

Unit 13 數形關係、等差數列與級數

能力指標：◎ (N-4-03) 能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性。

◎ (N-4-04) 能觀察出等差數列的規則性。

◎ (N-4-04) 能利用首項、公差計算出等差數列的每一項。

◎ (N-4-05) 能由觀察和推演，導出等差級數的公式，從理解公式到解題，並能活用於日常生活。

能力一：數的規律與數型關係

一、奇、偶數的規律

(一) 偶數 (even number)：係指在整數中能夠被 2 整除，或等於 $2n$ (n 為整數) 的數，偶數可形成無窮數列 2、4、6、8、10、...

(二) 奇數 (odd number)：係指在整數中不能夠被 2 整除，亦即可被 2 除餘 1 的數，可寫成 $2n+1$ 的形式，奇數可形成無窮數列 1、3、5、7、9、...

二、奇、偶數的和、積

(一) 兩正整數之和為【偶數】⇒此兩數必同時為【奇數】或【偶數】。

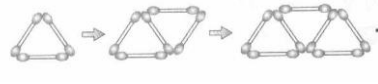
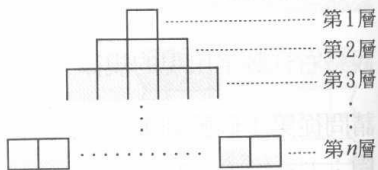
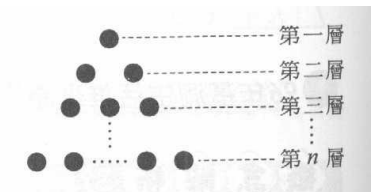
(二) 兩正整數之和為【奇數】⇒此兩數必為【奇數】和【偶數】之和。


(三) 幾個正整數的乘積為【偶數】⇒其中必有【偶數】。

奇 ± 奇 ⇒ 偶	偶 ± 偶 ⇒ 偶	奇 ± 偶 ⇒ 奇
奇 × 奇 ⇒ 奇	偶 × 偶 ⇒ 偶	奇 × 偶 ⇒ 偶

三、數型關係

在有規律排列的型體中，形體與排列的數量呈現規律的變化，此規律變化可使用通式來連結，以便做計算與歸納。

類型一	有 n 個三角形，需要 $2n+1$ 根火柴棒	
類型二	有 n 層，需要 n^2 個小方格	
類型三 (三角數)	有 n 層，需要 $\frac{(1+n) \times n}{2}$ 個黑點	

類型四 (四角數)	有 n 層，需要 n^2 個黑點	
--------------	----------------------	--

【奇、偶數的規律】

講解一：

奇鼎國中一年28班共有30個學生，分成甲、乙兩組，今將偶數個糖果分給甲組同學每人3個，乙組同學每人4個，全部分完，請問甲、乙兩組人數是奇數還是偶數，或者一組奇數、一組偶數呢？

Sol) 因為班上總人數是偶數，所以一定是【奇數+奇數=偶數】或【偶數+偶數=

$$\text{偶數}] \Rightarrow \begin{cases} 3 \times \text{奇數} + 4 \times \text{奇數} = \text{奇數} + \text{偶數} = \text{奇數} \\ 3 \times \text{偶數} + 4 \times \text{偶數} = \text{偶數} + \text{偶數} = \text{偶數} \end{cases}$$

甲、乙兩組人數皆為偶數。

練習一：

(1) 試問下列四個敘述，何者正確？甲：奇數+偶數=奇數；乙：奇數+奇數=偶數；丙：偶數+奇數=偶數；丁：偶數+偶數=奇數

(2) 如果 m 代表一個正整數，則下列哪一個數可以代表一個正奇數？

- (A) $m+1$ (B) $m+2$ (C) $2m-1$ (D) $2m+2$

Sol)

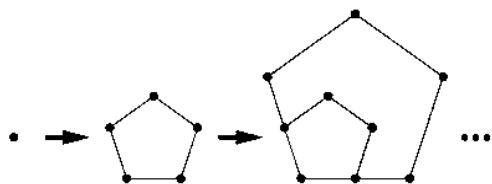
(1) 甲、乙

(2) (C)

【數型關係】

講解一：

如圖，第一個五邊形中的「 \cdot 」個數是5個，第二個五邊形中的「 \cdot 」個數是9個，以此類推，請問第八個五邊形中的「 \cdot 」個數有多少個呢？



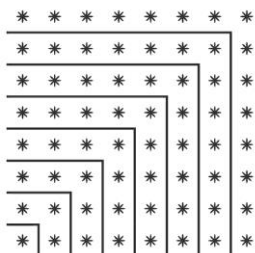
sol)

