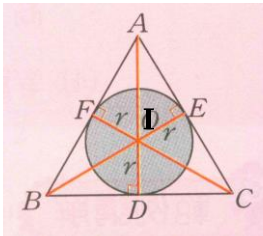
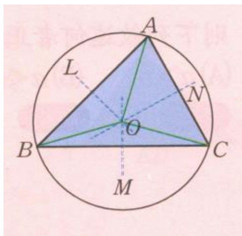
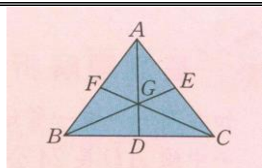
Unit 18 三角形的幾何推理

能力指標：◎（S-4-01）能根據給定的性質作局部推理。
◎（S-4-09）能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。

能力一：三角形的內心、外心、重心

一、三角形的內心、外心、重心的重要性質一覽表

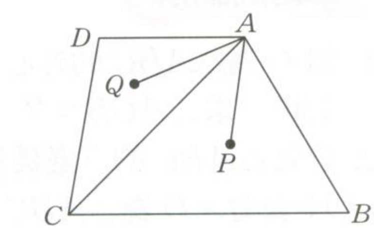
	內心	外心	重心
定義	三內角平分線的交點（內切圓的圓心）	三邊垂直平分線的交點（外接圓的圓心）	三中線的交點
位置	恆在三角形內部	銳角：三角形內部 直角：斜邊中點 鈍角：三角形外部	恆在三角形內部
性質	到三邊等距離	到三頂點等距離	比較靠近邊（$\frac{1}{3}$中線 ）
內心公式	1. $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$（內切圓半徑） 2. $\triangle ABI:\triangle BCI:\triangle ACI=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}$ 3. $\angle$BIC=90°+$\frac{1}{2}\angle BAC$ 4. △ABC 面積=$r\times s$ ， $s=\frac{1}{2}$周長 5. 直角⊿的內切圓半徑=$\frac{1}{2}$(兩股和－斜邊) 		
外心公式	1. $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R$（外接圓半徑） 2. 當$\angle A<90°$, $\angle BOC=2\angle A$, 當$\angle A>90°$, $\angle BOC=360°-2\angle A$ 3. 正△的邊長為 a，則外心到頂點的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，外心到邊的距離為$\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 。 		
重心公式	1. $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD},\ \overline{DG}=\frac{1}{3}\overline{AD}$（另兩條中線其重心位置的比例亦同） 2. △ABG=△BCG=△ACG=$\frac{1}{3}\triangle ABC$ 		

	3.△AFG=△BFG=△AEG=△CEG=△BDG=△CDG=$\frac{1}{6}\triangle ABC$

【三角形的內心】

講解一：

如右圖，四邊形 ABCD 中，∠B=60°、∠DCB=80°、∠D=100°。若 P、Q 兩點分別為△ABC 與△ACD 的內心，則∠PAQ=？【94 基測 1】



sol) ∠DAB=360°-60°-80°-100°,

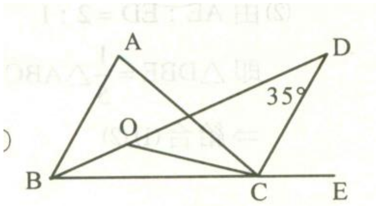
∵P,Q分別是△ABC與△ACD的內心,

$\therefore \angle$PAQ=$\frac{1}{2}\angle DAC+\frac{1}{2}\angle CAB=\frac{1}{2}\left(\angle DAC+\angle CAB\right)$

$=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$

練習一：

如右圖 O 為△ABC 之內心，$\overline{CD}$ 為∠ACE 之角平分線，若∠D=35°，請問∠A=？



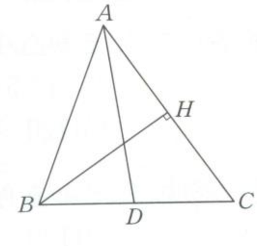
sol) $\angle ACE=\angle A+\angle B,\ \angle DCE=35^\circ+\frac{1}{2}\angle B,$

$\because$ ∠DCE=$\frac{1}{2}\angle ACE,\ \therefore \frac{1}{2}\angle A=35^\circ,\ \angle A=70^\circ$

【三角形的外心】

講解二：

如右圖，$\overline{AD}$ 是△ABC 的中線，H 點在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{BH}\perp\overline{AC}$，若 $\overline{AB}=12$、$\overline{BC}=10$、$\overline{AC}=14$，連接 $\overline{DH}$，則 $\overline{DH}=$？【94 基測 2】



sol) $\because$ △BCH為直角三角形, ∠BHC=90°, D為$\overline{\text{BC}}$之中點,

$\Rightarrow$ D點為△BHC之外心,

$\therefore \overline{DH}=\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

練習二：

有一鈍角△ABC，$\overline{AB}=\overline{AC}$，O 為其外心，若∠BOC=120°，$\overline{AB}=8$，則∠A=？又△ABC 之外接圓面積為何呢？

