Unit 14 平面圖形的基本性質

能力指標：◎（S-3-05）能利用行體的性質解決幾何問題。
◎ (S-3-10）能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質。
◎（S-4-01）能根據給定的性質作局部的推理。
◎（S-4-03）能以最少性質辨認刻畫一個圖形並了解定義的意義。
◎（S-4-04）能根據性質了解某些圖形間的包含關係。

能力一：三角形的性質

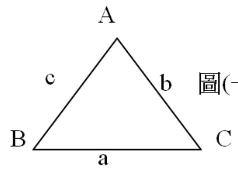
一、三角形的定義

三角形（triangle）：係由三條直線交於三個頂點而構成的一個封閉平面圖形。

二、三角形的組成性質

（一）兩邊和、差關係

若 a、b 表示△ABC 之兩邊長，令第三邊長為 c，則 $a-b<c<a+b$，即兩邊差小於第三邊小於兩邊和，如圖（一)。



圖(一)

（二）內角與外角關係

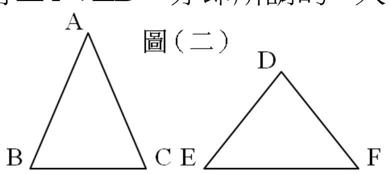
任意三角形的三個內角和為180°，三個外角和為360°。

任意三角形的一外角等於它內對角的和。

三、三角形的邊角關係

根據樞紐性質，如圖（二)，在△ABC 與△DEF 中，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，則：

（1）若$\angle A<\angle D$，則$\overline{BC}<\overline{EF}$。（2）若$\overline{BC}<\overline{EF}$，則$\angle A<\angle D$。亦即所謂的『大邊對大角，小邊對小角』。

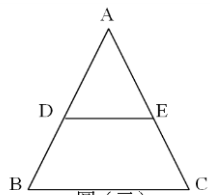


圖（二）

四、三角形的中點連線性質

如右圖（三)，在△ABC 中，D、E 兩點分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，則$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$且

$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。



圖（三）

五、三角形的種類

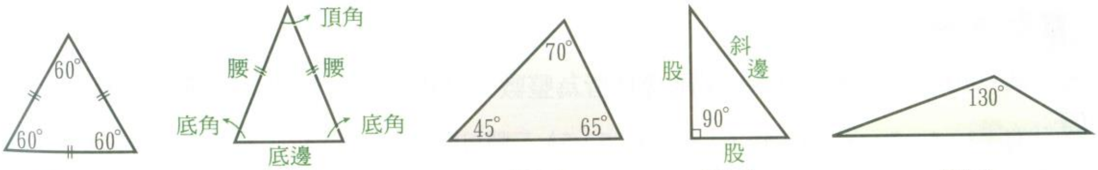
（一）正三角形（等角三角形)：如圖（a)，三角形的三邊等長，各內角均為60°。

（二）等腰三角形：如圖（b)，三角形的兩腰等長，兩底角相等。

（三）銳角三角形：如圖（c)，三角形的三個內角度數均小於90°。

（四）直角三角形：如圖（d），三角形中有一內角度數為90°。

（五）鈍角三角形：如圖（e），三角形中有一內角度數大於90°



圖(a) 圖(b) 圖(c) 圖(d) 圖(e)

六、三角形內、外角平分線的性質：

（一）型一

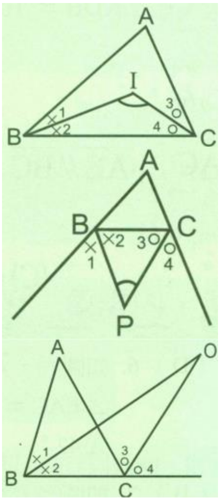
$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4,\ \Rightarrow \angle BIC=90^{\circ}+\dfrac{1}{2}\angle A$

（二）型二

$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4,\ \Rightarrow \angle BPC=90^{\circ}-\dfrac{1}{2}\angle A$

（三）型三

$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4,\ \Rightarrow \angle BOC=\dfrac{1}{2}\angle A$



七、三角形相關性質補充說明

◎兩個相同的正三角形可合併成為菱形。

◎等腰三角形的頂角$=180^{\circ}-(2\times$底角$)$。

◎直角三角形除直角之外，另兩角之和為90°。

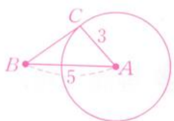
◎若△ABC 中，$\angle A>90^{\circ}$, 則 ∠B+∠C<90°$(\angle B+\angle C<\angle A)$。

【三角形的三邊關係】

講解一：

如右圖 1，圓的圓心是 A，半徑 3 公分，$\overline{AB}=5$公分，在圓 A 上取一個點 C，使其可連成△ABC，則$\overline{BC}$的長度範圍為何呢？

Sol) $(5-3)<\overline{BC}<(5+3)$ ，$2<\overline{BC}<8$ 。



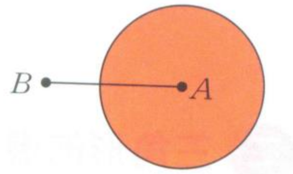


圖 1

練習一：

如右圖 1-1，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=11$，$\overline{CD}=6$，$\overline{AD}=6$，若求$\overline{BD}$

的範圍為何？

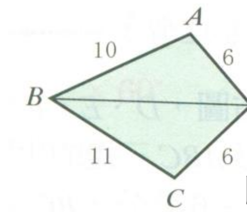


圖 1-1

Sol) $\triangle ABC$中, $(10-6)<\overline{BD}<(10+6)$, $4<\overline{BD}<16$,

$\triangle BCD$中, $(11-6)<\overline{BD}<(11+6)$, $5<\overline{BD}<17$,

由以上可知, $5<\overline{BD}<16$

【三角形的邊角關係】

講解二：

在△ABC 中，若 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=8$ ， $\overline{CA}=\sqrt{78}$ ，則三內角的大小關係為何呢？

Sol) $\sqrt{81}>\sqrt{78}>\sqrt{64}$, $9>\sqrt{78}>8$,

由上可知, ∠B>∠A>∠C

練習二：

如右圖 2，連接四邊形 ABCD 的對角線 $\overline{BD}$ ，若∠ADB=∠CDB=60° ，∠DAB=70° ，∠DBC=65°，則四邊長 a、b、c、d 的大小關係為何呢？

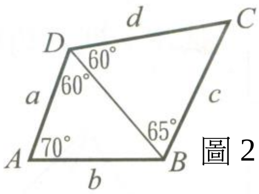


圖 2

Sol) $\triangle ABD$中, $\angle DBA=180^{\circ}-60^{\circ}-70^{\circ}=50^{\circ}$

$\because$ $70^{\circ}>60^{\circ}>50^{\circ}$, $\therefore$ $\overline{BD}>b>a$

$\triangle BDC$中, $\angle DCB=180^{\circ}-60^{\circ}-65^{\circ}=55^{\circ}$

$\because$ $65^{\circ}>60^{\circ}>55^{\circ}$, ∴ d>c>$\overline{\text{BD}}$

由以上可知, d>c>$\overline{\text{BD}}$>b>a , d>c>b>a

【三角形兩邊中點連線性質】

講解三：

如右圖 3，D、E、F 分別為△ABC 三邊的中點，若 $\overline{AB}=6\ cm$ ， $\overline{BC}=\overline{AC}=8cm$ ，則△DEF 的周長為何呢？