找出規律性：一個五邊形由1個點加上4個點構成，第二個五邊形在多加4個點構成，所以可以導出通式為： $(4n+1)$ ， n 代表五邊形個數。

第八個五邊形有 $\Rightarrow (4 \times 8) + 1 = 33$ 點

練習一：

觀察下圖，請按照分割情形，寫出適當的等式：



sol)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = n^2 = 8^2 = 64$$

【十分鐘即時練習】

- (C) 1. 若 a 為任意一個正整數，則下列哪一個形式必為奇數？
 (A) $2a$ (B) $2(a-1)$ (C) $2a+1$ (D) $3a$
- (D) 2. 甲數為整數，則下列何者一定正確？
 (A) 「 $5 \times$ 甲數」為奇數，(B) 「 $2 \times$ 甲數+7」為偶數，(C) 「 $2 \times$ 甲數+8」為奇數，(D) 「 $2 \times$ 甲數+11」為奇數
- (B) 3. 已知甲數+乙數所得的和是偶數，而乙數+丙數所得的和是奇數，如果丙數是6，則下列哪一個選項是正確的？(A) 甲數可能是4 (B) 甲數可能是7 (C) 乙數可能是10 (D) 乙數可能是8
- (C) 4. 華西街靠近西邊的房子門牌號碼為1、3、5、7、9、...，連續奇數號；靠近東邊的房子門牌號碼為2、4、6、8、10...，連續偶數號，則下列何者正確？(A) 靠近東邊第50間房子為102號，(B) 靠近東邊第61間房子為120號，(C) 靠近西邊第60間房子為119號，(D) 靠近西邊第51間房子為103號
- (D) 5. 小麟老師將120位同學全部加以編號，並依下圖的排列方式分為A、B、C、D、E五組，則117號同學會編在哪一組呢？(A) A組 (B) B組 (C) C組 (D) D

組	A	B	C	D	E
	1	2	3	4	5
	10	9	8	7	6
	11	12	13	14	15
	20	19	18	17	16
	⋮		⋮		

能力二：等差數列與級數

- 一、數列：依序排列的一串數稱為數列 (a_1, a_2, \dots, a_n)，其中第一個項數稱為【首項 a_1 】，最後一個數稱為【末項 a_n 】，共有 n 項。
- 二、等差數列：在一個數列中，任何相鄰的兩項，當後項減前項所差的都相同時此數列稱為等差數列，這個差稱為等差數列的公差。
- 三、等差級數（算術級數）：在一等差數列中，第 n 項前（含第 n 項）的總和。

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

四、等差數列與級數的重要公式：

設首項為 a_1 ，公差為 d ，第 n 項為 a_n ，前 n 項的總和為 S_n

(1) 標準式

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, L, a_1+(n-1)d$$

(2) 第 n 項公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = S_n - S_{n-1}$$

(3) 前 n 項總和公式(等差級數)

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

五、等差中項

(一) 假設 a 、 b 、 c 成等差數列 $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ ， b 稱為 a 、 c 的等差中項。

(二) 若在 a 、 b 之間，插入 m 個等差中項，則 $b = a + (m+1)d$ 。

六、調和數列

若 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ ，之倒數 a 、 b 、 c 成等差數列，則 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ 稱為調和數列，且 $\frac{1}{b}$

稱為 $\frac{1}{a}$ 與 $\frac{1}{c}$ 調和中項。

【等差數列】

講解一：

有一等差數列，其第 n 項是 $(-3n+20)$ ，請問：

(1) 首項=? (2) 公差=? (3) 第 20 項=? (4) 第幾項開始為負數呢?

Sol)

(1) 首項 $a_1 = -3 \times 1 + 20 = 17$

(2) 公差 $d = a_2 - a_1 = (-3 \times 2 + 20) - 17 = 14 - 17 = -3$

(3) $a_{20} = -3 \times 20 + 20 = -40$

(4) $-3n + 20 < 0$, $-3n < -20$, $n > 6\frac{2}{3}$ 取整數 $n = 7$

練習一：

若 a 、 3 、 x 、 y 、 15 成等差數列， a 、 c 、 z 、 20 、 b 也成等差數列，請問 $x+y+z-c=?$

Sol)

$$(1) a, 3, x, y, 15 \Rightarrow \text{等差數列 } d = \frac{15-3}{3} = 4$$

$$a=3-4=-1, x=3+4=7, y=7+4=11$$

$$(2) -1, c, z, 20, b \Rightarrow \text{等差數列 } d = \frac{20-(-1)}{3} = 7$$

$$c=-1+7=6, z=6+7=13, b=20+7=27$$

$$\Rightarrow x+y+z-c=7+11+13-6=25$$

【等差級數】

講解二：

已知多邊形的外角和為 360° ，一內角與其外角和為 180° ，若有一多邊形其內角度數是一個以公差為 4° 的等差數列，且其最大內角為 162° ，請問此多邊形的邊數為何呢？

Sol)

162° 的外角為 18° ，多邊形的外角和為 360° ，設此多邊形有 n 邊，

$$\Rightarrow a_1=18, d=4$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \Rightarrow 360 = \frac{n[36 + (n-1) \times 4]}{2}$$

$$\Rightarrow 720 = 4n^2 + 32n \Rightarrow n^2 + 8n - 180 = 0 \Rightarrow (n+18)(n-10) = 0$$

$$\Rightarrow n = -18 (\text{不合}) \text{ 或 } n = 10 (\text{邊})$$

練習二：

有一等差級數的第 4 項為 (-3) ，第 8 項為 13 ，等差級數和為 1290 ，請問此等差級數的首項、公差、項數各為多少呢？

Sol)

$$\begin{cases} a_1 + 3d = -3 \\ a_1 + 7d = 13 \end{cases} \Rightarrow d = 4, a_1 = -15$$