Sol) (1) $\because \triangle ABC$為鈍角三角形

$\angle BOC = 360° - 2\angle A \Rightarrow \angle A = 120°$

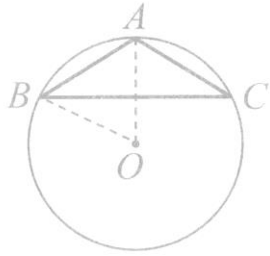
(2) $\because \overline{AB} = \overline{AC},\ \angle A = 120°$

$\therefore \angle C = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$

$\angle AOB = 2\angle C = 60°$

$\Rightarrow \triangle AOB$為正三角形, $\overline{AO} = \overline{AB} = 8$

$\Rightarrow$ 外接圓面積 $= \pi \times 8^2 = 64\pi$(單位^2)



【三角形的重心】

講解三：

已知△ABC 的三頂點座標為 A（0,3）、B（2,0）、C（-2,0），則△ABC 的重心座標為何呢？

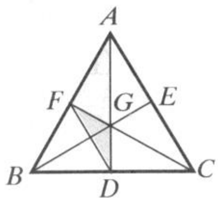
Sol) $\because \overline{BC}$的中點座標為O$(0,0)$,

重心G位於$\overline{AO}$上, $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AO} = 2$

$\therefore G$點座標為$(0,1)$

練習三：

如右圖，正△ABC 的三條中線$\overline{AD},\ \overline{BE},\ \overline{CF}$ 交於 G 點，且其邊長為 12cm，請問△AFG 及△DFG 的面積為何呢？



Sol) (1) $\triangle AFG$面積 $= \frac{1}{6}\triangle ABC$面積 $= \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 6\sqrt{3}\,(cm^2)$

(2) $\frac{\triangle DFG}{\triangle AFG} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}} = \frac{1}{2},\ \triangle DFG$面積 $= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,(cm^2)$

【十分鐘即時練習】

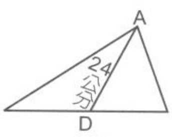
（C）1.學校工友想利用三角形各種心的性質，在三角形花圃內部找一個位置插上花圃說明牌，下列哪兩點一定都可以滿足她的願望呢？（A）垂心和重心（B）垂心和外心（C）重心和內心（D）內心和外心。

（D）2.若△ABC 的三個頂點座標為 A（2,1）、B（4,1）、C（4,9），則此三角形之外心座標為何呢？（A）(3,1)（B）(4,5)（C）(3,4)（D）(3,5)。

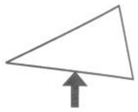
Sol) 由座標位置可知△ABC 為直角三角形，故外心為斜邊中點。

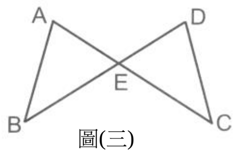
（B）3.如下圖（一），有一質地均勻的三角形鐵片，其中依中線 $\overline{AD}$ 長 24 公分，

若阿龍享用食指撐住此鐵片，如下圖（二），則支撐點應設在 $\overline{AD}$ 上的何處最恰當呢？（A）距離 D 點 6 公分處（B）距離 D 點 8 公分處（C）距離 D 點 12 公分處（D）距離 D 點 16 公分處。【91.基測（1）】



圖(一)


圖(二)



圖(三)

（D）4.如上圖（三），$\overline{AB}=\overline{DC},\ \overline{AC}=\overline{BD}$，請問下列敘述何者為非呢？（A）∠AED=∠BAE+∠ECD（B）△DCE 與△ABE 面積相等（C）∠AEB=∠DEC（D）∠CDE>∠BAE。

（A）5.設 G 點為正△ABC 的重心，$\overline{AB}=20$，請問 $\overline{AG}=$？（A）$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$（B）$\dfrac{18\sqrt{3}}{3}$（C）$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$（D）$\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$。

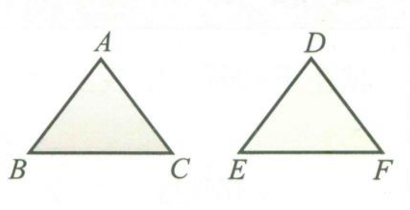
能力二：三角形的全等性質

一、三角形全等的定義：若△ABC 與△DEF 疊合後，∠A 與∠D、∠B 與∠E 及∠C 與∠F 可以完全重合，吾人可以稱△ABC 與△DEF 全等，簡記為 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且此兩三角形具有下列性質：

