數老師 Ph. D. 編著

U*nit*20 圓形

能力指標：◎ （*S*－4－14）能理解直線與圓及兩圓的關係。

◎ （*S*－4－14）能理解圓的相關性質。

◎ （*S*－4－14）能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。

Try！Try！ 迷思概念的澄清！ （閱讀本章之前，請先測試一下你的觀念對不對！）

（○）1.當兩圓外離時公切線總數有 4 條。

Teacher says：內公切線與外公切線各 2 條，共 4 條。

（╳）2.切線與圓的交點稱為接點且必與圓心共線。

Teacher says：切線與圓的交點稱為切點。

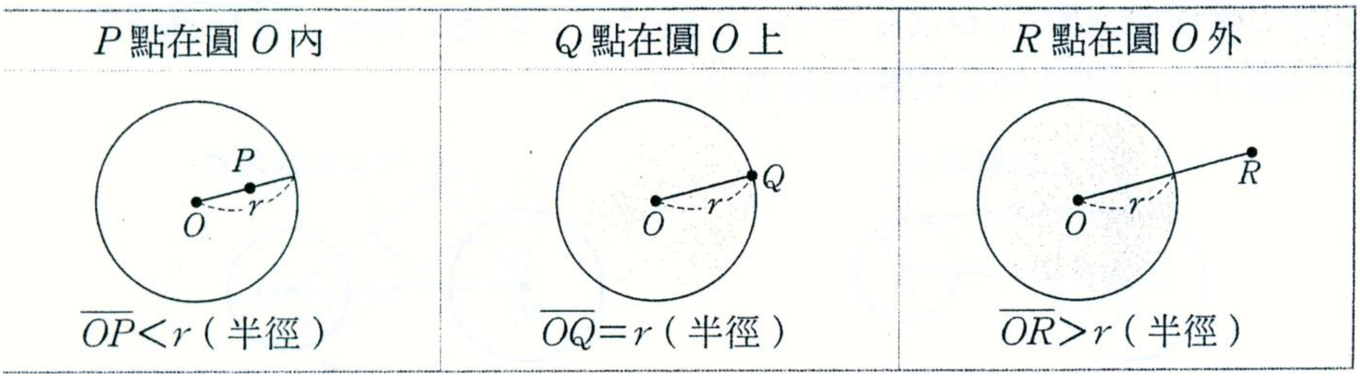
（╳）3.圓內的弦心距愈長，代表弦愈長。

Teacher says：弦心距與弦成反比。

能力一：點、直線與圓的關係

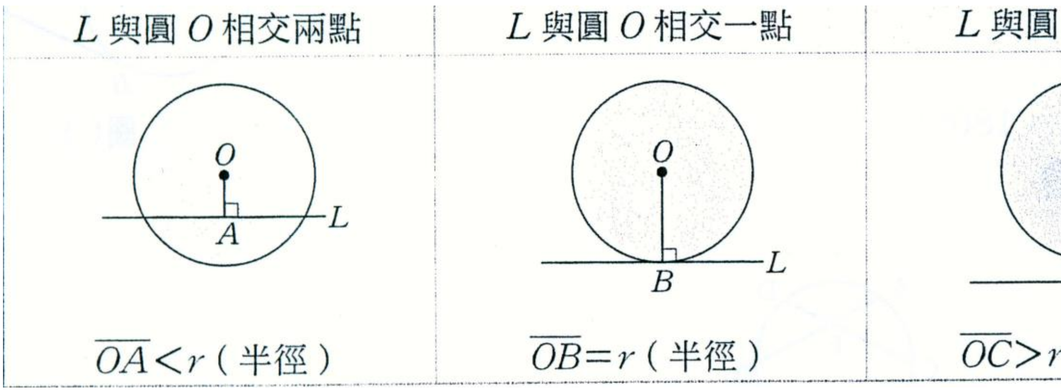
一、點與圓的關係

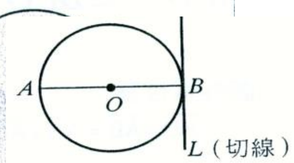
在平面上一點 *P* 與圓 *O* 的位置關係：

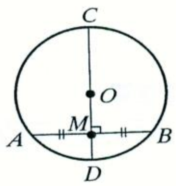


二、直線與圓

在平面上直線 *L* 與圓 *O* 的關係：



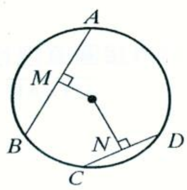




三、切線的性質：

（一）過一圓直徑端點的垂線為此圓之切線。

（二）圓心到切線的距離等於圓的半徑。



（三）圓心與切點的連線必<u>垂直</u>過此切點的切線。

四、弦的性質：

1.垂直於弦的直徑必<u>平分</u>此弦。

2.弦的垂直平分線必通過<u>圓心</u>。

3.圓心與弦的中心連線，必<u>垂直</u>此弦。

五、弦心距的性質：（弦與圓心的距離稱為<u>弦心距</u>）

（一）$\overline{OM}$ 為弦 $\overline{AB}$ 的弦心距 $\Leftrightarrow$ $\overline{OM}$ <u>垂直平分</u> $\overline{AB}$。

（二）同圓或等同圓：1. 等弦 $\xleftrightarrow{對}$ 等弦心距；

2. 大弦 $\xleftrightarrow{對}$ 小弦心距；

3. 小弦 $\xleftrightarrow{對}$ 大弦心距。

（如右圖），$\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM} < \overline{ON}$）

六、兩圓的位置關係，連心長和半徑的關係與公切線數：

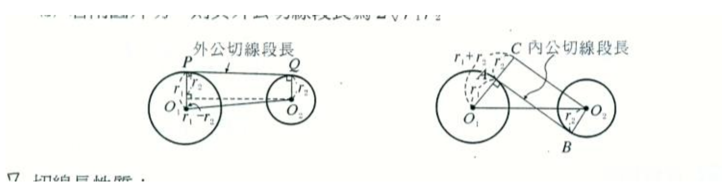
設圓 O_1 與圓 O_2 的半徑各為 r_1、r_2（$r_1 > r_2$），連心長為 $\overline{O_1O_2}$。

兩圓關係	連心線長	外公切線數	內公切線數	公切線總數
外離	$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$	2	2	4
外切	$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$	2	1	3
相交於兩點	$r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$	2	0	2
內切	$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$	1	0	1
內離	$\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$	0	0	0

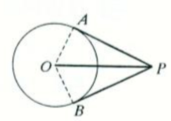
1.外公切線段長 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2}$。（口訣：外＝$\sqrt{心^2 - 差^2}$）

2.內公切線段長 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2}$。（口訣：內＝$\sqrt{心^2 - 和^2}$）

3.若兩圓外切，則其外公切線段長為 $2\sqrt{r_1 r_2}$。



七、切線長性質：



圖(一)