$$1290 = \frac{n[2 \times (-15) + (n-1) \times 4]}{2} \Rightarrow 2580 = n(4n-34)$$

$$\Rightarrow 4n^2 - 34n - 2580 = 0 \Rightarrow 2n^2 - 17n - 1290 = 0 \Rightarrow (n-30)(2n+43) = 0$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{-43}{2}\right) (\text{不合}) \text{ 或 } n = 30$$

$$\text{Ans: } a_1 = -15, d = 4, n = 30$$

【十分鐘即時練習】

(B) 1.有一等差數列的首項是4，第六項是34，則公差是多少?(A)4 (B)6 (C)8 (D)30

Sol) 設公差為 d ，則 $4 + 5d = 34$ ， $5d = 30$ $\therefore d = 6$

(A) 2.有一等差數列，第 n 項是 $2n - 1$ ，則下列選項何者正確?(A)首項是1 (B)第二項是2 (C)第三項是3 (D)第四項是4

Sol) \therefore 第 n 項 $a_n = 2n - 1$ \therefore 首項 $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ ，第二項 $a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$ ，第三項 $a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$ ，第四項 $a_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$

(B) 3.若一個等差級數的第三項為 -2 ，第十項為 61 ，則此級數前 15 項的和=? (A)545 (B)645 (C)840 (D)940

Sol) 公差 = $\frac{61 - (-2)}{10 - 3} = 9$ ，首項 = $-2 - 9 \times 2 = -20$

$$S_{15} = \frac{15 \times [(-20) \times 2 + (15 - 1) \times 9]}{2} = \frac{15 \times (-40 + 126)}{2} = 645$$

(A) 4.下列何者不是等差級數?(A)1, 1, 1, 1, 1 (B)2+2+2+2+2 (C)1+2+3+4+5 (D)2+4+6+8+10

Sol) 等差級數各項間需以"+"號連接，故(A)不是等差級數

(B) 5.已知一等差級數的首項是 23 ，末項是 59 ，其和為 533 ，則此級數的公差是多少?(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

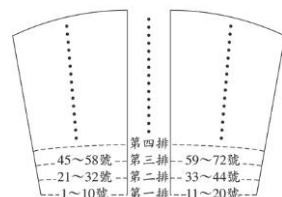
Sol) 設級數共 n 項，則 $\frac{(23+59) \times n}{2} = 533$ ， $41n = 533$ $\therefore n = 13$ ，

$$\text{故公差 } d = \frac{59 - 23}{13 - 1} = 3$$

【基本觀念題】

(C) 1.華納電影院的座位表如下圖，即第一排左、右區各有 10 座位，第二排左、右區各比第一排增加 2 位，以此類推.....，若小鼎買的电影票座位號碼是 161 號，請問他應坐在左區或右區第幾個位子上?

- (A)左區第六排第 10 位
- (B)左區第六排第 1 位
- (C)右區第六排第 1 位
- (D)右區第六排第 9 位

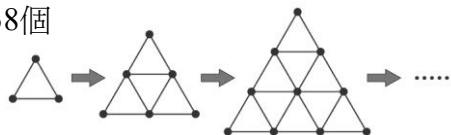


(C) 2.下圖為一張台灣高鐵商務艙的座位表，採對號入座的方式，已經知道靜德的座位為 38 號，那麼應該是在第幾排第幾列?

- (A)第 2 排第 10 列
- (B)第 2 排第 9 列
- (C)第 4 排第 10 列
- (D)第 4 排第 9 列

第1排	第2排	第3排	第4排
窗	走道	走道	窗
1	3	4	2
5	7	8	6
9	11	12	10
⋮			
⋮			
⋮			

(C) 3.如下圖，一個三角形有 3 個交點， 4 個三角形有 6 個交點，則 36 個三角形有幾個交點? (A)64個 (B)48個 (C)28個 (D)38個



- (A) 4. 台積電舉辦登山健行，員工排成一列行走，如果依序為男、男、女、男、女、男、男、女、男、女、.....，則第74個員工的性別為何？
 (A)男(B)女(C)可能是男也可能是女(D)無法判斷

- (D) 5. 若 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 為等差級數，則各項皆加上5後所成新等差級數總和為 T_n ，則下列選項何者正確？
 (A) $S_n = T_n$ (B) $T_n = 5S_n$ (C) $T_n = S_n + 5$ (D) $T_n = S_n + 5n$

Sol) \because 各項均加5 \therefore n項共加 $5n$ ，故 $T_n = S_n + 5n$

- (D) 6. 有一三角形的三內角度數成等差數列，若公差為 35° ，則此三角形為何種三角形？(A)正三角形 (B)等腰三角形 (C)直角三角形 (D)鈍角三角形

Sol) 設最小角為 a° ，則 $a + (a + 35) + (a + 70) = 180$ ， $3a + 105 = 180$ ， $3a = 75$
 $\therefore a = 25^\circ$ 三內角度數為 25° ， 60° ， 95° ，故此三角形為鈍角三角形

- (C) 7. 有一等差數列，公差是3，若每項同乘以2形成一新等差數列，則新等差數列之公差為多少？(A) $\frac{3}{2}$ (B)3 (C)6 (D)9