（1） 各對應角相等（∠A=∠D、∠B=∠E、∠C=∠F）

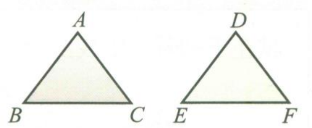
（2） 各對應邊相等（$\overline{AB}=\overline{DE},\ \overline{BC}=\overline{EF},\ \overline{AC}=\overline{DF}$）

（3） 面積相等（△ABC=△DEF）

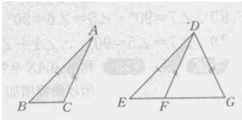


二、三角形的全等性質一覽表

假設：任意兩三角形△ABC 與△DEF（如右圖）：



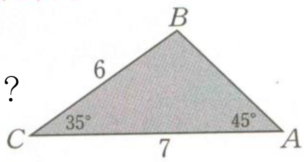
全等性質簡稱	條　　件	判　　斷
SSS	$\overline{AB}=\overline{DE},\ \overline{AC}=\overline{DF},\ \overline{BC}=\overline{EF}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$
SAS	$\angle A=\angle D,\ \overline{AB}=\overline{DE},\ \overline{AC}=\overline{DF}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

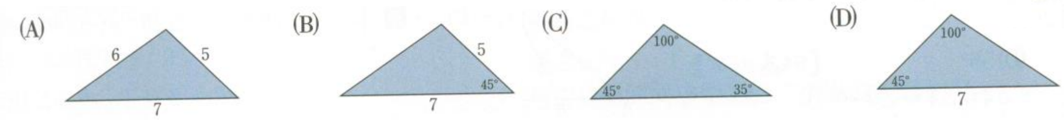
ASA	$\angle A=\angle D,\ \angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{E},\ \overline{AB}=\overline{DE}$	$\triangle ABC\cong\triangle DEF$
AAS	$\angle A=\angle D,\ \angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{E},\ \overline{BC}=\overline{EF}$	$\triangle ABC\cong\triangle DEF$
RHS	$\angle B=\angle E=90°$, 斜邊 ： $\overline{AC}=\overline{DF}$, 任一股 ： $\overline{BC}=\overline{EF}$ $\left(或\overline{AB}=\overline{DE}\right)$	$\triangle ABC\cong\triangle DEF$ （僅適用於直角三角形）
SSA （非全等性質）	$\overline{AB}=\overline{DE},\ \angle B=\angle E,\ \begin{cases}\overline{AC}=\overline{DG}(全\quad 等)\\ \overline{AC}=\overline{DF}(非全等)\end{cases}$ 	$\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 或 $\triangle ABC\ncong\triangle DEF$

【全等性質的判別】

講解一：

如右圖所示，已知△ABC，則下列哪一個選項中的圖形與△ABC 全等呢？

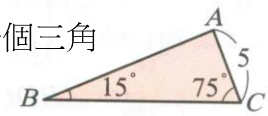


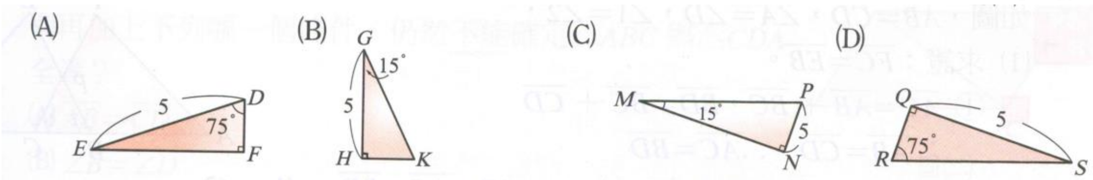


sol) （D）的圖形與△ABC 全等，根據 AAS 性質。

練習一：

如右圖所示，△ABC 中，∠B=15°、∠C=75°、$\overline{AC}=5$，請問下列哪一個三角形與△ABC 全等呢？



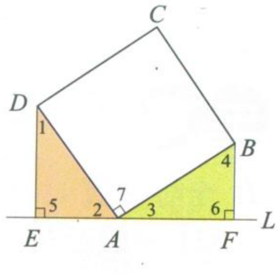


sol) （C）根據已知條件可知∠A=90°，所以$\triangle ABC\cong\triangle NMP$（AAS or ASA）

【三角形全等的證明】

講解二：

如右圖，已知 ABCD 是正方形，A 在 L 上，$\overline{DE}\perp L$，$\overline{BF}\perp L$，垂足分別為 E、F（$\overline{AE}\neq\overline{AF}$）。求證：$\triangle ADE\cong\triangle BAF$



