

Unit 12 一元二次方程式

能力指標：◎ (A-4-05) 能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。

- ◎ (A-4-05) 能利用因式分解來解一元二次方程式。
- ◎ (A-4-05) 能利用配方法解一元二次方程式。
- ◎ (A-4-05) 能認識判別式，並利用公式解來解一元二次方程式。
- ◎ (A-4-05) 能利用一元二次方程式解應用問題。

能力一：一元二次方程式的解法

一、一元二次方程式的意義

一個方程式中只含有一個未知數 x ，此未知數的最高次數為二次，稱此方程式為一元二次方程式。凡是使得方程式等號成立的數稱之為方程式的解；而使得多項式的值為零的數稱之為多項式的根。因此，一元二次方程式的解就是所對應的二次多項式的根。所以，我們也稱此類方程式的解為根。

二、一元二次方程式的解法

常見的一元二次方程式的三種解法：【因式分解法】、【配方法】和【公式解法】等三種，另外也運用判別式來探討兩根的特性，並且討論根與係數之間的關係。

(一) 因式分解法

係運用【提出公因式法】、【平方差公式】、【完全平方公式】、及【十字交乘法】來解題。

(二) 配方法

配方法常用於不能用十字交乘法或無法求解的一元二次方程式，有時候遇到係數較大時，使用配方法會比因式分解法容易。

1. 平方根解一元二次方程式的三種形式

類型	型一： $x^2=k$	型二： $(x+h)^2=k$	型三： $(ax+p)^2=q$
解	$x=\pm\sqrt{k}$	$x=-h\pm\sqrt{k}$	$x=\frac{-p\pm\sqrt{q}}{a}$

2.配方法：

假設一元二次方程式的標準式： $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)，其【配方】的步驟如下：

$$(1) \text{ 方程式} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$(2) \text{ 兩邊同除以 } a \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(3) \text{ 常數項移到右邊} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$(4) \text{ 在左右二式同加} \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$(5) \text{ 左式可化為完全平方} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

這個結果與前面 $(x-h)^2 = k$ 的形式相同，因為 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ 恆為正數或0，所以

當 $b^2 - 4ac \geq 0$ 時，我們得到：

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 或 } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

若避開繁複的運算過程，直接將方程式的係數代入這個解的通式，即可得到方程式的解。因此，我們利用上面的通式求解，稱為【公式解】。

(三) 公式解

將一元二次標準式配方之後，會得到一個公式，透過此公式即可求解。

$$\text{公式解} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

其中【 $D = b^2 - 4ac$ 】稱為判別式，係用於判斷【根】的形式：

判別式的性質	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$	$D \geq 0$
解(根)的情況	兩相異實根	兩根相等 (重根)	沒有實數解 (無解)	有實數解 (有解)

三、一元二次方程式的【根】與【係數】關係

$$\begin{aligned}
 & \text{設 } \alpha、\beta \text{ 為方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的兩根，因此 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 可化成} \\
 & a(x - \alpha)(x - \beta) = 0。 \text{我們知道 } ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \\
 & \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - \alpha)(x - \beta) \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta) \\
 & \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta， \text{經由比較係數，} \\
 & \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ 及 } \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}。
 \end{aligned}$$

【因式分解法—解一元二次方程式】

講解一：

請用因式分解法，求一元二次方程式的根為何呢？

$$(1) 4x = 3x^2 \quad (2) x^2 - 9 = 0 \quad (3) x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (4) 6x^2 - 13x + 5 = 0$$

Sol)

$$(1) \text{原式} \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0, x(3x - 4) = 0, x = 0 \text{ 或 } \frac{4}{3}$$

$$(2) \text{原式} \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0, x = 3 \text{ 或 } (-3)$$

$$(3) \text{原式} \Rightarrow (x - 3)^2 = 0, x = 3 \text{ (重根)}$$

$$(4) \text{原式} \Rightarrow (2x - 1)(3x - 5) = 0, 2x - 1 = 0 \text{ 或 } 3x - 5 = 0, x = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{5}{3}$$

練習一：

請用因式分解法，求一元二次方程式的根為何呢？

$$(1) (x + 8)(x - 9) = (8 - x)(9 + x) + 56 \quad (2) 12x^2 - 23x = 24 \quad (3) 3(x - 2)^2 - 3 = 0$$