如圖(一)，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 分別切圓 O 於 A、B，則：

1. $\overline{PA}=\overline{PB}$ 。

2. $\angle APO=\angle BPO$

3. $\angle AOB+\angle APB=180°$。

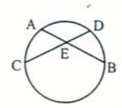
八、圓與比例線段

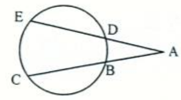
（一）原內冪性質：$\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$

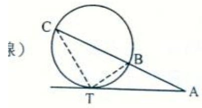
（二）圓外冪性質：$\overline{AD}\times\overline{AE}=\overline{AB}\times\overline{AC}$

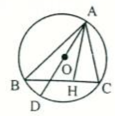
（三）切割性質：$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AT}^2$（$\overline{AT}$ 為切線）

（四）外接圓直徑性質：$\overline{AD}\times\overline{AH}=\overline{AB}\times\overline{AC}$









師說一：【點、直線與圓的位置關係】

設圓 O 直徑為 10，圓心為（1，-2），點 P 之座標為（6，1），點 Q 座標為（5，1），試判斷 P、Q 兩點與圓 O 的位置關係。

Sol）1.根據距離公式 $\overline{OP}=\sqrt{(6-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{26}$

直徑＝10　∴半徑＝5，而 $\sqrt{26}>5$　∴P 點在原 O 外

2.同理 $\overline{OQ}=\sqrt{(5-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{25}=5$＝半徑　∴點 Q 在圓 O 上

演練一

設圓 O 之半徑為 $\sqrt{26}$，圓心為（2，3），直線 L 之方程式為 $y=2$，則直線 L 與圓 O 之位置關係如何？

Sol）過圓心 O 作直線 L 之垂直線，設垂足為 P，則 P 點之座標（2，2）圓心 O 到直線 L 的距離，

即為 $\overline{OP}$ 之長　∴ $\overline{OP}=|3-(-2)=5|$ ∵ $\overline{OP}=5<\sqrt{26}=$ 半徑

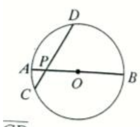
∴直線 L 與圓 O 相交於兩點，為圓 O 之一條割線

師說二：【弦心距】

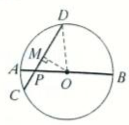
如右圖，已知 $\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，弦 $\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 P，若 $\overline{AP}=2$，$\overline{BP}=12$，$\overline{CP}=4$，

$\overline{PD}=6$

求 $\overline{CD}$ 的弦心距。



$\overline{CD}$



Sol）1.連接$\overline{OD}$，作$\overline{OM}\perp\overline{CD}$

2. $\overline{AB}=2+12=14\Rightarrow\overline{OD}=\frac{1}{2}\times14=7$

3. $\overline{CD}=4+6=10\Rightarrow\overline{DM}=\frac{1}{2}\times10=5$

4.直角△OMD中，$\angle OMD=90°$

$\therefore\overline{CD}$的弦心距$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{DM}^2}=\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

演練二

如右圖，$\overline{AB}$為兩同心圓中大圓的弦，$\overline{CD}$為小圓的弦，若$\overline{AB}=16$ 公分，$\overline{CD}=8$ 公分，

$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，則綠色區域的面積為多少平方公分？

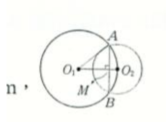
Sol）連接$\overline{OA}$、$\overline{OC}$，則綠色區域的面積$=\pi\times\overline{OA}^2-\pi\times\overline{OC}^2=\pi\times(\overline{OA}^2-\overline{OC}^2)$

$=\pi\times[(\overline{AM}^2+\overline{OM}^2)-(\overline{CM}^2+\overline{OM}^2)]=\pi\times(8^2-4^2)=48\pi$（平方公分）

Ans：48π 平方公分

師說三：【兩圓位置關係】

如右圖，設圓 O_1與圓O_2之公弦為$\overline{AB}$，若兩圓的半徑分別為 20*cm*、13*cm*，$\overline{AB}=24cm$，



求連心線段$\overline{O_1O_2}$之長。

Sol）$\because\overline{O_1O_2}$ 垂直平分$\overline{AB}$於 *M*　　$\therefore\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=12$

又$\overline{O_1A}=20$，$\overline{O_2A}=13$ $\therefore\overline{O_1M}=\sqrt{20^2-12^2}=16$　$\overline{O_2M}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

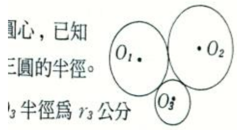
故$\overline{O_1O_2}=16+5=21$（*cm*）

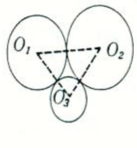
Ans：21*cm*

演練三

如右圖，O_1、O_2和O_3分別是兩兩相互外切的三圓的圓心，已知

$\overline{O_1O_2}=5$公分，$\overline{O_2O_3}=4$公分，





$\overline{O_3O_1}$=3公分，求此三圓的半徑？

Sol）1.設圓O_1半徑為r_1公分，圓O_2半徑為r_2公分，圓O_3半徑為r_3公分

2.連接$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$必分別過切點

$$\therefore \begin{cases} r_1+r_2=\overline{O_1O_2}=5\rightarrow(1) \\ r_2+r_3=\overline{O_2O_3}=4\rightarrow(2) \\ r_3+r_1=\overline{O_3O_1}=3\rightarrow(3) \end{cases}$$

把（1）＋（2）＋（3）得 2（$r_1+r_2+r_3$）＝12

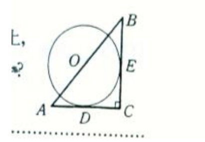
$\therefore r_1+r_2+r_3=6\rightarrow$（4）

把（4）－（1）得r_3=1，把（4）－（2）得r_1=2，把（4）－（3）得r_2=3

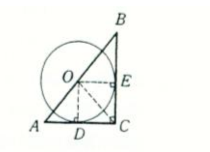
Ans：圓O_1半徑為 2 公分，圓O_2半徑為 3 公分，圓O_3半徑為 1 公分

師說四【圓與切線關係】

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，O 在$\overline{AB}$上，圓 O 與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$分別切於 D、E，r 為圓 O 的半徑，試求 $r=$？（以 a、b 表示）



Sol）連接$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$，則$\overline{OD}\perp\overline{AC}$，$\overline{OE}\perp\overline{BC}$

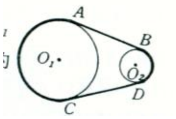


$\because \triangle ABC$ 面積＝AOC 面積＋$\triangle BOC$ 面積，即$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar$，$ab=r(a+b)$

$\therefore r=\frac{ab}{a+b}$

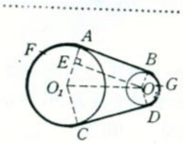
演練四

如右圖，圓O_1與圓O_2為兩輪子，此兩輪用一皮帶牽連，若圓O_1半徑為 20 公分，圓O_2半徑為 5 公分，$\overline{O_1O_2}=30$ 公分，求皮帶的長度。



Sol）1. 連接$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1C}$、$\overline{O_2B}$、$\overline{O_2D}$，$\overline{AB}$//$\overline{CD}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$