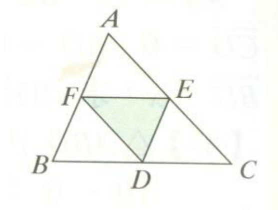


圖 3

Sol) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6=3$, $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 8=4$, $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 8=4$,

$\therefore$ $\triangle DEF$的周長$=3+4+4=11(cm)$

練習三：

如右圖 3-1，△ABC 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，P、Q 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{BC}=10$ ，求 $\overline{PQ}=$？

Sol) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10=5$，$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$ 。

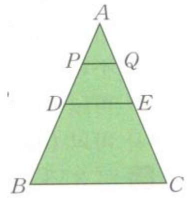


圖 3-1

【三角形的內角與外角度數】

講解四：

如右圖 4，$\overline{AD}$ 為直角△ABC 斜邊 $\overline{BC}$ 上的高，又∠B 的平分線交於 $\overline{AC}$ 於 E，交 $\overline{AD}$ 於 F，若∠C=50°，則∠AEF=？

Sol) Q $\angle BAC=\angle ADB=90^{\circ}$，$\angle 1=\angle 2$， $\therefore$ $\angle AEF=\angle 3=\angle AFE,$

$\Rightarrow$VAEF 為等腰V, 又$\angle$CAD$=90^{\circ}-50^{\circ}=40^{\circ}$

$\therefore$ $\angle AEF=\left(180^{\circ}-40^{\circ}\right)\div 2=70^{\circ}$

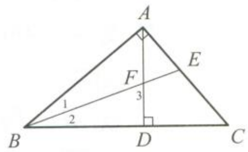


圖 4

練習四：

如右圖 4-1，銳角△ABC 中，∠A=50°，D、E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的任一點，若以 $\overline{DE}$ 為對稱軸，將 A 折向 A' ，則∠1+∠2+∠B+∠C=？

sol)
$$\left(\angle 1+\angle 3\right)+\left(\angle 2+\angle 4\right)+\angle B+\angle C=360^{\circ}$$
$$\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle C+\left(\angle 3+\angle 4\right)=360^{\circ}$$
$$\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle C+\left(\angle 5+\angle 6\right)=360^{\circ}$$
$$\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle C+\left(180^{\circ}-\angle A\right)=360^{\circ}$$
$$\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle C+130^{\circ}=360^{\circ}$$
$$\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle B+\angle C=230^{\circ}$$

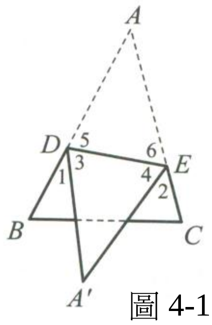


圖 4-1

【十分鐘即時練習】

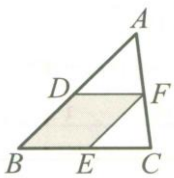
（A）1.已知三角形兩邊長為 2、7，若第三邊長是奇數，則這三角形的周長是多少呢？（A）16（B）17（C）18（D）19。

sol)∵7-2<第三邊<7+2，且第三邊為奇數　∴第三邊為 7　週長=2+7+7=16。

（C）2.等腰三角形的三邊長都是整數，周長為 15，則此種等腰三角形共有幾個呢？（A）2（B）3（C）4（D）5。

sol)∵15÷2=7.5 ∴兩腰的和>7.5 → ① 4,4,7 ② 5,5,5 ③ 6,6,3 ④ 7,7,1 共四組。

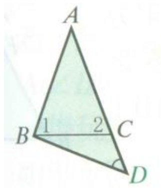
（B）3.如圖一，△ABC 中，D、E、F 分別是各邊的中點，若 $\overline{AB}=10$ ，$\overline{BC}=8$ ，$\overline{AC}=7$ ，請問四邊形 DBEF 的周長為何呢？（A）17（B）18（C）19（D）20。



圖一

sol) $\overline{DF}=8\div2=4$，$\overline{EF}=10\div2=5$ $\Rightarrow$ 周長 $=(4+5)\times2=18$。

（D）4.若△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A$比$\angle B$的 2 倍少$4^{\circ}$，求△ABC 各內角$\angle A,\angle B,\angle C$的度數為何？（A）$86^{\circ},47^{\circ},47^{\circ}$（B）$84^{\circ},48^{\circ},48^{\circ}$（C）$82^{\circ},49^{\circ},49^{\circ}$（D）$88^{\circ},46^{\circ},46^{\circ}$。



圖二

sol) ∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$ ∴ $\angle B=\angle C$，設$\angle B=\angle C=x^{\circ}$，則$\angle A=(2x-4)^{\circ}$

$\Rightarrow(2x-4)+2x=180^{\circ}$，$x=46^{\circ}$，$\angle A=(2\times46-4)=88^{\circ}$

（C）5.如圖二，已知$\angle1=\angle2=70^{\circ}$，$\overline{BD}\perp\overline{AB}$，則$\angle D$的度數為何呢？

（A）45°（B）50°（C）55°（D）60°。

能力二：四邊形的基本性質

一、四邊形的定義

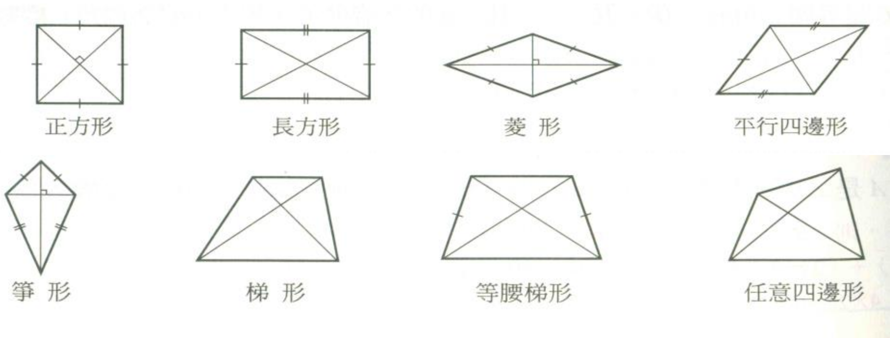
四邊形（quadrilateral）：係指具有四條直線段所圍成的多邊形，每條邊連接兩個頂點且不在頂點之間相交。四角形（quadrangle）與四邊形的定義並不相同，請留意。