Sol) 設此數列的首項為 a ，則此數列為 $a, a+3, a+6, \dots$

同乘以2後此數列為 $2a, 2a+6, 2a+12, \dots$ ，公差為 $(2a+6) - 2a = 6$

- (D) 8. 若一等差數列共有6項，且末項比首項多60，則其公差為多少？(A)5 (B)6 (C)10 (D)12

Sol) 設首項為 a ，公差為 d ，則 $(a + 5d) - a = 60$ ， $5d = 60 \therefore d = 12$

- (C) 9. 若 a 與 b 的等差中項為4， $2a - b$ 與 $a + 2b$ 的等差中項為9，則 $a - b$ 等於多少？
 (A)-2 (B)0 (C)2 (D)8

Sol)
$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(2a-b)+(a+2b)}{2} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b = 8 \\ 3a+b = 18 \end{cases} \text{ 解得 } a = 5, b = 3. \therefore a - b = 2$$

- (A) 10. 已知 $1, a, b, c, \frac{19}{3}, \dots$ 為一等差數列，則 $3(b - a)$ 之值可被下列何者整除？(A)2 (B)3 (C)5 (D)7

Sol) $d = (\frac{19}{3} - 1) \div 4 = \frac{4}{3}$ ， $3(b - a) = 3d = 3 \times \frac{4}{3} = 4$ ，4可被2整除。

【溫故歷屆基測試題】

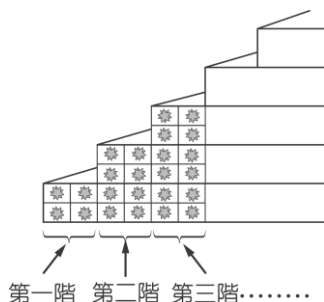
- (A) 1. 一等差數列 a_1, a_2, \dots, a_{100} ，已知 $a_{70} - a_{57} < 0$ ，那麼下列哪一選項是正確的？ (A) $a_{43} - a_{69} > 0$ (B) $a_{42} - a_{51} < 0$ (C) $a_{18} + a_{51} > a_{21} + a_{48}$
 (D) $a_{12} + a_{31} > a_9 + a_{34}$ 。【90.基測一】

- (C) 2. 下列哪一個選項中的數列是等差數列也是等比數列？ (A) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 6, 8, 10$ (B) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (C) $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$ 、

2 (D) 0、1、0、1、0、1、0、1。【90.基測二】

(C) 3.如圖，有一樓梯，每一階的長度、寬度與增加的高度都相等。有一工人
在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了 4 塊磁磚，第
二階貼了 8 塊磁磚，……，依此規則貼了 112 塊磁磚後，剛好貼完此樓
梯的一側。請問此樓梯總共有多少階？ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8。

【91.基測一】



$$\text{Sol) } S_n = \frac{n[2 \times 4 + 4(n+1)]}{2} = 112 \Rightarrow n[8 + 4n - 4] = 224 \Rightarrow n^2 + n = 56$$

$$\Rightarrow (n+8)(n-7) = 0, n = 7 \text{ 或 } (-8) \text{ 不合}$$

(B) 4.某公司每天晚上必須派保全人員留守，下表是甲、乙、丙、丁、戊五位
保全人員的留守值班表。該公司排班的規則如下：

星期	一	二	三	四	五	六	日
第 1 週	甲	乙	丙	丁	戊	甲	乙
第 2 週	丙	丁	戊	甲	乙	丙	丁
...

(1)按甲、乙、丙、丁、戊的順序，各排一天班。

(2)五人排完之後再以原順序排班。

請問『丙』先生在下列週次中的哪一週必須留守兩次？ (A)第 38 週

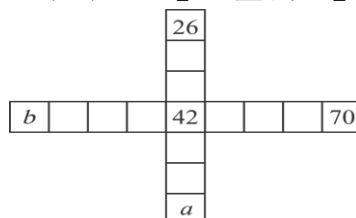
(B)第 39 週(C)第 40 週(D)第 41 週。【91.基測一】

Sol)每五週一個循環，而五週中的第二、四週丙先生須留守兩次。

(A) $38 = 5 \times 7 + 3$, (B) $39 = 5 \times 7 + 4$, (C) $40 = 5 \times 8$, (D) $41 = 5 \times 8 + 1$

(A) 5.如圖，橫列有 9 個方格，直列有 7 個方格。若將每個方格內都填入一個
數字，使得橫列方格內的數字由左到右成等差數列，直列方格內的數字
由上到下也成等差數列。已知共同方格內的數字是 42，求 $a - b = ?$

(A) 44 (B) 42 (C) 40 (D) 38。【91.基測二】



Sol) 利用等差中項 $\Rightarrow 42 = \frac{26+a}{2} \Rightarrow a = 58, 42 = \frac{b+70}{2} \Rightarrow b = 14$