$=\sqrt{30^2-(20-5)^2}=15\sqrt{3}$（公分）



2. 過O_2作$\overline{O_1E}\perp\overline{O_1A}$，則$\overline{O_1E}=20-5=15\because\overline{O_1O_2}=30\therefore\overline{O_1E}=\frac{1}{2}\overline{O_1O_2}$

故$\angle AO_1O_2=60°\therefore\angle AO_1C=120°\Rightarrow\angle BO_2C=120°$

$\therefore \overset{\frown}{AFC}=2\pi\times20\times\frac{240°}{360°}=\frac{80}{3}\pi$（公分），$\overset{\frown}{BGD}=2\pi\times5\times\frac{120°}{360°}=\frac{10}{3}\pi$（公分）

【同步評量 1】

（ C ）1.已知兩等圓的半徑為 6 公分，若兩圓的外公切線長 13 公分，則兩圓的位置關係為何？

（A）內切　　（B）外切　　（C）外離　　（D）相交兩點

Sol）∵兩等圓的外公切線長＝連心線長∴連心線長 13＞6＋6　∴兩圓外離

（ A ）2.有大小兩圓，其面積比為 16：25，兩圓外切時，連心線長 18 公分，則兩圓內切時，其連心長是多少公分？

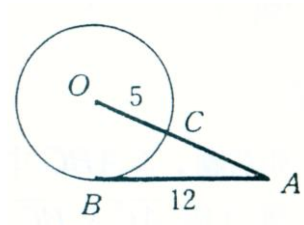
（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

Sol）面積比為 16：25⇒半徑比為 4：5

∴設兩圓半徑為 $4x$、$5x$

$4x+5x=18$，$x=2$⇒兩圓半徑為 8、10，故內切時連心線長＝10－8＝2（公分）

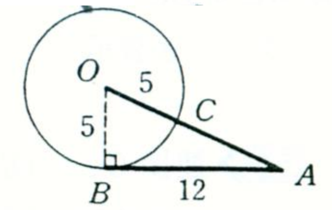
（ B ）3. $\overline{AB}$ 切圓 O 於 B，$\overline{AO}$ 交圓 O 於 C，$\overline{AB}=12$，$\overline{OC}=5$，求 $\overline{AC}$ 之長？



（A）5　　（B）8　　（C）13　　（D）15

Sol）（1）連接 $\overline{OB}$　∵ $\overline{AB}$ 為切線　∴ $\overline{OB}\perp\overline{AB}$

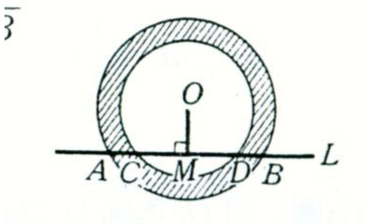
（2）∵ $\overline{AB}=12$，$\overline{OB}=\overline{OC}=5$



$\therefore \overline{OA}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

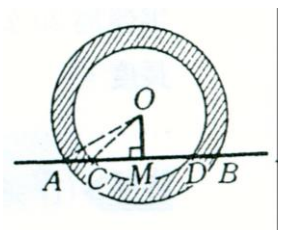
（3）$\therefore \overline{AC}=\overline{OA}-\overline{OC}=13-5=8$

（ C ）4.如右圖，直線 L 交兩同心圓於 A、C、D、B 四點，若 $\overline{AB}$ 的弦心距是 5 公分，$\overline{AB}=16$ 公分，$\overline{CD}=12$ 公分，兩圓所圍成的環形區域面積＝？



(A)26π　(B)27π　(C)28π　(D)29π（公分）

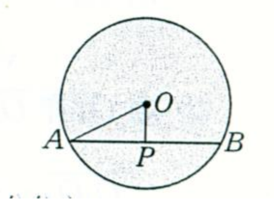
Sol）$\overline{OM}=5$公分，$\overline{AM}=8$公分，$\overline{CM}=6$公分



$\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2=64+25=89$，而$\overline{OC}^2=\overline{CM}^2+\overline{OM}^2=36+25=61$

環形區域面積＝$\pi g\overline{OA}^2-\pi g\overline{OC}^2=\pi(\overline{OA}^2-\overline{OC}^2)=\pi(89-61)=28\pi$（平方公分）

（ B ）5.已知 P 為圓 O 內部一點，且 $\overline{OP}=5$，而過 P 點的諸弦中，最長的弦其長度為 26 公分，則最短的弦其長度為多少公分？



（*A*）20　　（*B*）24　　（*C*）25　　（*D*）26

Sol）最長的弦就是直徑$\therefore r=\frac{1}{2}\times 26=13$連接$\overline{OA}$，$\overline{AP}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

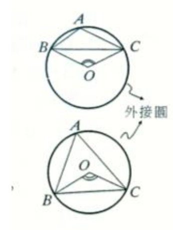
$\therefore \overline{AB}=2\times 12=24$（公分）

能力二：圓與三角形與四邊形的關係

一、△的外心性質與外接圓：心

（一）△的外心到三頂點等距離，且為Δ外接圓的圓

（二）若 O 為△ABC 的外心，則：



1.當$\angle A<90°$時，$\angle BOC=$<u>$2\angle A$。</u>

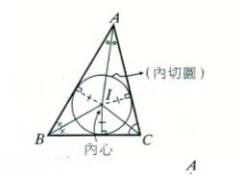
2.當$\angle A=90°$時，$\angle BOC=$<u>$180°$。</u>

3.當$\angle A>90°$時，$\angle BOC=$<u>$360°-2\angle A$。</u>

（三）若 O 為正△ABC 的外心，則$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$

二、△的內心性質與內切圓：

（一）△的內心到三邊等距離，且為△內切圓的圓心。



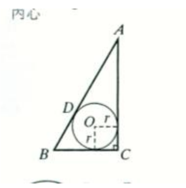
（二）若 I 為△ABC 的內心，則$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A$。

（三）若△ABC 的周長為 S，I 為內心，r 為內切圓半徑，則：

1. $\triangle AIB:\triangle BIC:\triangle BIC=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$。

2. $\triangle ABC=\frac{1}{2}sr$。

（四）在直角ΔABC 中，$\angle C=90°$，則其

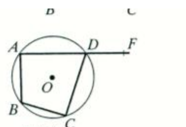


1.內切圓半徑 $r=\dfrac{\text{兩股和}-\text{斜邊長}}{2}=\dfrac{(\overline{AC}+\overline{BC})-\overline{AB}}{2}$。

2.外接圓半徑 $R=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$斜邊長。

三、圓內接四邊形性質：

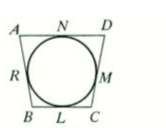
如圖㈡，四邊形 $ABCD$ 的圓內接四邊形，$\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle ADC=180°$，$\angle B=\angle CDF$。



圖㈡

※ 正方形、長方形和等腰梯形皆有一外接圓。

四、如圖㈢，四邊形 $ABCD$ 的四邊分別與圓相切，$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$。