二、四邊形的種類

四邊形：可分為「平行四邊形」與「特殊四邊形」兩類。

平行四邊形：有正方形、長方形（矩形）、菱形、平行四邊形。

特殊四邊形：有箏形（鳶型）、梯形、等腰梯形、任意四邊形。如下圖所示。



三、四邊形的性質

正方形：四邊等長且四個內角都是直角的平行四邊形。

長方形（矩形）：四個內角都是直角的平行四邊形。

菱形：四邊等長的平行四邊形。

平行四邊形：兩雙對邊平行、等長且對角線互相平分的四邊形。

箏形（鳶型）：兩組鄰邊等長的四邊形。

梯形：一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形，此不平行的對邊稱為兩腰。

等腰梯形：為一梯形且兩腰等長。

四、四邊形的對角線性質

	正方形	長方形	菱形	平行四邊形	鳶形	等腰梯形	梯形
對角線等長	★	★				★	
對角線互相平分	★	★	★	★			
對角線互相垂直	★		★		★		

口訣：對角線互相等長：等梯、矩、正
對角線互相平分：平、菱、矩、正
對角線互相垂直：鳶、菱、正

五、四邊形的相關性質

◎菱形與鳶形的判別：

菱形的兩條對角線都會互相平分頂角。鳶型的對角線僅有一條會平分頂角，另一條不會。

◎若四邊形的對角線互相垂直，則其$\boxed{\text{面積=對角線的乘積}\times\frac{1}{2}}$。例如：鳶形、菱形、正方形皆可。

六、多邊形的角度與對角線公式

◎ 任意 n 邊形的內角和=$(n-2)\times180^{\circ}$。

◎ 任意 n 邊形的外角和=360°。

◎ 任意 n 邊形的對角線=$\frac{n(n-3)}{2}$條。

◎ 正 n 邊形的每一內角皆相等，其值為$\frac{(n-2)\times180^{\circ}}{n}$。

◎ 正 n 邊形的每一外角皆相等，其值為$\frac{360^{\circ}}{n}$。

【四邊形的邊角關係】

講解一：

如右圖 1，用兩個相同的正三角形組合成一個四邊形，若正△ABC 周長為 24，則□ABCD 是哪一種四邊形呢？周長為何呢？∠ACD=？

sol) $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{DC}=\overline{AC}$, 且∠BAC=$60^{\circ}$, $\angle ABD=\angle ACD=60^{\circ}\times2=120^{\circ}$,

$\therefore$ □$ABCD$為菱形

$24\div3=8$, □ABCD周長=$8\times4=32$

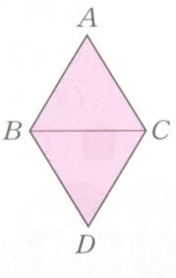


圖 1

練習一：

如右圖 1-1，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，∠BDC=∠A=90°，$\overline{BD}=12$、$\overline{CD}=5$，請問∠1、∠2、∠3 的大小關係為何呢？

Sol) 已知$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle 1=\left(180^\circ-90^\circ\right)\div 2=45^\circ, \overline{BD}>\overline{CD}$

$\therefore\ \angle 3>\angle 2$，$\angle 3+\angle 2=90^\circ$，$\Rightarrow \angle 3>45^\circ,\ \angle 2<45^\circ,$

$\angle 3>\angle 1>\angle 2$

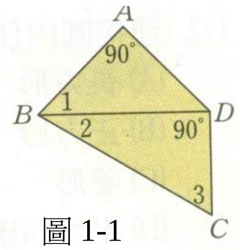
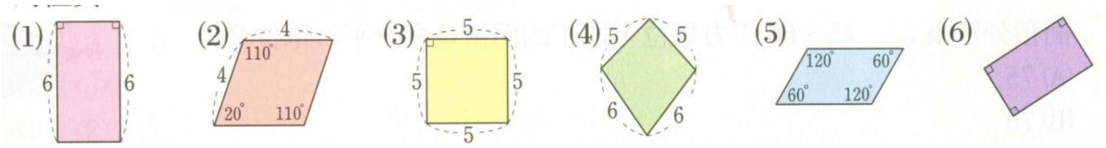


圖 1-1

【四邊形的對角線】

講解二：

長方形具有兩條對角線會等長且互相平分的性質，請問下列哪些四邊形也具有相同的性質呢？



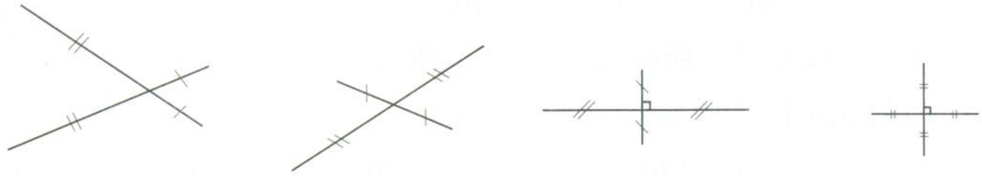
Sol)

依照口訣可知：對角線互相等長：等梯、矩、正； 對角線互相平分：平、菱、矩、正。

因此，符合此一性質的四邊形分別是，矩形、正方形。選擇（1）（3）（6）。

練習二：

下列四組交叉線段各代表一種四邊形的兩條對角線，請由左至右寫出最適當的四邊形名稱。



Sol) 等腰梯形、平行四邊形、菱形、正方形。

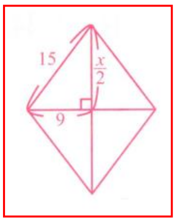
【四邊形的面積】

講解三：

設一菱形的周長為 60 公分，兩對角線長為 18 公分與 x 公分，則 x=？

sol) ∵菱形的對角線互相平分，所以菱形的一邊長為 60÷4=15，

$$\left(\frac{18}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=15^2 \Rightarrow 81+\frac{x^2}{4}=225$$



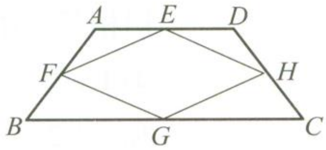
$$\therefore \Rightarrow \frac{x^2}{4}=144,\ x^2=576,\ x=\pm 24(\text{負不合}),$$

$$x=24$$

練習三：

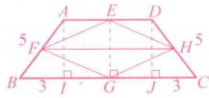
已知 ABCD 為等腰梯形，其中 E、F、G、H 分別為各邊之中點，且 $\overline{AD}$=6，$\overline{BC}=12$，

$\overline{AB}=5$，則四邊形 EFGH 的面積為何？



Sol) $\overline{AI}=\sqrt{5^2-3^2}=4=\overline{EG},\ \overline{FH}=\dfrac{12+6}{2}=9,$

Q $\square EFGH$ 為菱形，$\therefore$ 面積=$\overline{EG}\times\overline{FH}\times\dfrac{1}{2}=18$



【四邊形的角度】

講解四：

如右圖 4，四邊形 ABCD 中，∠1=100°，∠2=110°，∠BCD=120°，請問∠4=？

Sol) $\angle 3=180^\circ-120^\circ=60^\circ,\ \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ,$