(C) 6. 小玉拿了一堆棋子玩排列遊戲。

第一次：放 1 顆棋子，如圖(a)；

第二次：放 9 顆棋子，排出一個正方形，如圖(b)；

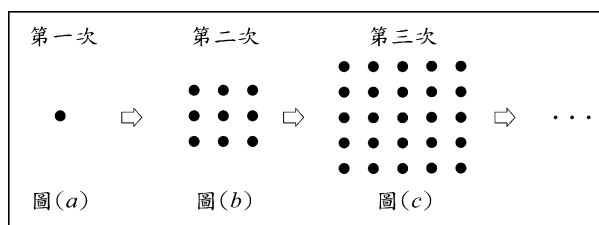
第三次：放 25 顆棋子，排出一個正方形，如圖(c)；

⋮ ⋮

依此規則，每一次排出的正方形，其每邊的棋子數都要比前一次多 2

顆。請問第十次比第九次多放了幾顆棋子？(A) $10^2 - 9^2$ (B) $11^2 - 9^2$ (C)

$19^2 - 17^2$ (D) $21^2 - 19^2$ 。【91.基測一】



Sol) 第九次每邊的棋子數為 $\Rightarrow 1 + (9-1) \times 2 = 17$ (個)
 第十次每邊的棋子數為 $\Rightarrow 17 + 2 = 19$ (個)

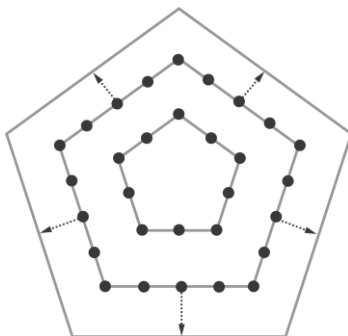
(B) 7. 下列四個數列中，哪一個是等比數列？ (A) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ (B) $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ (C) $3, 6, 9, 12, 15$ (D) $1, 3, 5, 7, 9$ 。【92.基測一】

Sol) 後項除以前項結果都相同即為等比數列。

(C) 8. 數列 a, b, c 為等差數列，公差為 3。若數列 $a+5, b+10, c+15$ 也為等差數列，則公差為何？ (A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 15。【92.基測二】

Sol) $b=a+3, c=a+6$ 代入 $\Rightarrow a+5, b+10=a+13, c+15=a+21$ 亦成等差數列

(A) 9. 如圖，有若干位學生排出正五邊形的隊形，由內而外共排了 6 圈，且學生人數剛好排完。已知最內圈每邊 3 人，往外每圈每邊增加 2 人（即由內向外算起第 2 圈每邊 5 人，第 3 圈每邊 7 人，……）。請問此隊形的學生共有多少人？ (A) 210 (B) 240 (C) 285 (D) 630。【92.基測二】

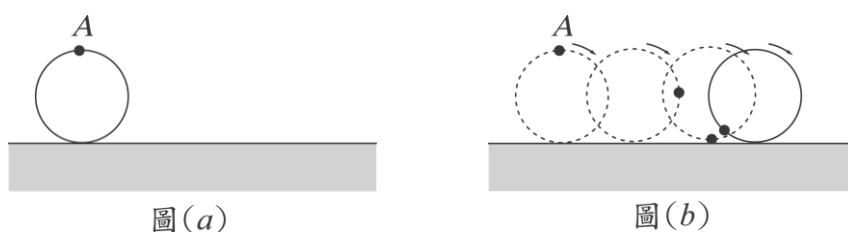


Sol) 由內而外, 第一圈人數: $3 \times 5 - 5 = 10$, 第二圈人數: $5 \times 5 - 5 = 20$
 第三圈人數: $7 \times 5 - 5 = 30$, \therefore 學生總人數 = $10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 = 210$

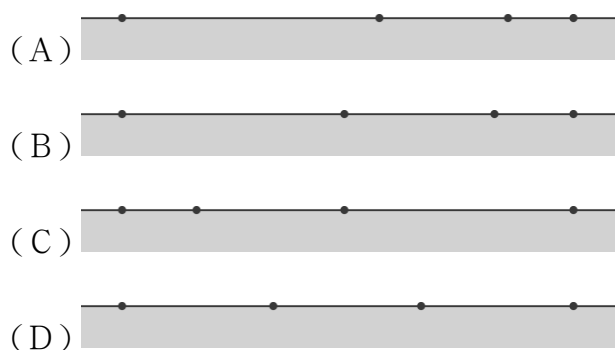
10. 如圖(a), 地板上有一圓, 其圓周上有一點 A。今在沒有滑動的情況下, 將此圓向右滾動。已知當 A 接觸到地板時, 會在地板上留下一個印子, 如圖(b) 所示, 且此圓滾動的方式是:

- 第 1 分鐘轉 1 圈
- 第 2 分鐘轉 2 圈
- 第 3 分鐘轉 4 圈
- ⋮

依此規則 (即每一分鐘轉的圈數都是前一分鐘的兩倍), 愈轉愈快。【93.基測一】



(D) ① 下列哪一圖形是此圓轉了 4 圈之後, 留在地板上四個印子的位置關係圖?