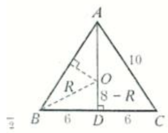
圖㈢

※ 正方形、菱形和鳶形皆有一內切圓。

師說五【圓與三角形的關係】

設等腰三角形底邊長 12，一腰長 10，求其內切圓半徑與外接圓半徑。

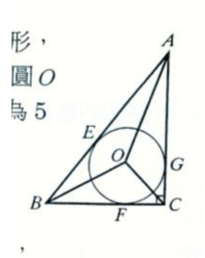
Sol）如右圖，ΔABC 周長$=12+10\times 2=32$



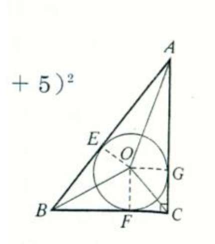
高 $\overline{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

演練五

如右圖，ΔABC 為直角三角形，$\angle C=90°$，ΔABC 的三邊切圓於 E、F、G，若圓 O 的半徑為 5，$\overline{OA}=13$，求 $\overline{BE}$ 長。



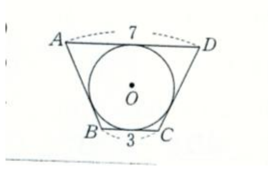
Sol）連接 $\overline{OF}$ 、$\overline{OG}$ 則OFCG是正方形 $\Rightarrow \overline{CF}=\overline{CG}=\overline{OG}=5$，



又 $\overline{AE}=\sqrt{13^2-5^2}=12=\overline{AG}$ ，設 $\overline{BE}=x=\overline{BF}$ $\because \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

師說六【圓與四邊形的關係】

如右圖，$ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形，若 $ABCD$ 的面積是 15，則圓 O 的半徑是多少？

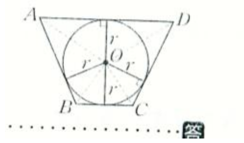


Sol）$\boxed{\text{關鍵：圓外切四邊形，兩組對邊長的和相等}}$

（1）$\because ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形

$\therefore \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}=10$

（2）$\triangle AOD+\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COD=$ 四邊形 $ABCD$ 面積



設圓半徑為 r

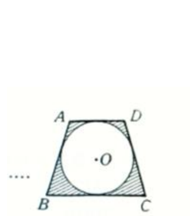
$\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD})\times r=15$

$\frac{1}{2}\times 20\times r=15$

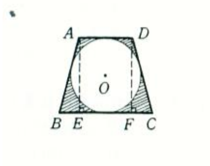
$10r=15$，$r=1.5$......................答

演練六

如右圖，梯形 $ABCD$ 外切於圓 O，且 $\overline{AB}=\overline{CD}$ ，$\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=5$ ，求圓 O 面積及斜線部分面積。



Sol）1. $\because \overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$ ，又 $\overline{AB}=\overline{CD}$



$\therefore 3+5=2\overline{AB}=2\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}=4$

2. 作高 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$ $\therefore \overline{BE}=\overline{CF}=\frac{5-3}{2}=1$

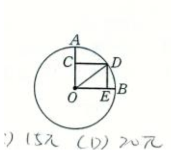
$\therefore \overline{AE}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15} \Rightarrow$ 圓O的半徑 $=\frac{\sqrt{15}}{2}$

3. 故圓 O 的面積＝$\pi\times(\frac{\sqrt{15}}{2})^2=\frac{\sqrt{15}}{4}$（平方單位）

4. 斜線部分面積＝梯形 $ABCD$ 面積－圓 O 面積＝$\frac{1}{2}\times(3+5)\times\sqrt{15}-\frac{15\pi}{4}=4\sqrt{15}-\frac{15\pi}{4}$（平方單位）

【同步評量 2】

（ B ）1.如右圖，$COED$ 為矩形，$\overline{CD}=4$，$\overline{DE}=3$，求圓 O 的周長＝？



（A）5π　（B）10π　（C）15π　（D）20π

Sol）連接$\overline{OD}$，$\overline{OE}=\overline{CD}=4$，$\overline{OD}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ∴圓O的周長＝$2\times5\times\pi=10\pi$

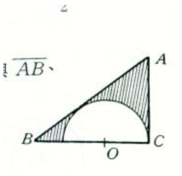
（ D ）2.等腰梯形 $ABCD$ 外切於圓 O，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，已知一腰$\overline{AB}=8$公分，則其中線長為多少公分？

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8（公分）

Sol）$\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}=8+8=16$

中線長＝$\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{AD})=\frac{1}{2}\times16=8$

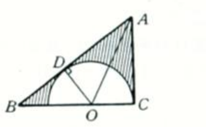
（ C ）3.如圖（十七），$\overline{AC}\perp\overline{BC}$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，半圓O之圓心在$\overline{BC}$上，半圓與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別相切，則斜線部分之面積為多少平方單位呢？



（A）$24-\frac{7}{2}\pi$　（B）$12-\frac{9}{2}$　（C）$24-\frac{9}{2}\pi$　（D）$12-\frac{7}{2}\pi$（平方單位）

Sol）（1）由$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AB}=10$

（2）設半圓的半徑為 r，則ΔABC 面積＝$\frac{1}{2}\times6\times8=24$（平方單位）



又$\triangle ABC=\triangle AOC+\triangle AOB$ 即 $24=\frac{1}{2}\times r\times6\times\frac{1}{2}\times10\times r$

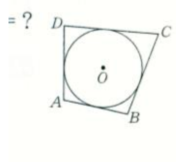
$24=3r+5r$，$8r=24r$

$\therefore r=3$

（3）斜線部分的面積＝（ΔABC 面積）－（半圓面積）

$=24-\frac{1}{2}\times\pi\times3^2=24-\frac{9}{2}\pi$（平方單位）

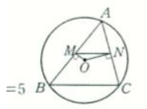
（ D ）4.右圖圓外切四邊形 $ABCD$ 中，若$\overline{AB}=7$，$\overline{CD}=10$，則$\overline{AD}+\overline{BC}=$？



（A）7　（B）10　（C）15　（D）17

Sol）∵圓外切四邊形中 $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{CD}+\overline{AB}=10+7=17$

（ A ）5.如右圖，在圓 O 中，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$是兩條弦，



$\overline{OM}\perp\overline{AB}$於M，$\overline{ON}\perp\overline{AC}$於N。若$\overline{BC}=10$，求$\overline{MN}=$？（$A$）5　（$B$）4　（$C$）6　（$D$）3.5

Sol）∵ $\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{AC}$

∴M、N 是 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點

∴ $\overline{MN}//\overline{BC}$，$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times10=5$