$\angle 4=360^\circ-\left(100^\circ+110^\circ+60^\circ\right)=90^\circ$

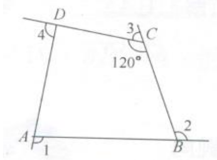


圖 4

練習四：

如右圖 4-1，四邊形 ABCD 中，∠B、∠C 的角平分線相交於 E 點，∠A、∠D 的角平分線相交於 F 點，若∠BEC=100°，則∠AFD=？

Sol) Q $\angle B+\angle C=2\times\left(180^\circ-\angle BEC\right)=160^\circ$

$\therefore\ \angle AFD=180^\circ-\dfrac{(\angle A+\angle D)}{2}=180^\circ-\dfrac{\left(360^\circ-160^\circ\right)}{2}=80^\circ$

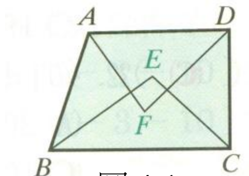


圖 4-1

【十分鐘即時練習】

（C）1.如右圖 1，為人行步道上地磚的局部圖形，在六邊形 ABCDEF 中，∠B=∠E=90°，∠A=∠C=∠D=∠F，請問∠A 等於多少度呢？（A）133°（B）134°（C）135°（D）136°。

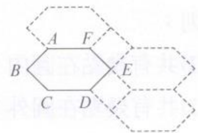


圖 1

（C）2.一個四邊形最多有幾個內角是鈍角呢？（A）1（B）2（C）3（D）4 個。

（D）3.在△ABC 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，$\angle C=60^\circ$，則下列敘述何者正確呢？（A）∠A 為最小角（B）∠B 為最大角（C）$\overline{AB}$ 為最大邊（D）$\overline{BC}$ 為最大邊。

Sol) 由$\overline{AB} > \overline{AC}$知$\angle C > \angle B \Rightarrow 60^{o} > \angle B,\ \angle C = 60^{o}, \angle B < 60^{o} \Rightarrow \angle > 60^{o}$。

（C）4.如右圖 2，□ABCD 為一正方形，□EFGH 也是正方形，G、H 在 $\overline{BD}$ 上，E、F 兩點分別在 $\overline{AD}$ 、$\overline{AB}$ 上，且 $\overline{HD} = 4$，則 $\overline{BD} + \overline{EH}$ = ？（A）12（B）14（C）16（D）18。

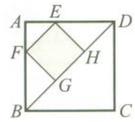


圖 2

（B）5.平行四邊形 ABCD 中，∠A=∠B+∠D，則∠C=？（A）110°（B）120°（C）130°（D）140°。

sol) 令$\angle B = \angle D = x^{o} \Rightarrow \angle A = 2x^{o},\ 2x^{o} + x^{o} = 180^{o}, x = 60^{o}, \angle A = \angle C = 2 \times 60^{o} = 120^{o}$

能力三：圓的基本性質

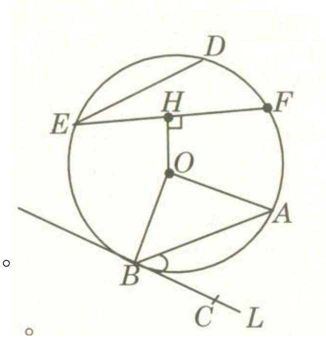
一、圓的定義

圓（circle）：係指一封閉的平面曲線，其上的每一點都距離一給定的固定點等距離而成的集合。

二、圓的性質

弧（arc）：圓上兩點 A、B 之間所包含的圓周長片段稱為弧，以 $\overset{\frown}{AB}$ 表示，若 $\overset{\frown}{AB}$ 佔全圓的弧長較小者稱為「劣弧」，反之，所佔弧長較長者稱為「優弧」。

弦（chord）：連接圓上相異兩點所乘的線段，如 $\overline{EF}$ 。



弦心距：圓心到弦之距離謂之弦心距，如 $\overline{OH}$ 。

圓心角：圓上相異兩點與圓心形成的角度，如 $\angle AOB$ 。

圓周角：圓上相異三點，以其中一點為頂點所形成的角度，如 $\angle DEF$ 。

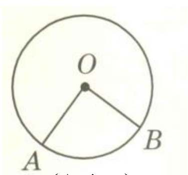
弦切角：圓上一弦與切線所形成的角度，如 $\angle ABC$ 。

切線：若直線 L 和圓 O 僅交於一點，則稱 L 為圓的一條切線，且切線必與半徑垂直。

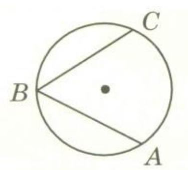
三、圓的角度關係

圓心角：$\overset{\frown}{AB} = n^{o} \Rightarrow \angle AOB = n^{o}$。（圖 a）

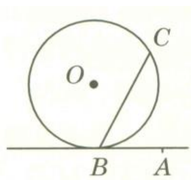
圓周角：$\overset{\frown}{AC} = n^{o} \Rightarrow \angle ABC = \dfrac{1}{2} n^{o}$。（圖 b）



（圖 a）

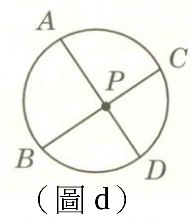


（圖 b）



（圖 c）

弦切角：$\overset{\frown}{BC}=n^{\circ}\Rightarrow\angle ABC=\dfrac{1}{2}n^{\circ}$。（圖 c）

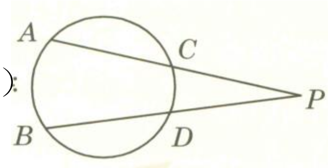


（圖 d）

圓內角：$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AB}=n^{\circ}\\\overset{\frown}{CD}=m^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\angle APB=\angle CPD=\dfrac{1}{2}\left(n^{\circ}+m^{\circ}\right)$。（圖 d）

圓外角：$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AB}=n^{\circ}\\\overset{\frown}{CD}=m^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\angle APB=\dfrac{1}{2}\left(n^{\circ}-m^{\circ}\right)$。（圖 e）

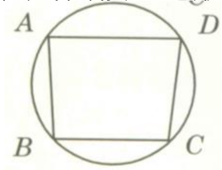
（圖 e）



四、圓與四邊形的關係

（一）圓的內接四邊形

圓的內接四邊形



定義：圓上相異四點所形成的四邊形稱為圓的內接四邊形。

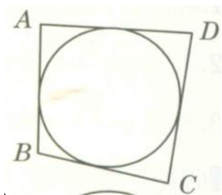
性質：對角互補，且外角等於其內對角。

特性：圓內接平行四邊形為矩形。

圓內接菱形為正方形。

圓內接梯形為等腰梯形。

（二）圓的外切四邊形



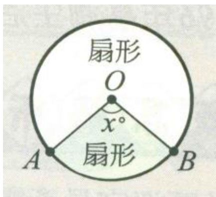
圓的外切四邊形

定義：圓形的相異四條切線所圍成的四邊形稱為圓的外切四邊形。

性質：若 ABCD 為圓外切四邊形，則 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 。

五、扇形的相關性質

扇形：若有一圓 O，其內有兩條半徑 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ ，與弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所圍成的區域，即為扇形，如圖所示。