Sol) A 點每次在地板上留下印子, 必定經過一個圓周的距離。

(D) ② 請問, 轉了 10 分鐘之後, 地板上留下的印子共有幾個? (A) 10 (B) 55
 (C) 500 (D) 1023。

Sol) 第 n 分鐘內走了 2^{n-1} 圈 $\Rightarrow 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9 = \frac{1 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$

(D) 11. 若數列 a 、 b 、 c 為等差數列, 公差為 2, 則下列敘述何者錯誤? (A) 數列 $a+5$ 、 $b+5$ 、 $c+5$ 也是等差數列 (B) 數列 $5a$ 、 $5b$ 、 $5c$ 也是等差數列 (C) 數列 $a-1$ 、 $b-1$ 、 $c-1$ 也是等差數列 (D) 數列 a^2 、 b^2 、 c^2 也是等差數列。【93.基測二】

Sol)一等差數列各項同加(減)一數後仍然為等差數列,且公差不變;同乘一數後亦仍為等差數列,但公差改變。

若一數列,假設 $a \neq b \neq c$, $a^2 = a \times a$, $b^2 = b \times b$, $c^2 = c \times c$

12.甲、乙、丙三家新聞臺每天中午 12:00 同時開始播報新聞,其中:

甲臺每播報 10 分鐘新聞後就接著播廣告 2 分鐘;

乙臺每播報 8 分鐘新聞後就接著播廣告 1 分鐘;

丙臺每播報 15 分鐘新聞後就接著播廣告 3 分鐘。【94.基測二】

(A) ①在 12:47 時,三家新聞臺進行的內容為何? (A)甲:廣告;乙:新聞;丙:新聞(B)甲:新聞;乙:廣告;丙:新聞(C)甲:新聞;乙:新聞;丙:廣告(D)三家新聞臺皆正在播報新聞。

(C) ②(2)三家新聞臺在下列哪一個時間廣告同時結束? (A) 12:33 (B) 12:39 (C) 13:12 (D) 14:00。

Sol)①從 12:00~12:47 三家新聞台進行的內容如下:

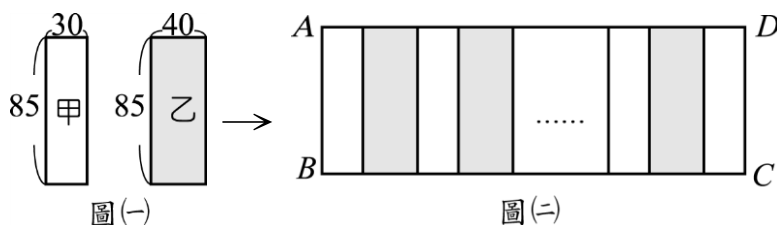
甲: $12+2+10+2+10+2+10+1 \rightarrow$ 廣告

乙: $8+1+8+1+8+1+8+1+8+1+2 \rightarrow$ 新聞

丙: $15+3+15+3+11 \rightarrow$ 新聞

② $10+2=12, 8+1=9, 15+3=18, \therefore 12、9、18$ 的公倍數三家新聞台廣告同時結束,又 $[12,9,18]=36, 36 \times 2 - 60 = 12, 36 \times 3 - 60 = 48$

(B) 13.有甲、乙兩種長方形紙板各若干張,其中甲的長為 85 公分,寬為 30 公分;乙的長為 85 公分,寬為 40 公分,如圖(一)所示。今依同種紙板不相鄰的規則,將所有紙板由左至右緊密排成圖(二)的長方形 ABCD,則下列哪一個選項可能是 \overline{AD} 的長度? (A) 770 公分(B) 800 公分(C) 810 公分(D) 980 公分。【95.基測一】



Sol) $30+40=70, \overline{AD}=70n+30$

(B) 14.已知 $1^2+1=2^2-2, 2^2+2=3^2-3, 3^2+3=4^2-4, \dots, 99^2+99=100^2-100$ 。若 $1123^2+1123+2248+1125=a^2$, 且 $a>0$, 則 $a=?$ (A) 1124 (B) 1125 (C) 1126 (D) 1136。

$1123^2+1123=1124^2-1124$, 又 $1124^2+1124=1125^2-1125$

Sol) $a^2=1124^2-1124+2248+1125=1124^2+1124+1125=1125^2-1125+1125=1125^2$

【模擬學力基測試題】

(C) 1. 有一等差數列的首項為25，第三項為19，若從第n項開始出現負數，則n為多少?(A)8 (B)9 (C)10 (D)11

Sol) $\because a_3 = a_1 + (3-1)d$, $\therefore 19 = 25 + (3-1)d$ $\therefore d = -3$, $a_n = 25 + (n-1) \times (-3) < 0$

$$25 - 3n + 3 < 0, 3n > 28, n > 9\frac{1}{3}, \text{又 } n \text{ 為正整數 } \therefore n = 10$$

(B) 2. 在24於-8之間，插入11個數使之成等差數列，則所插入的第幾個數是0?
(A)10 (B)9 (C)8 (D)7

Sol) $\because -8 = 24 + (13-1)d$, $d = -\frac{8}{3}$, 又 $0 = 24 + (n-1) \times (-\frac{8}{3})$ $\therefore n = 10$, \therefore 插入的第 $10-1=9$ 項

(C) 3. 郭拾鳴的遺囑交代財產的 $\frac{1}{5}$ 捐給慈善機構，其餘財產按等差數列由大而小分給三個兒子，結果小兒子大叫不公平。因為捐給慈善機構的跟他分到的一樣多。請問三兄弟按什麼比例分財產?(A)3:2:1 (B)4:3:2 (C)5:4:3 (D)6:5:4