證明：（1）Q $ABCD$為正方形, $\therefore \overline{AB}=\overline{AD},\ \angle 7=90°$

（2）又$\because \overline{DE}\perp L,\ \overline{BF}\perp L,\ \therefore \angle 5=\angle 6=90°$

（3）____（甲）____

（4）$\therefore \triangle ADE\cong\triangle BAF$

試從下列選項中，選出可填入（甲）中的正確證明過程。【90.基測（1）】

（A）$\because \overline{DE}\perp L,\ \overline{BF}\perp L,\ \angle 7=90°,\ \therefore \overline{DE}=\overline{BF}$

（B）$\because \overline{DE}\perp L,\ \overline{BF}\perp L,\ \angle 7=90°,\ \therefore \angle 1=\angle 4$

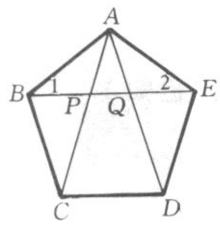
（C）$\because \angle 7=90°,\ \angle 5=\angle 6=90°,\ \therefore \angle 2=\angle 3$

（D）$\because \angle 7=\angle 5=90°,\ \therefore \angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3,\ \therefore \angle 1=\angle 3$

sol) 應選(D), 該題係利用AAS全等性質證明△ADE ≅ △BAF,
所以應當增加說明一雙對應角相等.

練習二：

如右圖，正五邊形 ABCDE 的對角線 $\overline{AC}$和$\overline{AD}$分別交 $\overline{BE}$ 於 P 與 Q，試證：$\overline{BP}=\overline{QE}$



pf) $(1)\because ABCDE$為正五邊形

$\therefore \overline{AB}=\overline{AE},\ \overline{BC}=\overline{CE},\ \angle\mathrm{ABC}=\angle AED$

$(2)\triangle ABC\cong\triangle AED(SAS)$

$\therefore \angle BAC=\angle EAD$

$(3)\because \overline{AB}=\overline{AE}$

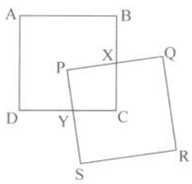
$\therefore \angle 1=\angle 2$

$(4)\triangle BAP\cong\triangle EAQ(ASA)$

$\therefore \overline{BP}=\overline{QE}$

【全等三角形的應用】

講解三：



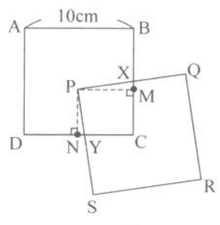
□ABCD 與□PQRS 是邊長為 10 公分的兩正方形，如右圖所示，P 點位於正方形 ABCD 的中心，$\overline{BX}=4(公分)$，試問四邊形 PXCY 的面積為多少平方公分呢？

Sol) 作輔助線,由P點分別對$\overline{\mathrm{BC}}$及$\overline{CD}$作垂線交於M,N兩點,

$\because \overline{\mathrm{PM}}=\overline{PN}$,且$\angle XPM=\angle NPY$,又$\angle PNY=\angle PMX=90°$

$\therefore \triangle PXM\cong\triangle PYN(AAS)$

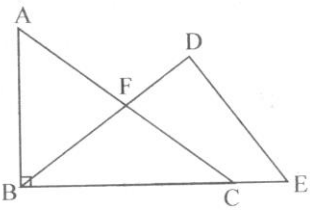
$\Rightarrow PXCY$面積=PMCN面積$=5^2=25(平方公分)$



練習三：

如右圖，△ABC 與△EDB 為全等的三角形，其中

$\overline{AB}=9(公分),\ \overline{BC}=12(公分),\ \overline{AC}=15(公分)$，試求（1）$\overline{FD}=$？（2）□CEDF 的面積=？



Sol) (1) $\because \triangle ABC 與 \triangle EDB 為全等三角形,$

$\therefore \angle FCB=\angle FBC,\ \angle FAB=\angle FBA$

$\therefore \triangle BCF 與 \triangle ABF 均為等腰\triangle$

$\Rightarrow \overline{BF}=\overline{CF},\ \overline{AF}=\overline{BF}$

$\Rightarrow \overline{AF}=\overline{CF}=\overline{BF}=\dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow \overline{FD}=\overline{BD}-\overline{BF}=12-\dfrac{15}{2}=\dfrac{9}{2}(公分)$

$(2)\square CEOF=\triangle BDE-\triangle BCF=\dfrac{1}{2}\times 9\times 12-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 9\times 12\right)=27(平方公分)$