若圓心角∠AOB= x° ，圓 O 半徑為 r，則有下列關係：

（一）$\overset{\frown}{AB}$ 弧長

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{x^{\circ}}=\frac{\text{圓周長}}{360^{\circ}}\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=\frac{x^{\circ}}{360^{\circ}}\times2\pi r$$

（二）扇形面積

$$\frac{\text{扇形面積}}{x^{\circ}}=\frac{\text{圓面積}}{360^{\circ}}\Rightarrow\text{扇形面積}=\frac{\mathrm{X}^{\circ}}{360^{\circ}}\times\pi r^{2}$$

（三）扇形周長

扇形周長= $\overline{OA}+\overline{OB}+\overset{\frown}{AB}$

【圓心角與圓周角的應用】

講解一：

如右圖 1，已知 $\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，且 $\overset{\frown}{AC}=60^{o}$，試問∠ABC 與∠ADB 的度數為何呢？

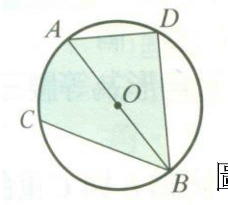


圖 1

Sol)

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times 60^{o}=30^{o}$$

$$\angle ADB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}=\frac{1}{2}\times 180^{o}=90^{o}$$

練習一：

如右圖 1-1，已知 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 是圓 O 的兩弦且相交於 E 點，若∠B= 60^{o}、∠A= 50^{o}，則∠1、∠2、∠3 的度數為何呢？

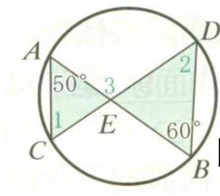


圖 1-1

sol)

$$\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}=\angle B=60^{o},\ \ \angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\angle A=50^{o}$$

$$\angle 3=\angle 1+\angle A=60^{o}+50^{o}=110^{o}$$

【扇形面積】

講解二：

如圖 2，已知圓 O 與圓 O_1 的半徑為 6 公分與 4 公分，假設∠AOB= 30^{o}，且圖形中兩扇形面積相同，則∠CO_1D=？

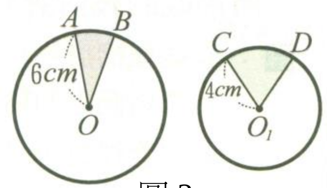


圖 2

sol)

$$\text{扇形}AOB\text{面積}=\frac{30^{o}}{360^{o}}\times\pi\cdot 6^{2}=3\pi,$$

$$\text{圓}O_1\text{的面積}=\pi\cdot 4^{2}=16\pi,\ \angle CO_1D=\frac{3\pi}{16\pi}\times 360^{o}=67.5^{o}$$

練習二：

有一火車車輪如圖 2-1 所示，車輪部分在鐵軌之下，若 $\overline{AB}=12$，車輪半徑亦為 12，請問 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為何呢？

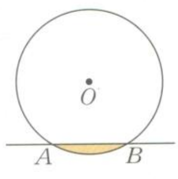


圖 2-1

Sol) 連接 $\overline{OA},\overline{OB}$ 可知, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}=12,\ VOAB$ 為正三角形,

$$\therefore\ \overset{\frown}{AB}=\frac{1}{6}\times 2\times 12\pi=4\pi$$

【圓與四邊形的關係】

講解三：

右圖 3 所示，三個圓的圓心分別是 P、Q、R，且均與□ABCD 相切，已知圓心 Q 的圓半徑為 1，且 P、Q、R 三點在同一線上，請問□ABCD 面積為何呢？

Sol) $\because$ 圓心Q的圓半徑為1,直徑為2

$\therefore$ □ABCD的寬$\overline{AD}=\overline{BC}=2$, 長$\overline{AB}=\overline{CD}=4$,

□$ABCD$面積為$2\times4=8$(平方單位)

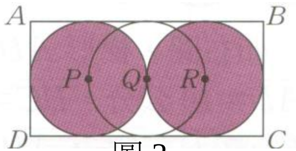


圖 3

練習三：

如圖 3-1 所示，圓內的□OABC 為一矩形，若圓 O 的直徑為 18 公分，試求$\overline{AC}$的長度為何？

Sol) ∵□OABC 是矩形 $\therefore \overline{OB}=\overline{AC}=9$(公分)。

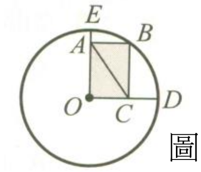


圖 3-1

【十分鐘即時練習】

（B）1.有一圓如右圖 1 的摺疊方法所示，展開後請問∠AOC=？（A）15^o（B）30^o（C）45^o（D）60^o。

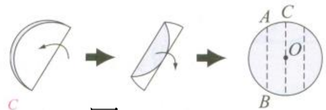
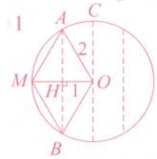


圖 1

sol)

做$\overline{OM}\perp\overline{AB}$於$H$,令$\overline{MH}=\overline{OH}=1$,則$\overline{OA}=\overline{OM}=2$

$\therefore \angle OAH=30^o, \angle AOM=60^o, \angle AOC=90^o-60^o=30^o$



（B）2.如右圖 2 所示，$\overline{AC}=\overline{CD}=6$，求斜線部份的周長為何呢？（A）$6\pi$（B）$12\pi$（C）$18\pi$（D）$24\pi$。

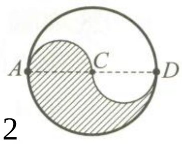


圖 2

（D）3.如圖 3 所示，已知 P 為圓外一點，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，若$\angle P=40^o$，則∠AOB=？（A）$95^o$（B）$100^o$（C）$105^o$（D）$110^o$。

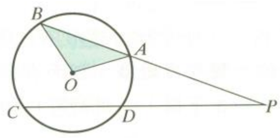


圖 3

（A）4.如右圖 4，A、B、C 為圓 O 上三點，D 點為圓 O 內一點，且$\overline{BD}$交圓 O 於 E 點，請問下列敘述何者正確呢？（A）∠CAB+∠CEB=180^o（B）∠CAB+∠CDB=180^o（C）∠CAB+∠CEB<180^o（D）∠CAB+∠CDB<180^o

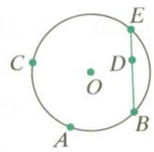


圖 4

sol) $\angle B+\angle C=2\left(180^o-\angle BEC\right)=160^o,\ \angle AFD=180^o-\frac{1}{2}\left(\angle A+\angle D\right)$

$=180^o-\frac{1}{2}\left(360^o-160^o\right)=80^o$

（B）5.如右圖 5 所示，$\overline{AB}$為直徑，$\overline{AH}=\overline{BH}$，若圓 O 的面積為 4π，試求$\overset{\frown}{AH}$的長度為何？（A）1（B）π（C）2π（D）3π。