實力檢測

【基本觀念題】

（ A ）1.兩圓內切，其半徑比為 3：4，連心長為 14，則較大之圓的半徑為何？

（A）52　（B）46　（C）8　（D）6

Sol）設兩圓的半徑分別為 $3r$、$4r$ ∴$4r-3r=14$ ∴$r=14$ ∴大圓的半徑＝$4\times14=56$

（ B ）2 設圓 O 半徑為.$\sqrt{23}$，圓心 O 座標為（-2，3），直線 L 方程式為 $y=-1$，則下列敘述何者正確？

（A）L 為圓 O 的切線　（B）L 為圓 O 的割線

（C）L 與不相交　（D）依題意無法確定 L 與圓 O 的位置關係

Sol）圓心 O 到 L 的距離＝$|3-(-1)|=4$，而半徑$\sqrt{23}>4$ ∴L 為圓 O 的割線。

（ A ）3.兩圓共有四條公切線，如果半徑分別為 11 公分、K 公分，連心長 18 公分，則 K 的範圍為何？

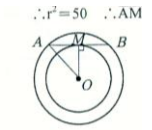
（A）$0<K<7$　（B）$11<K<18$　（C）$6<K<12$　（D）$0<K<5$

Sol）兩圓共有四條公切線∴兩圓外離∴連心長 $18>11+K$∴$K<7$，又 $K>0$∴$0<K<7$

（ D ）4.有兩個同心圓，已知大圓的半徑為 10 公分，且小圓面積為大圓面積的一半，若大圓的弦$\overline{AB}$與小圓相切，則$\overline{AB}$的長為？

（A)13　（B)12　（C)$10\sqrt{3}$　（D)$10\sqrt{2}$ 公分

Sol）設小圓的半徑為 r 公分∵小圓面積為大圓面積的一半



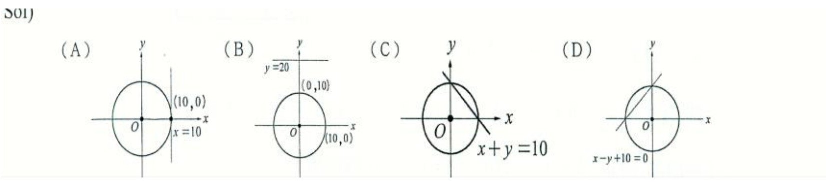
$\therefore$小圓面積＝$\frac{1}{2}\times(\pi\times10^2)=50\pi=\pi r^2$

$\therefore r^2=50\ \therefore\ \overline{AM}=\sqrt{10^2-r^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$（公分）。

$\therefore\overline{AB}=2\times5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$（公分）

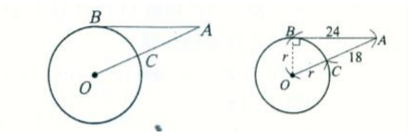
（ *A* ）5.已知圓 O 的半徑為 10，且圓心位於直角座標平面上的原點上，則此圓與下列哪一條直線僅有一交點？

（*A*）$x=10$　（*B*）$y=20$　（*C*）$x+y=10$　（*D*）$x-y+10=0$



（ *C* ）6.如圖，$\overline{AB}$ 切圓 O 於 B，$\overline{AO}$ 交圓 O 於 C，若 $\overline{AB}=24$，$\overline{AC}=18$，則圓 O 之面積為何？

（A）81π（B）64π（C）49π（D）25π

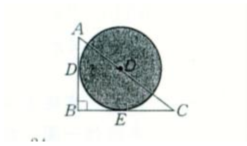


Sol）設圓 O 的半徑為 r. $\therefore(18+r)^2=r^2+24^2$，$324+36r+r^2=r^2+576$，

$36r=252$，$r=7$ $\therefore$圓O面積＝$\pi\times7^2=49\pi$

（ *D* ）7.如右圖，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$且$\overline{AB}$、$\overline{BC}$為圓O之切線，D、E為切點。$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，則圓 O 之半徑為多少？

（A）4　（B）5　（C）$\frac{48}{5}$　（D）$\frac{24}{7}$

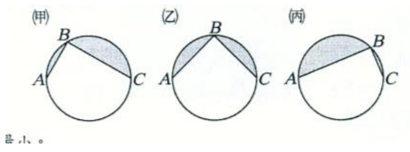


Sol）連$\overline{OD}$、$\overline{OE}$ ⇨ $\overline{OD}\perp\overline{AB}$，$\overline{OE}\perp\overline{BC}$ $\overline{OE}$，$\overline{OD}=\overline{OE}$ 又△*AOB*＋△*BOC*＝△*ABC*

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times8\times r=\frac{1}{2}\times6\times8,\ 6r+8r=48,\ r=\frac{24}{7}$$

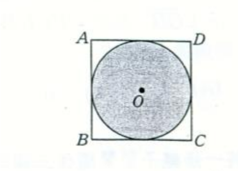
（ *C* ）8.雖然髮禁解除了，但某國中仍有髮型規定，下圖為男生的髮型圖示，在（甲）圖中$\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，（乙）圖中$\overline{AB}=\overline{BC}$，（丙）圖中$\overline{AB}=3\overline{BC}$，哪一種髮型頭髮部分（斜線）的面積最大？

（*A*）甲　（*B*）乙　（*C*）丙　（*D*）都一樣大



Sol）（丙）圖中的△*ABC* 面積最小。

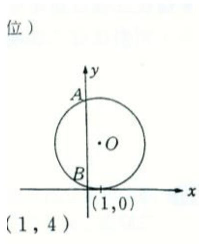
（ *C* ）9.有一正方形 *ABCD*，若邊長 $\overline{AB}=8$ 則此正方形的內切圓面積＝？



（A）36π　　（B）24π　　（C）16π　　（D）9π

Sol）$\pi\times(\frac{8}{2})^2=\pi\times4^2=16\pi$（平方單位）

（ *C*)10.如圖㈤，圓 O 與 x 軸相切於（1，0）交 y 軸於 A（$0，4+\sqrt{15}$），B（$0，4-\sqrt{15}$）



，則圓 O 之面積為？

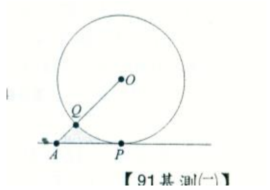
（A）14π　　（B）15π　　（C）16π　　（D）17π

Sol）$\overline{\mathrm{AB}}$之終點座標為（0，4）∴圓心 O 之座標為（1，4）又切點為（1，0）

$\Rightarrow$ 半徑 $r=4$ ∴圓面積為 16π

【溫故歷屆基測試題】

（ *A* ）1.如右圖，$\overline{\mathrm{AP}}$ 切圓 O 於 P 點，$\overline{\mathrm{AP}}=4$、$\overline{\mathrm{AO}}=4\sqrt{2}$，求灰色部分的



面積？【91 基測二】

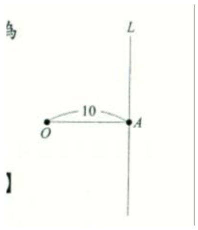
（A）$8-2\pi$　　（B）$8-4\pi$　　（C）$16-2\pi$　　（D）$16-4\pi$

Sol）（1）連接 $\overline{\mathrm{OP}} \Rightarrow \overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{AP}} \Rightarrow \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=\sqrt{16}=4$

∴ ΔAOP 為 45°、45°、90°的三角形

（2）灰色面積＝ΔAOP－扇形 POQ＝$\frac{4\times4}{2}-4\times4\times\pi\times\frac{45}{360}=8-2\pi$