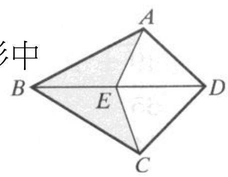
【十分鐘即時練習】

（C）1.兩直角三角形在下列何種情況時不一定全等？（A）斜邊及一股對應相等（B）斜邊及一銳角對應相等（C）二銳角對應相等（D）二股對應相等。

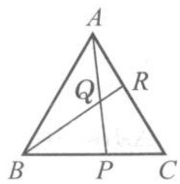
（B）2.在△ABC 與△PQR 中，已知 $\overline{AB}=\overline{QR}$、$\overline{AC}=\overline{PQ}$，則再加上下列何種條件可始可判定$\triangle ABC\cong\triangle PQR$呢？甲：∠B=∠R、乙：∠C=∠P、丙：∠A=∠Q、丁：$\overline{BC}=\overline{PR}$。

（A）甲或乙（B）丙或丁（C）甲或丁（D）乙或丙。

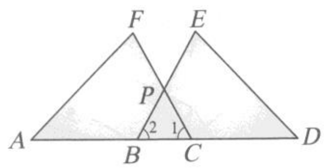
（A）3.如右圖，$\overline{AD}=\overline{CD},\ \overline{AB}=\overline{BC}$ 且 E 點為 $\overline{BD}$ 上的任何一點，請問起圖形中有幾組全等三角形呢？（A）3（B）4（C）5（D）6。



（B）4.如右圖，正三角形 ABC，$\overline{AR}=\overline{CP}$，假設∠CAP=25°，請問∠BQP=？（A）45°（B）60°（C）75°（D）80°。



（D）5.如右圖，$\overline{AB}=\overline{CD},\ \overline{PB}=\overline{BC},\ \angle A=\angle D,\ \angle 1=\angle 2$，若$\angle A=45°$，請問∠E=？（A）60°（B）65°（C）70°（D）75°。

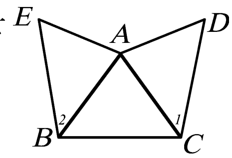


【基本觀念題】

（B）1.等腰三角形一腰上的高與底邊的夾角為20°，則其頂角的度數為多少？

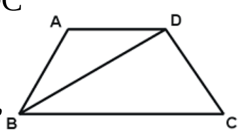
(A)20°　(B)40°　(C)30°　(D)90°

（C）2.如右圖，$\angle 1 = \angle 2$，$\overline{CD} = \overline{BE}$，$\angle D = \angle E$，則$\triangle ACD \cong \triangle ABE$，那麼下列敘述何者錯誤？(A) $\overline{AB} = \overline{AC}$　(B)$\angle ABC = \angle ACB$ (C) $\overline{AC} = \overline{AE}$ (D)$\triangle ABC$是等腰三角形。



（C）3.在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，$\overline{AB} = \overline{EF}$，$\overline{BC} = \overline{DF}$，$\overline{AC} = \overline{DE}$，則下列何者正確？(A)$\angle A = \angle D$　(B)$\angle C = \angle F$　(C)$\angle B = \angle F$　(D)$\angle B = \angle E$。

（B）4.如右圖，$\overline{BD}$平分$\angle ABC$，$\overline{BC} > \overline{AB}$，$\overline{AD} = \overline{CD}$，$\angle A = 120^\circ$，$\angle BDC = 90^\circ$，$\angle C$的度數為下列何者？ (A)$70^\circ$　(B)60°　(C)50°　(D)40°。



（A）5.$\triangle ABC$、$\triangle DEF$中，若$\overline{AB} = \overline{DE}$，$\overline{AC} = \overline{DF}$，而且$\angle A = \angle D = 100^\circ$，則此兩個三角形是否全等？(A)全等　(B)不全等　(C)不一定全等　(D)以上皆非。

（A）6.兩個等腰三角形中，若底邊及一底角對應相等，則這兩個等腰三角形有何種關係？(A)一定全等　(B)一定不全等　(C)不一定全等　(D)以上皆非。

（A）7.兩個等腰三角形中，若底邊及一底角對應相等，則這兩個等腰三角形符合下列何種性質？(A)一定全等　(B)一定不全等　(C)不一定全等　(D)以上皆非。

（D）8.若$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且$\overline{AB} = 12$，$\overline{EF} = 13$，$\overline{AC} = 5$，則$\triangle DEF$的周長為何？(A)25　(B)27　(C)28　(D)30。