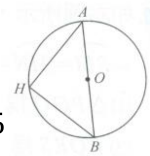


圖 5

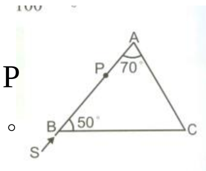
【基本觀念題】

（A）1.已知三角形的三個外角度數比是 3：4：5，則此三角形的最大內角是多少？（A）90^o（B）100^o（C）110^o（D）120^o。

（C）2.已知△ABC 中，$\angle A=50^o$，$\angle C$的外角為110^o，則△ABC 為何種三角形

呢？（A）直角三角形（B）鈍角三角形（C）銳角三角形（D）任意三角形。

（B）3.設△ABC 中，$2\angle A:3\angle B=8:9$，2∠B:∠C=6:5，則∠A+∠B=？（A）100^{o}（B）105^{o}（C）110^{o}（D）115^{o}。



（D）4.如右圖，若小華由 s 點出發，只准前進不准後退，依照 S→B→C→A→P 的順序走到 P 點，小華共轉了幾度呢？（A）125^{o}（B）150^{o}（C）250^{o}（D）280^{o}。

（C）5.下列四組數，可成為三角形三邊長的共有多少組呢？

ⓐ 0.3、0.5、0.5 ⓑ 5、9、14 ⓒ $2\sqrt{2}$、1、3 ⓓ 2、99、100

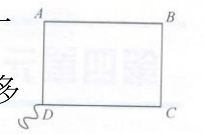
（A）1 組（B）2 組（C）3 組（D）4 組。

（A）6.四邊形 ABCD 中，下列哪一個條件不能用來判定 ACBCD 為平行四邊形？

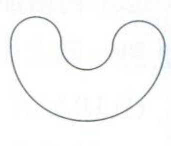
（A）$\overline{AB}\parallel\overline{CD},\ \overline{AC}=\overline{BD}$（B）$\overline{AB}\parallel\overline{CD},\ \overline{AD}\parallel\overline{BC}$（C）$\overline{AB}\parallel\overline{CD},\ \angle A=\angle C$（D）$\overline{AB}=\overline{CD},\ \overline{AD}=\overline{BC}$。

（D）7.依次連接一個等腰梯形四邊中點所圍成的四邊形為哪一種四邊形呢？（A）正方形（B）矩形（C）梯形（D）菱形。

（B）8.如右圖，甲是由一條直徑、一條弦及一圓弧所圍成的灰色圖形，乙是由兩條半徑與一圓弧所圍成的灰色圖形，丙是由不過圓心 O 的兩線段與一圓弧所圍成的灰色圖形。下列關於此三圖形的敘述何者正確？（A）只有甲是扇形（B）只有乙是扇形（C）只有丙是扇形（D）只有乙、丙是扇形。【93.基測（一）】



（B）9.如右圖 ABCD 為矩形房屋，$\overline{AB}=3$公尺，$\overline{BC}=2$公尺，在牆角 D 綁一繩子，繩長 5 公尺，若在繩的末端拴住一隻看門狗，問此狗可以活動的範圍是多少平方公尺呢？（A）11π（B）22π（C）33π（D）44π（平方公尺）。



（A）10.如右圖是某組合玩具的造型，是由三個相同的半圓與一個大半圓所構成，若最大半圓的直徑是 l2 公分，問此圖案的面積=？（A）20π（B）22π（C）23π（D）24π（平方公分）。

【溫故歷屆基測試題】

（D）1.小薰想在花園中，圍出一塊土地種玫瑰花，他以自己的位置為中心找出與他等距的甲、乙、丙三點，並測量此三點間的距離，記錄如右表。表中有部分為水漬所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。已知弄髒的部份為一整數，則此數可能是下列哪一個？（A）3（B）5（C）6（D）8。【91.基測（一）】

	甲到乙	乙到丙	丙到甲
距離（公尺）	1.5	7.5	

（B）2.在△ABC 中，如果∠A= 70° ，∠B= 40° ，則下列四格選項中，哪一個是正確的？（A） $\overline{AC}>\overline{BC}$ （B） $\overline{AB}>\overline{AC}$ （C） $\overline{AC}=\overline{BC}$ （D） $\overline{AB}=$ 。【90.基測（一)】

（D)3. 在△ABC 中，如果∠B 的外角是 120°，且 $3\angle C=2\angle A$，試求∠A=？（A） 36°（B） 48°（C） 60°（D） 72° 。【91.基測（二)】

（A）4.以知有長 3 公分、6 公分之兩線段，下列敘述何者錯誤？

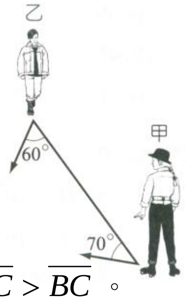
（A）若另有一長為 3 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形。

（B）若另有一長為 6 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形。

（C）若另有一長為 $3\sqrt{3}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形。

（D）若另有一長為 $3\sqrt{5}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形。【94.基測（一)】

（A）5.如圖，甲、乙兩人在同一水平面上溜冰，且乙在甲的正東方 200 公尺處。已知甲、乙分別以東偏北 70° 、西偏北 60° 的方向直線滑行，而後剛好相遇，因而停止滑行。對於兩人滑行的距離，下列敘述何者正確？

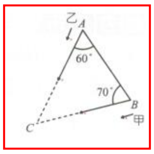


（A）乙滑行的距離較長。

（B）兩人滑行的距離一樣長

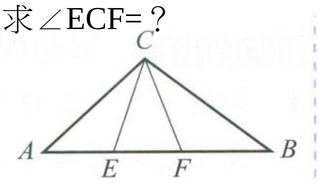
（C）甲滑行的距離小於 200 公尺。

（D）乙滑行的距離小於 200 公尺。【94.基測（一)】



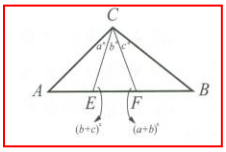
sol) 兩人行進路線交於 C 點，在△ABC 中，∠B>∠A⇒ $\overline{AC}>\overline{BC}$ 。

（B）6.如右圖，在△ABC 中，∠ACB= 102°，$\overline{AF}=\overline{AC}$ 、$\overline{BE}=\overline{BC}$ ，求∠ECF=？



（A） 34°（B） 39°（C） 45°（D） 56° 。【94.基測（二)】

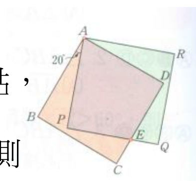
sol) ① $\overline{AF}=\overline{AC}\Rightarrow\angle AFC=\angle ACF=(a+b)^{\circ}$ 。



② $\overline{BE}=\overline{BC}\Rightarrow\angle BEC=\angle BCE=(b+c)^{\circ}$ 。

③ $\triangle EFC\Rightarrow b+b+c+a+b=180^{\circ}\Rightarrow 2b+102^{\circ}=180^{\circ},\ b=39^{\circ}$ 。

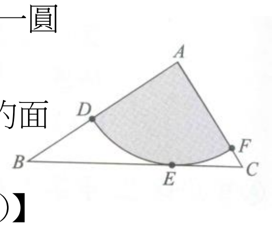
（C）7.如右圖，四邊形 ABCD 、APQR 為兩全等正方形，$\overline{CD}$與$\overline{PQ}$相交 E 點，若∠BAP= 20° ，則∠PEC=？（A） 60°（B） 65°（C） 70°（D） 75° 。【94.基測（二)】



sol) ∠PAD= $90^{\circ}-20^{\circ}=70^{\circ}$ ，∠PED= $360^{\circ}-70^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}$ ，

