖(a)

圖(b)

Sol)$S=\overline{MP}\cdot\overline{PO}+\overline{PV}^2=3t\cdot t+\left[\frac{1}{4}(28-8t)\right]^2=3t^2+(7-2t)^2$
$=3t^2+49-28t+4t^2=7(t^2-4t+4)+49-28=7(t-2)^2+21\geqq 21$