（ *D* ）2.如圖，直線 L 與 $\overline{\mathrm{OA}}$ 垂直，垂足為 A，$\overline{\mathrm{OA}}=10$。現以 O 為圓心，r 為半徑

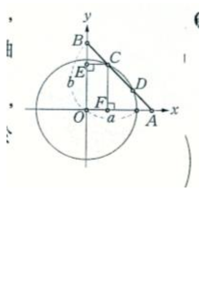


作一圓，請問當 r 為下列哪一個值時，可使 L 為此圓的割線？

（*A*）5　　（*B*）8　　（*C*）10　　（*D*）13　　　【91 基測二】

Sol）$r>10$ ∴取 $r=13$

（ *A* ）3.如圖，圓的圓心為圓點 O，半徑為 a；A、F 兩點在 x 軸上，直線 $\overline{\mathrm{AB}}$ 方程式



為 $s+y=b$，且 $b>a$。若 $\overline{\mathrm{AB}}$ 與圓 O 交於 C、D 兩點，且 $\overline{\mathrm{CF}}\perp\overline{\mathrm{OA}}$，$\overline{\mathrm{CE}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$。

矩形 OFCE 中，對角線 $\overline{\mathrm{EF}}$＝？【94 基測一】

（A）a　　（B）b　　（C）$\frac{a+b}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

Sol）$\boxed{\text{關鍵：矩形兩對角線等長}}$

∵$OFCE$ 是矩形∴ $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{OC}}=a$

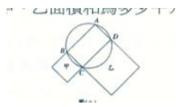
(D) 4.將一條繩子緊緊圈住三個伍元硬幣，如右圖所示。若伍元硬幣的半徑是 1 公分，則圈住這三個硬幣的繩子長度是多少公分？【92 基測一】

（A）9 （B）12 （C）$\pi+6$ （D）$2\pi+6$

Sol）繩子可區分為三個圓心角為 120°的弧與三條連心線（如右圖）

繩子常＝$2\times1\times\pi\times\dfrac{120}{360}\times3+(1+1)\times3=2\pi+6$（公分）

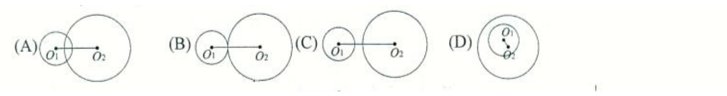
(D) 5.如圖(八)，有一圓及長方形 $ABCD$，其中 A、B、C、D 四點皆為原上且 $\overline{BC}>\overline{CD}$。今分別以 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 為邊長作甲、乙兩正方形。若圓半徑為 1.5 公分，則甲、乙面積和為多少平方公分？【95 基測一】



（A）4.5 （B）6 （C）7.5 （D）9

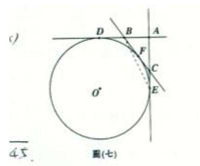
Sol）∵ $\angle BCD=90°$，$\overline{BD}$ 為直徑，甲、乙面積和＝$\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{BD}^2=(1.5\times2)^2=9$

(C) 6.若平面上 O_1 即圓 O_2 的半徑各為 2 公分及 4 公分，且 $\overline{O_1O_2}=7$ 公分，則下列哪一個圖可以表示圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係？【90 基測一】



Sol）$\overline{O_1O_2}>r_1+r_2\Rightarrow7>2+4\Rightarrow$ 外離

(C) 7.如圖(七)，ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$，若三直線 AB、AC、BC、分別與圓 O 切於 D、E、F 三點，則 $\overline{BE}=$？【95 基測一】



（A）6 （B）$\dfrac{25}{3}$ （C）$\sqrt{45}$ （D）$\sqrt{72}$

Sol）∵ $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 均為切線 ∴ $\overline{BD}=\overline{BF}$，$\overline{CF}=\overline{CE}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$

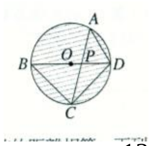
設 $\overline{BD}=\overline{BF}=x\Rightarrow\overline{CF}=\overline{CE}=5-x$，$\overline{AD}=\overline{AE}$

$3+x=4+(5-x)$，$2x=9-3=6$，$x=3$，$\overline{AE}=6$，$\overline{BE}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$

(C) 8.如圖，$\overline{BD}$ 為圓O的直徑，弦 $\overline{AC}$ 為過圓心 O，則下列哪一個敘述是正確的？【93 基測一】

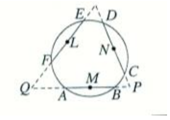
（A）O 是 ΔPCD 的外心 （B）O 是 ΔAPC 的外心

（C）O 是 ΔACD 的外心 （D）O 是 ΔBCD 的外心



Sol）外心 $\Rightarrow$ 三角形的外接圓圓心 $\Rightarrow\Delta ACD$ 各頂點在圓上

（ *D* ）9.如圖，圖上三弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，欲在圓內找一點，使其到三弦的距離相等。下列四種作法，哪一種最正確？【92 基測二】



（*A*）作 $\overline{AB}$ 中垂線與 $\overline{CD}$ 中垂線的交點

（*B*）作 $\angle FAB$ 角平分線與 $\angle ABC$ 角平分線的交點

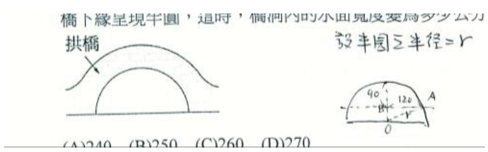
（*C*）取 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{EF}$ 三邊終點 *M*、*N*、*L*，作 $\overline{MN}$ 中垂線與 $\overline{ML}$ 中垂線的交點

（*D*）分別延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 *P*，分別延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{EF}$ 交於 *Q*，作 $\angle P$ 角平分線與 $\angle Q$ 角平分線的交點

Sol）（1）欲作點到 $\overline{AB}$、$\overline{EF}$ 等距離，則該點在 $\angle Q$ 的角平分線上

（2）同理，欲作點到 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 等距離，則該點在 $\angle P$ 角平分線上

（ *B* ）10.圖為一拱橋的側面圖，其拱下緣呈一弧形，若洞頂為橋洞的最高點，且如當洞頂至水面距離為 90 公分時，量得洞內水面寬為 240 公分。後因久旱不雨，水面位置下降，使得拱橋下緣呈半圓，這時，橋洞內的水面寬度變為多少公分？【91 基測一】



（*A*）240　　（*B*）250　　（*C*）260　　（*D*）270

Sol）設半圓之半徑＝*r*，

$\overline{BO}$＝r－90，$\triangle OAB$中，

$r^2=120^2+(r-90)^2$ $r=125$，

水面寬＝125×2＝250

【模擬基測試題】

（ *D* ）1.若兩圓的半徑分別為 *m*、*n*（*m*＞*n*），*d* 為連心線長，且 $m^2+d^2-n^2=2md$，則兩圓位置關係為何？

Sol）$\because m^2+d^2-n^2=2md$ $\therefore m^2-2md+d^2-n^2=0$

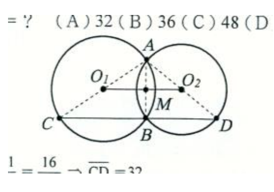
$(m-d)^2-n^2=0\Rightarrow(m-d+n)(m-d-n)=0$