Sol) 設三個兒子由大而小分得 $\frac{1}{5}a+2d$, $\frac{1}{5}a+d$, $\frac{1}{5}a$,

$$\therefore (\frac{1}{5}a+2d) + (\frac{1}{5}a+d) + \frac{1}{5}a = \frac{4}{5}a \quad , \quad d = \frac{1}{15}a \quad ,$$

$$\text{故} (\frac{1}{5}a + \frac{2}{15}a) : (\frac{1}{5}a + \frac{1}{15}a) : \frac{1}{5}a = \frac{5}{15}a : \frac{4}{15}a : \frac{3}{15}a = 5 : 4 : 3$$

(C) 4. 下列何者不是等差數列?(A)0, 0, 0, 0 (B) $\frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}$ (C)a-d, a, a+d, a+3d (D)-0.5, 0, 0.5, 1

Sol) $\because a - (a-d) = (a+d) - a$, $(a+3d) - (a+d) \neq (a+d) - a$, $\therefore a-d, a, a+d, a+3d$ 不是等差數列

(C) 5. 有一個很特別的數列如下： $\sqrt{0+1}$, $\sqrt{1+2}$, $\sqrt{2+3}$, , 本數列的第k項為多少? (A) \sqrt{k} (B) $\sqrt{k+1}$ (C) $\sqrt{2k-1}$ (D) $\sqrt{2k+1}$ 。

Sol) $a_k = \sqrt{1+(k-1) \times 2} = \sqrt{2k-1}$

(C) 6. 某甲第一年在銀行存入10000元，以後每一年都比前一年多存2000元，假設該銀行沒有任何利息，而某甲也沒有動用過這筆存款，即在第幾年某甲存款才會到達90000元呢? (A)4 (B)5 (C)6 (D)7(年)。

Sol) $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1) \times d]$, $\frac{n}{2} [2 \times 10000 + (n-1) \times 2000] \geq 90000$

$$10n + n^2 - n \geq 90, n^2 + 9n - 90 \geq 0,$$

$$\text{當 } n=5 \text{ 時, } 5^2 + 9 \times 5 - 90 = -20 < 0$$

$$\text{當 } n=6 \text{ 時, } 6^2 + 9 \times 6 - 90 = 0 \geq 0$$

- (C) 7.如圖，每個小正方體的邊長是 1 公分，因此一個小正方體的邊長和是 12 公分；連續橫排 2 個時，形成的長方體邊長和是 16 公分；連續橫排 3 個時，形成的長方體邊長和是 20 公分，如果連續橫排 n 個，則形成的長方體邊長之和為多少公分。(請用 n 來表示) (A) $2n+4$ (B) $2n-4$ (C) $4n+8$ (D) $4n-8$ 。



Sol) $a_n = a_1 + (n-1) \times d = 12 + (n-1) \times 4 = 4n + 8$

- (C) 8.樓梯有 100 階，由下而上編號從 1 號編到 100 號，甲由 1 號階往上走，每步走一階，乙由 100 號階往下走，每步走 2 階，假設甲、乙兩人每步所用時間相同，已知中途兩人在同一階會合，則該階的號碼是幾號？ (A) 14 (B) 24 (C) 34 (D) 44 (號)

Sol) 設該階號碼為 n 號， $\therefore 1 + (n-1) \times 1 = 100 + (n-1) \times (-2)$ ，
 $n = 100 - 2n + 2, n = 34$

- (A) 9.等差數列的第五項是 9，第十五項是 24，若 a_1 是首項， d 是公差，則坐標平面上點 $(a_1 + d, a_1 - d)$ 在第幾象限? (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

Sol) $\because a_5 = 9, a_{15} = 24, \therefore \begin{cases} a_1 + 4d = 9 \dots\dots(1) \\ a_1 + 14d = 24 \dots(2) \end{cases}$ ，

$$2-1: (a_1 + 14d) - (a_1 + 4d) = 24 - 9, \therefore 10d = 15$$

$$d = \frac{3}{2} \text{ 代入 (1) 得 } a_1 + 4 \times \frac{3}{2} = 9, a_1 = 3,$$

$$\therefore (a_1 + d, a_1 - d) = (3 + \frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2}) \text{ 在第一象限。}$$

- (A) 10.假設某戲院共有 30 排坐位，依次每一排比前一排多 2 個坐位，且最後一排有 82 個坐位，請問第 1 排和第 10 排共有多少個坐位?
 (A) 66 (B) 72 (C) 78 (D) 84

Sol) $\because a_{30} = 82, d = 2 \therefore 82 = a_1 + 29 \times 2, a_1 = 24$ ，又 $a_{10} = a_1 + 9d = 24 + 9 \times 2 = 42$ ，
 $\therefore a_1 + a_{10} = 24 + 42 = 66$ ，

【進階練習題】

- (C) 1.右列數列中：1、1、2、4、7、13、____、44...。缺哪個數呢？ (A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 28。