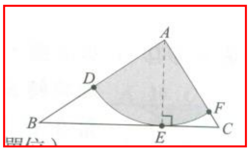
∠PEC= $180^{\circ}-110^{\circ}=70^{\circ}$ 。

（D）8.如右圖，△ABC 中，$\angle BAC=90^{\circ},\ \overline{AC}=3,\ \overline{AB}=4$，以 A 為圓心作一圓弧，切$\overline{BC}$於 E 點，且分別交$\overline{AB},\ \overline{AC}$於 D、F 兩點，請問此圖形陰影部分的面積為多少呢？（A）$\frac{9}{25}\pi$（B）$\frac{16}{25}\pi$（C）$\frac{24}{25}\pi$（D）$\frac{36}{25}\pi$。【90.基測（一)】

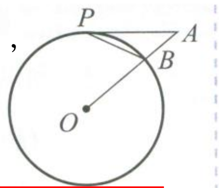


sol) 連接$\overline{AE}$, 則$\overline{AE}\perp\overline{BC},\ \overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5,\ \triangle ABC$面積$=\frac{3\times4}{2}=\frac{5\times\overline{AE}}{2}$,

$\therefore r=\overline{AE}=\frac{12}{5}$, ∴陰影部分面積=$\pi\times\left(\frac{12}{5}\right)^2\times\frac{90}{360}=\frac{36}{25}\pi$(單位^2)

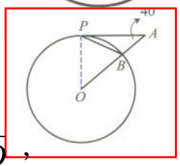


（C）9.如右圖，$\overline{AP}$為圓 O 的切線，P 為切點，$\overline{OA}$交圓 O 於 B 點，若$\angle A=40^{\circ}$，則$\angle APB=$？（A）40°（B）30°（C）25°（D）20°。【94.基測（二)】

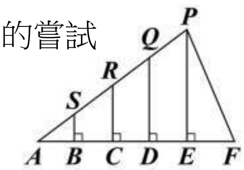


sol) 連接$\overline{OP}$, ∵$\overline{PA}$切圓於P點, $\therefore\angle OPA=90^{\circ},\ \angle POB=90^{\circ}-40^{\circ}=50^{\circ}=\overset{\frown}{PB}$,

弦切角$\angle APB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PB}=\frac{1}{2}\cdot50^{\circ}=25^{\circ}$



（D）10.如右圖，S、R、Q 在$\overline{AP}$上，B、C、D、E 在$\overline{AF}$上，其中$\overline{BS},\ \overline{CR},\ \overline{DQ}$，皆垂直$\overline{AF}$，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$，若$\overline{PE}=2$公尺，求$\overline{BS}+\overline{CR}+\overline{DQ}$的嘗試多少公尺？（A）$\frac{3}{2}$（B）2（C）$\frac{5}{2}$（D）3。【92.基測（一)】



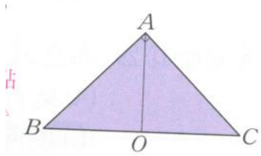
sol) $\triangle AEP$中, $\overline{CR}=\frac{1}{2}\overline{EP}=\frac{1}{2}\cdot2=1(m)$, $\triangle ACR$中, $\overline{BS}=\frac{1}{2}\overline{CR}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}(m)$,

梯形$CEPR$中, $\overline{DQ}=\frac{1}{2}\left(\overline{CR}+\overline{EP}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+2)=\frac{3}{2}$,

$\therefore\overline{BS}+\overline{CR}+\overline{DQ}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3(m)$

【模擬學力基測試題】

（D）1.如右圖，△ABC 為等腰直角三角形，∠BAC=90°，O 為$\overline{BC}$之中點，若$\overline{OA}=8$，則△ABC 面積為何？（A）23（B）32（C）46（D）64。

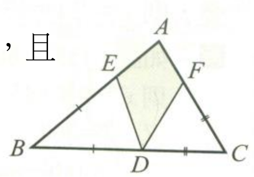


sol) $\angle B=\angle C=\left(180^{\circ}-90^{\circ}\right)\times\frac{1}{2}=45^{\circ}$, ∵$\overline{AB}=\overline{AC}$, O為$\overline{BC}$中點,

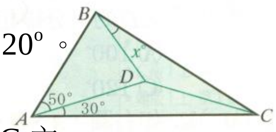
∴$\overline{OA}$為對稱軸$\Rightarrow\overline{OA}\perp\overline{BC}$, ∴$\triangle OAB$ & $\triangle OAC$都是等腰直角三角形,

$\Rightarrow\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OC}=8$，$\triangle ABC=16\cdot8\cdot\frac{1}{2}=64$(單位^2)

（A）2.如圖，在△ABC 中，$\angle A = 80^{o}$，D、E、F 點分別在 $\overline{BC},\ \overline{AB},\ \overline{AC}$ 上，且 $\overline{BD} = \overline{BE},\ \overline{CD} = \overline{CF}$，則∠EDF=？（A）$50^{o}$（B）$52^{o}$（C）$54^{o}$（D）$56^{o}$。

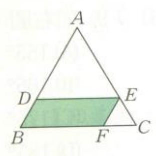


（B）3.如右圖，$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$，則 x=？（A）$5^{o}$（B）$10^{o}$（C）$15^{o}$（D）$20^{o}$。

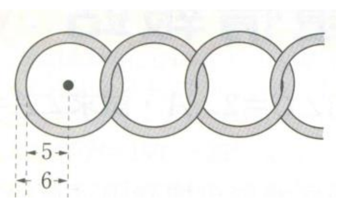


（C）4.在△ABC 中，$\overline{AB} = 1,\ \overline{BC} = \sqrt{3} - 1,\ \overline{AC} = \sqrt{2} - 1$，則∠A、∠B、∠C 之大小的關係為下列何者呢？（A）∠C>∠B>∠A（B）∠B>∠C>∠A（C）∠C>∠A>∠B（D）∠A>∠B>∠C。

（B）5.如右圖，,△ABC 為每邊 l2 公分的正三角形，四邊形 BFED 是平行四邊形，求平行四邊形 BFED 的周長為多少公分？（A）22（B）24（C）26（D）28。



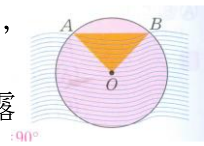
（A）6.圓形鐵環的內半徑為 5 公分，外半徑為 6 公{分，今將 l0 個這種鐵環串聯成一條鐵鍊，如右圖，則兩端拉直以後鐵鍊的長度為多少公分呢？（A）102（B）103（C）104（D）105（公分）。