（C）9.下列敘述何者錯誤？

(A)兩個三角形中，若有兩角及一對應邊相等，則必全等

(B)兩個直角三角形的一邊與一銳角對應相等，則必全等

(C)兩個三角形中，若有兩邊及一對應角相等，則必全等

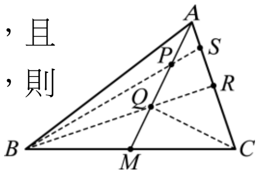
(D)等腰三角形中，必有兩角相等。

（C）10.史努比在美術課用一條線將一片後度相同，材料均勻的三角形紙板懸掛在空中，他想要讓紙板和水平面平行，他應該將懸掛點放在三角形的哪一部分呢？（A）三高的交點（B）三角平分線的交點（C）三中線的交點（D）三邊的中垂線交點。

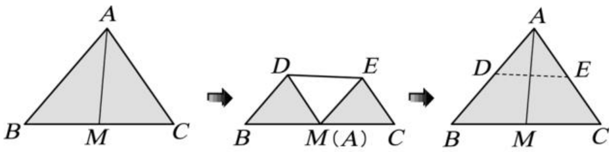
【溫故歷屆基測試題】

（D）1.若使用兩塊全等的三角形紙板可緊密拼出一個大三角形，則原來的小紙板必須是何種圖形？ （A）等腰三角形（B）鈍角三角形（C）銳角三角形（D）直角三角形。【95.基測一】

（B）2.如圖，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AC}$，P、Q 兩點在$\overline{AM}$上，其中$\overline{AP}=\overline{PQ}$，且 Q 為△ABC 的重心。若兩直線 BP、BQ 與$\overline{AC}$分別交於 S、R 兩點，則下列關係何者正確？ （A）$\overline{AS}=\overline{SR}$（B）$\overline{AR}=\overline{RC}$（C）$\overline{QB}=\overline{QC}$（D）$\overline{QR}=2\overline{PS}$。【95.基測一】

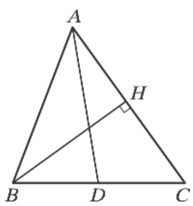


（B）3.如圖(一)，$\overline{AM}$為△ABC 的中線，∠C＞∠B。將 A 點摺向 M，使得 A、M 兩點重疊，出現摺線$\overline{DE}$，如圖(二)。若展開，如圖(三)所示，則對於$\overline{DE}$的敘述，下列哪一個選項是正確的？ （A）$\overline{DE}$平行$\overline{BC}$（B）$\overline{DE}$垂直$\overline{AM}$（C）$\overline{DE}$平分$\overline{AB}$（D）$\overline{DE}$平分$\overline{AC}$。【95.基測二】

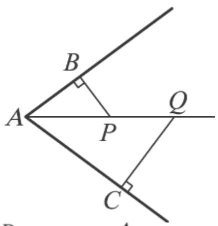


圖(一) 圖(二) 圖(三)

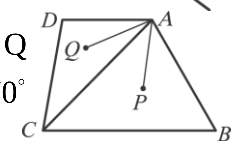
（B）4.如圖，$\overline{AD}$是△ABC 的中線，H 點在$\overline{AC}$上且$\overline{BH}\perp\overline{AC}$。若$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=14$，連接$\overline{DH}$，則$\overline{DH}=$？ （A）4（B）5（C）6（D）7。【94.基測二】



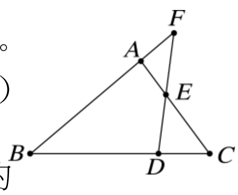
（B）5.如圖，$\overline{AQ}$為∠BAC 的角平分線，P 在$\overline{AQ}$上，且$\overline{PB}\perp\overline{AB}$、$\overline{QC}\perp\overline{AC}$。若$\overline{PB}=3$、$\overline{QC}=9$、$\overline{AP}=5$，則$\overline{PQ}=$？ （A）7（B）10（C）12（D）15。【94.基測一】



（A）6.如圖，四邊形 ABCD 中，∠B＝60°、∠DCB＝80°、∠D＝100°。若 P、Q 兩點分別為△ABC 及△ACD 的內心，則∠PAQ＝？ （A）60°（B）70°（C）80°（D）90°。【94.基測一】



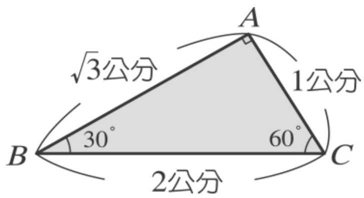
（B）7.如圖，△*ABC* 中，*D* 點在$\overline{BC}$上，*F* 點在直線 *AB* 上，$\overline{DF}$交$\overline{AC}$於 *E* 點。若∠*B*＝40°，∠*C*＝55°，∠*DEC*＝43°，則∠*F*＝？ （A）40°（B）42°（C）43°（D）55°。【93.基測二】