$\therefore m-d+n=0$或$m-d-n=0$

$\therefore m+n=d$或$m-n=d$

∴兩圓外切或內切

（ *A* ）2.如圖，圓 O_1、O_2 相交於 *A*、*B* 兩點，過 *B* 點作一平行於連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的



直線，分別交於 C、D，若 $\overline{O_1O_2}=16$，則 $\overline{CD}=$？（A）32（B）36（C）48（D）64

Sol）$\because \overline{AM}=\overline{BM}\ \therefore \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{O_1O_2}}{\overline{CD}}\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{16}{\overline{\overline{CD}}}\Rightarrow \overline{CD}=32$ 設

（ C ）3.有大小兩圓，小圓面積是大圓面積的 9%，兩圓內切時，連心線長 7 公分，則兩圓外切時，連心線長？

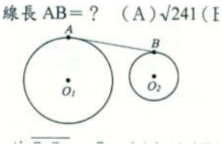
（A）12　（B）14　（C）13　（D）15

Sol）面積比＝半徑平方比 $\therefore \dfrac{r_{小}{}^{2}}{r_{大}{}^{9}}=9\%=\dfrac{9}{100}\therefore \dfrac{r_{小}}{r_{大}}=\dfrac{3}{10}$

$r_{小=3公分}, r_{大=10公分}$ $\because$ 兩圓內切 $\therefore$ 連心線長 $=10r-3r=7r=7$

$\therefore r=1$　$\therefore r_{小=3公分}, r_{大=10公分}$ $\therefore$ 兩圓外切時之連心線長 $=3+10=13$（公分）

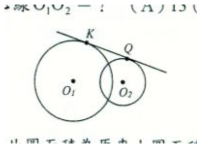
（ D ）4.如圖，圓 O_1 的半徑為 6，圓 O_2 半徑為 3，$\overline{O_1O_2}=16$，則公切線長 $\overline{AB}=$？



（A）$\sqrt{241}$　（B）$\sqrt{243}$　（C）$7\sqrt{5}$　（D）$\sqrt{247}$

Sol）$\overline{AB}=\sqrt{\overline{O_1O_2}-（r_1-r_2）}=\sqrt{16^2-(6-3)}=\sqrt{247}$

（ A ）5.如圖。若 $\overline{KQ}=12$，圓 O_1 的半徑為 8，圓 O_2 半徑為 3，則連心線 $\overline{O_1O_2}=$？



（A）13　（B）12　（C）10　（D）9

Sol）$\overline{O_1O_2}=\sqrt{\overline{KQ}^2+（r_1-r_2）^2}=\sqrt{12^2+（8-3）}=13$

（ D ）6.圓中所有「長度為半徑的 $\dfrac{6}{5}$ 倍」的弦，其中形成另一個圓，則此圓面積為原來大圓面積的幾倍？

（A）$\dfrac{1}{4}$（B）$\dfrac{4}{9}$（C）$\dfrac{9}{25}$（D）$\dfrac{16}{25}$

Sol）設圓的半徑 $\overline{OA}=r\therefore \overline{AB}=\dfrac{6}{5}r\therefore \overline{AM}=\dfrac{3}{5}r$

$\therefore$ 此圓半徑 $\overline{OM}=\sqrt{r^2-(\dfrac{3}{5}r)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{25}r^2}=\dfrac{4}{5}r$

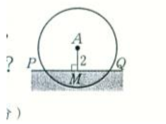
（ B ）7.兩圓半徑分別為 a、b（$a>b$），連心線長為 c，若 $a^2-b^2+c^2-2ac<0$，則此兩圓關係為何？

（A）相切　（B）相交於兩點　（C）不相交　（D）無法判斷

Sol）∵ $a^2-b^2+c^2-2ac<0$ ∴（$a-c)^2-b^2<0 \Rightarrow (a-c+b)(a-c-b)<0$

∵三角形的任兩邊長和＞另一邊長 ∴ $a+b-c>0$，且$a-c-b<0$ ∴$a+b>c$∴兩圓相交於兩點

（ *C* ）8.有厚度相同的 *A*、*B*、*C*、*D* 四種硬幣，直徑分別為 5 公分、4 公分、3 公分、2 公分，欲投入一個撲滿中，結果 *A* 種硬幣無法投入，如右圖，已知該硬幣圓心距離撲滿入口 2 公分，試問哪幾種硬幣可以投入該撲滿？

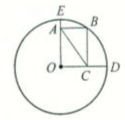


（*A*）只有 *B*、*C*　（*B*）只有 *D*、*B*　（*C*）只有 *C*、*D*　（*D*）只有 *D*

∵ $\overline{PA}=5\div2=25$,$\overline{PM}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$,$\overline{PQ}=1.5\times2=3$

∴撲滿入口長度$\overline{PQ}=3$（公分）故 *C*、*D* 硬幣可以投入撲滿。

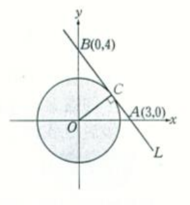
（ *B* ）9.如右圖，長方形 *ABCD* 在圓 *O* 內，且$\overline{CD}=2$,$\overline{AC}=5$，則圓 *O* 的半徑為多少？



（*A*）3　（*B*）5　（*C*）7　（*D*）6

Sol）$\overline{OB}=\overline{AC}=5$

（ *A* ）10.座標平面上，設直線 *L* 通過 *A*（3，0），*B*（0，4）兩點，有一半徑為 *r* 的圓 *O*，其圓心是原點。已知直線 *L* 和圓 *O* 相切，求 *r*＝？



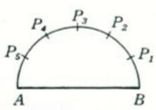
（*A*）2.4　（*B*）2.5　（*C*）3　（*D*）3.2

Sol）作$\overline{OC}\perp\overline{AB}$∵$\overline{OA}=3$,$\overline{OB}=4$ $\angle AOB=90^\circ$∴$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$$\text{VABO面積}=\frac{\overline{OC}\times5}{2}=\frac{3\times4}{2}\therefore\overline{OC}=2.4\therefore r=2.4$$

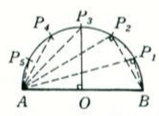
【進階演練題】

（ B ）1.如右圖，將半徑為 2 的半圓 *AB* 分成 6 等分設等分點依序為 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5,則五個弦長的平方和$\overline{AP_1}^2+\overline{AP_2}^2+\overline{AP_3}^2+\overline{AP_4}^2+\overline{AP_5}^2=$？



（*A*）20　（*B*）40　（*C*）60　（*D*）70

Sol）P_1, P_2, P_3, P_4, P_5,把半圓分成 6 等分$\Rightarrow\overline{AP_5}=\overline{BP_1}$,$\overline{AP_4}=\overline{BP_2}$