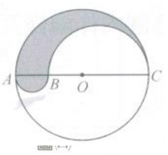
sol)

$$
\begin{aligned}
&2\text{個鐵環} \Rightarrow \text{長度} = 10 \times 2 + 2 \\
&3\text{個鐵環} \Rightarrow \text{長度} = 10 \times 3 + 2 \\
&\quad\mathrm{M} \qquad\qquad\qquad \mathrm{M} \\
&10\text{個鐵環} \Rightarrow \text{長度} = 10 \times 10 + 2 = 102(cm)
\end{aligned}
$$

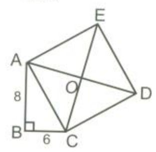
（D）7.海邊豎立一圓形的警示牌，已知圓的半徑 60 公分，今天適逢海水漲潮，圓形警示牌只露出一弓形，如右圖所示，測量 $\overset{\frown}{AB}$ 的長為 30π 公分，求警示牌露出水面的弓形面積為多少平方公分？（A）450π-1600（B）450π-1800（C）900π-1600（D）900π-1800（公分）。



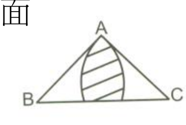
（B）8.如右圖，O 為大圓之圓心，$\overline{OA} = 6,\ \overline{AB} = \dfrac{1}{4}\overline{AC}$，求斜線周長為何？（A）6$\pi$（B）12$\pi$（C）18$\pi$（D）24$\pi$。



（C）9.如右圖，∠ABC=90^{o}，以 $\overline{AC}$ 為邊做正方形 ACDE，O 為兩對角線交點，設 $\overline{AB} = 8,\ \overline{AC} = 6$，則△AOC 的面積為何？（A）15（B）20（C）25（D）30。



（A）10.如右圖，等腰直角△ABC 中，$\angle A = 90^{o}$，$\overline{AB} = \overline{AC} = 8$，則斜線部分面積為何？（A）16$\pi$-32（B）12$\pi$-32（C）18$\pi$-32（D）24$\pi$-32。



【進階練習題】

（B）1.一多邊形各內角為 $2x^{o},3x^{o},4x^{o},5x^{o}$，則其最小角為多少度呢？
（A）30^{o}（B）60^{o}（C）120^{o}（D）160^{o}。

sol) $(5-2)\times180^{o}=18x\Rightarrow540=18x\Rightarrow x=30^{o}$, $\therefore$最小內角=$2x^{0}=60^{o}$。

（C）2.設一正三角形的邊長為 a，高為 h，若另一正三角形△ABC 的邊長為 2h，請問△ABC 的面積為何呢？（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^{2}$（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^{2}$（C）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^{2}$（D）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^{2}$。

sol) 邊長為 2h 的正△面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2h)^{2}=\sqrt{3}h^{2}$，邊長為 a 的正△其高 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

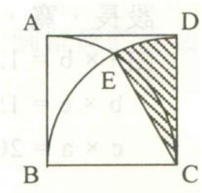
$$\Rightarrow\sqrt{3}h^{2}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^{2}$$ 。

（D）3.已知菱形的一對角線長為另一對角線的 2 倍，若菱形的面積是 k，則此菱形的每一邊長是多少呢？（A）$\dfrac{1}{2}\sqrt{2k}$（B）$\dfrac{1}{2}\sqrt{3k}$（C）$\dfrac{1}{2}\sqrt{4k}$（D）$\dfrac{1}{2}\sqrt{5k}$。

sol)
設兩對角線長為2l及4l，邊長a=$\sqrt{l^{2}+(2l)^{2}}=\sqrt{5}l$，

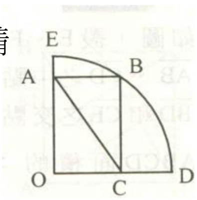
$$\text{面積}=k=\frac{2l\times4l}{2}=4l^{2}\Rightarrow l=\sqrt{\frac{k}{4}}=\frac{\sqrt{k}}{2}\Rightarrow a=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{k}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{5k}$$

（C）4.如右圖，□ABCD 為邊長 1 公分的正方形，請問斜線部分的面積為多少平方公分呢？（A）$\dfrac{\pi}{14}$（B）$\dfrac{\pi}{13}$（C）$\dfrac{\pi}{12}$（D）$\dfrac{\pi}{11}$（平方公分）。



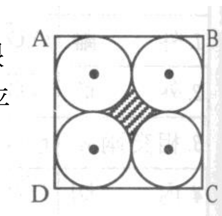
sol) 斜線部分面積 = 扇形$CDE=\dfrac{1}{2}\times1^{2}\times\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}\pi$。

（C）5.如右圖，已知□OABC 是長方形，扇形 OED 是$\dfrac{1}{4}$圓 $\overline{AC}$ 長是 5 公分，請問圓 O 之面積為何呢？（A）9π（B）16π（C）25π（D）36π（平方公分）。

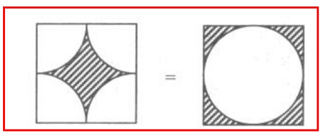


Sol) $\overline{AC}=\overline{OB}=5$, $\therefore$圓O面積=$\pi\times5^{2}=25\pi$。

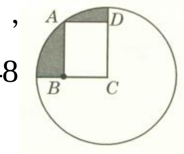
（A）6.平行四邊形 ABCD 中，若∠C 為∠D 的 3 倍，則∠B=？（A）45^{o}（B）60^{o}（C）90^{o}（D）135^{o}。
sol) 平行四邊形中，對角相等，同側內角互補，因此，∠D+∠C=180^{o}，∠D+3∠D=180^{o}→4∠D=4∠B=180^{o}, ∠B=45^{o}。
（B）7.如右圖，□ABCD 為邊長 4 的正方形，內切四個互切的全等圓，則斜線部分面積為多少平方公分呢？（A）$4+\pi$（B）$4-\pi$（C）$2\pi+4$（D）$2\pi-4$（平方公分）。



sol) 如右圖，斜線面積=$\left(\dfrac{4}{2}\right)^{2}-\left(\dfrac{4}{4}\right)^{2}\pi=4-\pi$



（A）8.如右圖，點 C 為圓心，點 A 為圓上一點，並使得□ABCD 為一長方形，期長與寬分別是 8 與 6，求陰影部分面積為何呢？（A）$25\pi-48$（B）$24\pi-48$（C）$23\pi-48$（D）$22\pi-48$ 。



sol) $\overline{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$, 陰影面積=$\frac{1}{4}\times\pi\times10^2-8\times6=25\pi-48$ 。

（A）9.下列敘述有哪幾個是正確的呢？

①在一圓中，圓心是直徑的中點。

②同一圓中，不平行的兩弦其中垂線的交點就是圓心。

③直徑是圓中最長的弦。

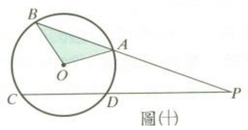
④同一圓中，兩直徑的交點就是圓心。

⑤圓的半徑是弦。

（A）①②③④（B）①③⑤（C）①②③⑤（D）①②③

（B）10.如右圖，P 為圓外一點，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，若$\angle P=40^{\circ}$，則$\angle AOB=$？

（A）100°（B）110°（C）120°（D）160° 。



圖(十)