Sol)經過觀察後可發現下述規則：自第四個數起，每個數均為前三個數之和，亦即 $4=1+1+2$ ； $7=1+2+4$ ； $13=2+4+7$ ；...以此類推空格處應為 $4+7+13=24$ ，再

檢查 $44=7+13+24$ 符合！

(A) 2. 假設有數列為 $\frac{1+3}{5+7}, \frac{1+3+5}{7+9+10}, \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}, L$ 則此數列的第 7 項為何呢？

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{64}{161}$ (D) $\frac{49}{161}$ 。

$$\text{Sol) 第7項} = \frac{1+3+5+7+9+11+13+15}{17+19+21+23+25+27+29+31} = \frac{\frac{8}{2} \times [2 \times 1 + (8-1) \times 2]}{\frac{8}{2} \times [2 \times 17 + (8-1) \times 2]} = \frac{1}{3}$$

(B) 3. 假設某數列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, L$ ，已知 $a_0=1, a_1=2, a_2=3, L$ ，已知對任何自然數 $n \geq 3$ ， $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ 恆成立，請問 $a_{16}=?$ (A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21。

$$\text{Sol) } a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3} = L = a_2 - a_1 = a_1 - a_0 = 2 - 1 = 1$$

$$a_n - a_0 = n, a_n = a_0 + n = 1 + n, a_{16} = 1 + 16 = 17$$

(D) 4. 有一數列：2、5、11、x、y、95、191、...，請問 $x+y=?$ (A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70。

$$\text{Sol) } \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 11 \\ a \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x \\ b \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} y \\ c \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 95 \\ 96 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 191 \\ 96 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 96 \text{ 的標準分解式: } 96=3 \times 2^5$$

$$3=3 \times 2^0, 6=3 \times 2^1, \text{ 依此類推 } a=3 \times 2^2, b=3 \times 2^3, c=3 \times 2^4$$

$$x=11+3 \times 2^2=23, y=95-3 \times 2^4=47 \Rightarrow x+y=23+47=70$$

(D) 5. 一等差數列首項為 a (a 為正整數)，公差為 -1 ，則第幾項是 $-a$? (A) a (B) $2a$ (C) $a+1$ (D) $2a+1$

$$\text{Sol) 設第 } a_n \text{ 項為 } -a, \text{ 則 } a_n = a + (n-1)d, -a = a + (n-1)(-1)$$

$$\therefore -a = a - n + 1, \text{ 即 } n = 2a + 1,$$

(B) 6. 以 2, 8, 9 三數分別當做一個等差數列的首項、公差或項數，可任意安排，欲使數列的末項值最大，則需安排公差為何? (A) 2 (B) 8 (C) 9 (D) 無法確定

Sol) 等差數列【公差值】及【項數】愈大則【末項】亦會愈大，故以 2 為首項，8 為公差，9 為項數

(A) 7. 在坐標平面上，由點 $A_1(-47, 35)$ 向右移動 3 個單位長，再向下移動 2 個單位長，到達點 A_2 。繼續由點 A_2 同樣向右移動 3 個單位長，再向下移動 2 個單位長，到達點 A_3 。如此繼續移動，依次可到達點 A_4, A_5, A_6, \dots ，則點 A_{18} 在第幾象限內? (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

$$\text{Sol) } A_{18} \text{ 的 } x \text{ 軸坐標} = -47 + 17 \times 3 = 4, y \text{ 軸坐標} = 35 + (-2) \times 17 = 1, \therefore (4, 1)。$$

(D) 8. 已知 $x, 8, y$ 成等差數列，且 $|x-y|=7$ ，則 $y=?$ (A) 10 (B) 10.5 (C) 11 (D) 11.5

Sol) $x, 8, y$ 成等差數列 $\therefore x+y=16$ ，又 $|x-y|=7$ ，

$$\therefore (1) \begin{cases} x+y=16 \dots\dots(1) \\ x-y=7 \dots\dots(2) \end{cases}, (1)、(2) \text{ 聯立得 } x=\frac{23}{2}, y=\frac{9}{2},$$

$$\text{或}(2) \begin{cases} x+y=16 \dots\dots(3) \\ y-x=7 \dots\dots(4) \end{cases}, (3)、(4) \text{ 聯立 } y=\frac{23}{2}, x=\frac{9}{2}。$$

(C) 9. 自 1 到 120 之間，所有被 3 除餘 2 的正整數之和為何？ (A) 2440 (B) 2430 (C) 2420 (D) 2410。

$$\text{Sol) 和} = 2 + 5 + \dots\dots + 119 = \frac{121 \times 40}{2} = 2420$$

(C) 10. 有一個數列 $n+d, 2n+3d, 3n+5d, \dots\dots$ ， n 和 d 都不是 0，且 $n \neq d$ ，有關這個數列的性質，請選出正確的敘述為何？ (A) 本數列不是等差數列 (B) 本數列是等差數列，公差是 $n+d$ (C) 本數列是等差數列，公差是 $n+2d$ (D) 本數列是等差數列，公差是 $2n-d$ 。

Sol) $\therefore (2n+3d) - (n+d) = n+2d, (3n+5d) - (2n+3d) = n+2d, \dots\dots$ ，
以此類推：後項－前項皆等於 $n+2d$ ， \therefore 為等差數列，且公差為 $n+2d$