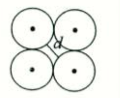


$$\begin{cases}\overline{AP_1}^2+\overline{AP_2}^2=+\overline{AP_1}^2+\overline{AP_1}^2=4^2=16\\ \overline{AP_2}^2+\overline{AP_4}^2=\overline{AP_2}^2+\overline{AP_2}^2=4^2=16\\ \overline{AP_3}^2=\overline{AO}^2+\overline{OP_3}^2=4+4=8\end{cases}$$

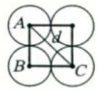
∴ $\overline{AP_1}^2+\overline{AP_2}^2+\overline{AP_3}^2+\overline{AP_4}^2+\overline{AP_5}^2=16+16+8=40$

（ D ）2.如右圖的四個外切等圓中，若不相切兩圓的最短距離 d 都是 10 公分，則圓的半徑 r＝？

(A)$3-3\sqrt{2}$(B)$3+3\sqrt{2}$(C)$5-5\sqrt{2}$(D)$5+5\sqrt{2}$（公分）



Sol）設圓的半徑為 r，則 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{BC}=2r$，$\overline{AC}=2r+10$，$\angle B=90^o$



$\therefore (2r+10)^2=(2r)^2+(2r)^2$，$4r^2+40r+100=4r^2+4r^2$

$\therefore 4r^2-40r-100=0$，$r^2-10r-25=0$

$\therefore r=\dfrac{10\pm\sqrt{100+4\times1\times25}}{2}=\dfrac{10\pm\sqrt{200}}{2}=\dfrac{10\pm10\sqrt{2}}{2}=5\pm5\sqrt{2}$（$5-5\sqrt{2}<0$ 不合）

$\therefore r=5+5\sqrt{2}$（公分）

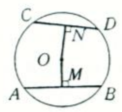
（ D ）3.有大小兩圓，外切時的連心線長是內切時的 2 倍，則此兩圓的面積比為何？

（A）2：1　（B）3：1　（C）4：1　（D）9：1

Sol）設兩圓外切、內切時連心線長分別為 $2x$、x，兩圓的半徑分別為 a、b，$a>b$ 則 $\begin{cases}a+b=2x\\ a-b=x\end{cases}$，解連立方程式得 $a=\dfrac{3}{2}x$，$b=\dfrac{1}{2}x$

兩圓的面積比等於 $\pi\times(\dfrac{3}{2}x)^2:\pi\times(\dfrac{1}{2}x)^2=\dfrac{4}{9}:\dfrac{1}{4}=9:1$

（ B ）4.如圖㈠，$\overline{AB}=8$ 公分，$\overline{CD}=6$ 公分，且 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$，若 $\overline{OM}=3$ 公分，則 $\overline{ON}$＝？



（A）3 公分　（B）4 公分　（C）5 公分　（D）6 公分

Sol）$\because \overline{OM}\perp\overline{AB}$ $\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=4$

$\because \overline{ON}\perp\overline{CD}\Rightarrow \overline{CN}=\overline{DN}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=3$，又 $\overline{OM}=3$

得 $\overline{OA}^2=\overline{OM}^2+\overline{AM}^2=9+16=25=\overline{OD}^2\Rightarrow \overline{OA}=5=\overline{OC}$

$\overline{OC}^2=\overline{ON}^2+\overline{CN}^2$，$25=\overline{ON}^2+9\Rightarrow \overline{ON}^2=16$ $\therefore \overline{ON}=4$

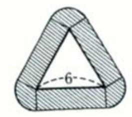
（ C ）5.相交兩圓的半徑分別是 $\sqrt{7}-1$ 和 $\sqrt{7}+1$，連心線的長是 d，則 d 可取的整數有幾個？

（A）1 個　（B）2 個　（C）3 個　（D）4 個

Sol）$\because (\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)<d<(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)$

$\Rightarrow 2<d<2\sqrt{7}$ $\because$ 為整數 $\therefore d=3$、4、5

（ C ）6.若兩圓的半徑分別為 R、r（$R>r$），d 為連心線的長，且 $R^2-d^2-r^2=2Rd$，則兩圓位置為



數老

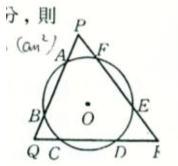
（A）外切　　（B）內切　　（C）內切或外切　　（D）外離或內離

Sol）$R^2-2Rd+d^2-r^2=0$，$(R-d)^2-r^2=0$，$(R-d+r)(R-d-r)=0$

$\therefore d=R+r$（外切）或 $d=R-r$

（ A ）7.如右圖，圓 O 交 ΔPQR 於 A、B、C、D、E、F，若圓 O 的半徑為 5 公分，

$\overline{PQ}=13$公分，$\overline{QR}=14$公分，$\overline{RP}=15$公分，$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=6$公分，則$\triangle PQR$面積＝？



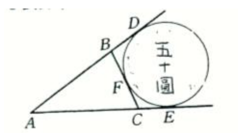
（A）84　　（B）74　　（C）64　　（D）54（平方公分）

Sol）$\because$ $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$弦心距$=\sqrt{5^2-3^2}=4$　$\therefore \triangle PQR=\triangle POQ+\triangle QOR+\triangle ROP$

$=\frac{1}{2}\times 13\times 4+\frac{1}{2}\times 14\times 4+\frac{1}{2}\times 15\times 4=26+28+30=84$（平方公分）

（ D ）8.如下圖，$\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BC}$分別切圓於D、E、F，若切線$\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$之長均為 8 公分，則

ΔABC 之週長為？



（A）13　　（B）14　　（C）15　　（D）16 公分

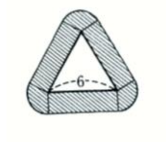
Sol）$\because$ $\overline{BF}=\overline{BD}$，$\overline{CF}=\overline{CE}$ $\therefore \triangle ABC$之周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{CF}+\overline{AC}$

$=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{AE}=8+8=16$（公分）

（ D ）9.一正三角形的邊長為 6 公分，今有一銅板，半徑為 1 公分，在三角形外，緊沿周界移動一周，則其所經過區域面積為？

（A）$(18+\pi)$ 平方公分　　（B）$(18+4\pi)$ 平方公分

（C）$(36+\pi)$ 平方公分　　（D）$(36+4\pi)$ 平方公分



Sol）所求面積（如右圖）

＝3 個矩形面積＋3 個扇形面積

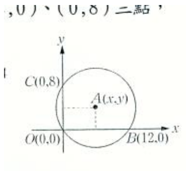
$=3\times(6\times 2)+3\times(\pi\times 2^2\times\frac{120}{360})$

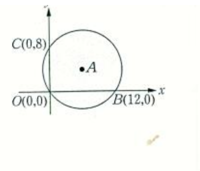
$=36+4\pi$（平方公分）

（ B ）10.如右圖，圓 A 與兩軸交於（0，0）、（12，0）、（0，8）三點，則圓心 A 點的座標為何？

（A）（4，4）　　（B）（6，4）　　（C）（4，6）

（D）（6，6）





Sol）$x=\frac{0+12}{2}=6$，$y=\frac{0+8}{2}=4$　$\therefore A(6,4)$