（A）8.甲、乙、丙、丁四位同學分別想依下列的條件作出一個與△*ABC* 全等的三角形，如圖所示。已知四人所用的條件如下：

甲：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{AC}=1$ 公分，∠*B*＝30°

乙：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分，∠*B*＝30°

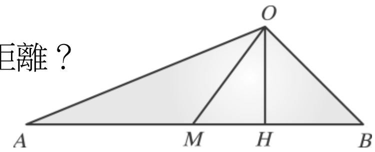


丙：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{AC}=1$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分

丁：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分，$\angle A=90^\circ$

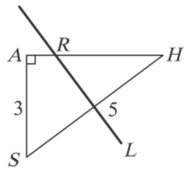
若發現其中一人作出的三角形沒有與如圖的△ABC 全等，則此人是誰？ （A）甲（B）乙（C）丙（D）丁。【93.基測一】

（C）9.如圖，△OAB 中，$AOB>90^\circ$，$\angle B>\angle A$。若 M、H 在 $\overline{AB}$ 上，M 為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{OH}\perp\overline{AB}$，則下列哪一線段的長為 O 點與 $\overline{AB}$ 的距離？



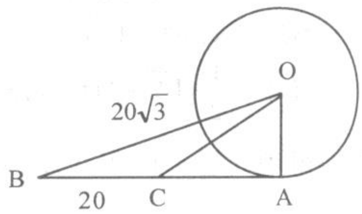
（A）$\overline{OA}$（B）$\overline{OM}$（C）$\overline{OH}$（D）$\overline{OB}$。【93.基測一】

（C）10.如圖，△ASH 為直角三角形，其中 $\angle A=90^\circ$，L 為 $\overline{SH}$ 的中垂線，交 $\overline{AH}$ 於 R 點。若 $\overline{AS}=3$，$\overline{SH}=5$，則 $\overline{RH}=$？ （A）1.5（B）2（C）$\frac{25}{8}$（D）2.5。【92.基測二】



【模擬學力基測試題】

（C）1.有一圓其圓心為 O，半徑長為 r，與直線 L 相切於 A 點，已知 L 線上有另兩點 B、C，且 C 介於 A、B 之間，$\overline{OB}=20\sqrt{3}$，$\overline{BC}=\overline{OC}=20$，請問此圓的面積為何呢？（A）$900\pi$（B）$600\pi$（C）$300\pi$（D）$100\pi$（平方單位）



sol) 設 $\overline{CA}=x,\ \begin{cases}(20+x)^2+r^2=\left(20\sqrt{3}\right)^2\cdots(2)\\ x^2+r^2=20^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\end{cases}$

$(1)-(2)$ 得 $400+40x=1200-400\ \Rightarrow x=10$ 代入(2)

$\Rightarrow r^2=20^2-x^2=300$

$\Rightarrow A=\pi r^2=300\pi\left(\text{單位}^2\right)$

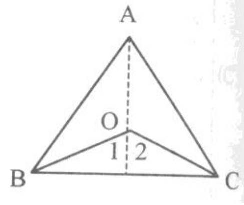
（A）2.有一三角形 ABC 其邊長分別為 3、4、5，其外接圓與內切圓面積的比值為何呢？（A）$\frac{25}{4}$（B）$\frac{9}{4}$（C）$\frac{4}{9}$（D）$\frac{25}{9}$

sol) 外接圓面積$=\left(\frac{5}{2}\right)^2\pi=\frac{25}{4}\pi,$ 內切圓面積$=\left(\frac{3+4-5}{2}\right)^2\pi=\pi,\frac{\text{外}}{\text{內}}=\frac{\frac{25}{4}\pi}{\pi}=\frac{25}{4}$

（B）3.若有一圓面積為 2π 平方公分，假設其內接等腰直角三角形的面積為 a 平方公分，請問下列何者正確呢？（A）$0<a\le 1$（B）$1<a\le 2$（C）$2<a\le 3$（D）a>3。

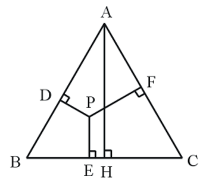
sol) 已知 $\pi r^2=2\pi,\ \therefore r=\sqrt{2},\ 2r=2\sqrt{2},$ 等腰直角三角形之腰長=2, $\therefore$a$=\frac{1}{2}\left(2\times 2\right)=2$

（C）4.在三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A=40°$，若 O 點在三角形內部，且∠OBC=∠OCA，則∠BOC 的度數為何呢？（A）90°（B）100°（C）110°（D）120°。



sol)
$$\because \overline{AB}=\overline{AC},\ \angle A=40°,\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-40°)=70°,$$
$$\angle 1=\angle OAB+\angle OBA,\ \angle 2=\angle OAC+\angle OCA,$$
$$\angle BOC=\angle 1+\angle 2=(\angle OAB+\angle OAC)+\angle OBA+\angle OCA=\angle A+(\angle OBA+\angle OBC)$$
$$=\angle A+\angle B=40°+70°=110°$$

（D）5.右圖中，P點為正△ABC內部的一點，P點到△ABC三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的距離分別為 $\overline{PD}$、$\overline{PE}$、$\overline{PF}$ 且 $\overline{AH}$ 為正△ABC的高，則其四者的關係為下列何者呢？（A）$\overline{PD}-\overline{PE}-\overline{PF}=\overline{AH}$（B）$\overline{PD}+\overline{PE}-\overline{PF}=\overline{AH}$（C）$\overline{PD}-\overline{PE}+\overline{PF}=\overline{AH}$（D）$\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\overline{AH}$。

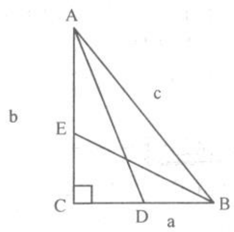


Sol) 作 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，設 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=a$，∵△ABP的面積＋△BCP的面積＋△ACP的面積＝ △ABC的面積，$\frac{1}{2}\times a\times\overline{PD}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PE}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PF}=\frac{1}{2}\times a\times\overline{AH}$，$\frac{1}{2}\times a\times(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})=\frac{1}{2}\times a\times\overline{AH}$，$\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\overline{AH}$。

【進階練習題】

（C）1.如右圖，直角⊿ABC，∠C 為直角，中線 $\overline{AD}=7$，中線 $\overline{BE}=4$，請問 $\overline{AB}=$？

（A）$3\sqrt{5}$（B）$5\sqrt{3}$（C）$2\sqrt{13}$（D）$13\sqrt{2}$。



sol) $\overline{AD}^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=7^2,\ \overline{BE}^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=4^2,$

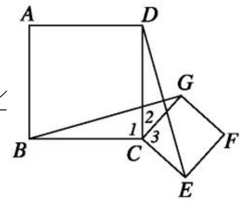
$$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=49+16=65$$
$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{65\times\frac{4}{5}}=2\sqrt{13}$$

（B）2.一個正△ABC 的邊長是 10，Q 點為其內心，由 Q 點向正△的三邊作垂直線，若三條垂直線長的和事 a 公分，請問的範圍何呢？（A）$0<a\le 5$（B）$5<a\le 10$（C）$10<a\le 15$（D）$15<a\le 20$。

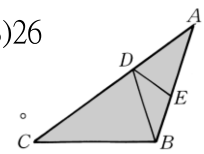
sol) ∵Q 為三角形的內心，故 Q 點亦為三角形之重心。

（A）3.若△ABC 的面積為 15 平方公分，其內切圓之半徑為 2 公分，且 $\overline{AB}=6$ 公分，$\overline{BC}=5$ 公分，則 $\overline{AC}=$？（A）4（B）5（C）6（D）7（公分）

sol) 設 $\overline{AC}=x,\ \frac{1}{2}(6+5+x)\times 2=15,\ x=4$

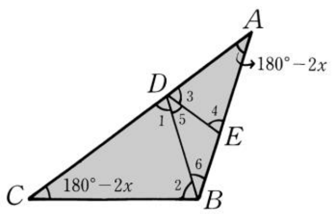


（B）4.如右圖，ABCD和CEFG都是正方形，若∠2＝30°，∠CED＝25°，則∠GBC為多少度呢？(A)25° (B)35° (C)45° (D)55° 。



（C）5.如右圖，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{DE}=\overline{BE}$，求∠C=？(A)62° (B)26° (C)36° (D) 63° 。

sol) ∵ $\overline{BC}=\overline{CD}$，設∠1＝∠2＝$x^\circ \Rightarrow \angle C=(180-2x)^\circ$



又 $\overline{AB}=\overline{BC}\Rightarrow \angle A=\angle C=(180-2x)^\circ$，∵ $\overline{AD}=\overline{AE}\Rightarrow \angle 3=\angle 4=x^\circ$

又 $\overline{DE}=\overline{BE}\Rightarrow \angle 5=\angle 6=\frac{1}{2}\angle 4=\frac{1}{2}x^\circ$，∵ $\angle 1+\angle 5+\angle 3=180^\circ$

即 $x+\frac{1}{2}x+x=180$，$\frac{5}{2}x=180$，$x=72$，故 $\angle C=(180-2\times 72)^\circ=36^\circ$