Sol)

$$(1) \text{原式} \Rightarrow x^2 - 9x + 8x - 72 = 72 + 8x - 9x - x^2 + 56$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 200 = 0, x^2 = 100, x = 10 \text{ 或 } (-10)$$

$$(2) \text{原式} \Rightarrow (3x - 8)(4x + 3) = 0, x = \frac{8}{3} \text{ 或 } \left(\frac{-3}{4}\right)$$

$$(3) \text{原式} \Rightarrow 3(x - 2)^2 = 3, (x - 2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 1, x = 3 \text{ 或 } 1$$

【配方法－解一元二次方程式】

講解二：

請用配方法，求一元二次方程式的根為何呢？

(1) $x^2-40x+204=0$ (2) $3x^2-6x+1=0$ (3) $x^2+6x=4891$

Sol)

$$(1) \text{原式} \Rightarrow x^2-40x=-204 \Rightarrow x^2-40x+20^2=-204+20^2$$

$$\Rightarrow (x-20)^2=196 \Rightarrow x-20=\pm 14 \Rightarrow x=34 \text{或} 6$$

$$(2) \text{原式} \Rightarrow x^2-2x=\frac{-1}{3} \Rightarrow x^2-2x+1^2=\frac{-1}{3}+1^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=\frac{2}{3} \Rightarrow x-1=\pm \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$$

$$(3) \text{原式} \Rightarrow x^2+6x+3^2=4891+3^2$$

$$\Rightarrow (x+3)^2=4900 \Rightarrow x+3=\pm 70$$

$$\Rightarrow x=-3\pm 70 \Rightarrow x=67 \text{或} -73$$

練習二：

(1) 請用配方法將 $2x^2-6x-1=0$ 配方成 $(x+p)^2=q$ 的型式，求 $p+2q$ 的值為何呢？(2) 設 $x^2+bx+3=0$ 可推得 $(x-3)^2=k$ ，試求 $b+k$ 的值為何呢？

Sol)

$$(1) 2x^2-6x-1=0, x^2-3x=\frac{1}{2}, x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{1}{2}+\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{4} \Rightarrow p=\frac{-3}{2}, q=\frac{11}{4} \Rightarrow p+2q=4$$

$$(2) (x-3)^2=k \Rightarrow x^2-6x+9=k \Rightarrow x^2-6x+(9-k)=0$$

$$\Rightarrow b=-6, 9-k=3, k=6 \Rightarrow b+k=0$$

【公式解法－解一元二次方程式】

講解三：

(1) $2(x-1)(x-3)=5x$

(2) $3x^2-3x+1=0$

(3) 設方程式 $x^2+(k+2)x+2k+1=0$ 的兩根相等，求 $k=?$

Sol)

$$(1) 2(x-1)(x-3)=5x \Rightarrow 2x^2-13x+6=0$$

$$D=(-13)^2-4(2)(6)=121>0 \Rightarrow (\text{方程式有兩實數解!})$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{121}}{2(2)} = \frac{12 \pm 11}{4} \Rightarrow x=6 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

$$(2) 3x^2-3x+1=0$$

$$D=(-3)^2-4(3)(1)=9-12=-3<0$$

\Rightarrow 故方程式無實數解!

$$(3) \text{ 設方程式 } x^2+(k+2)x+2k+1=0, \text{ 的兩根相等, 求 } k=?$$

$$Q \text{ 兩根相等} \Rightarrow D=0$$

$$(k+2)^2-4(1)(2k+1)=0 \Rightarrow k^2+4k+4-8k-4=0 \Rightarrow k^2-4k=0$$

$$k(k-4)=0 \Rightarrow k=0 \text{ 或 } 4$$

練習三：

$$(1) x^2-3x=3$$

$$(2) 2x^2+9x+15=0$$

$$(3) \text{ 設方程式 } ax^2+ax+2=0 \text{ 的兩根相等, 試求 } a=?$$

Sol)

$$(1) x^2-3x=3 \Rightarrow x^2-3x-3=0$$

$$D=(-3)^2-4(1)(-3)=21>0 \Rightarrow \text{有兩實數解!}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{21}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$(2) 2x^2+9x+15=0$$

$$D=(9)^2-4(2)(15)=81-120=-39<0 \Rightarrow \text{方程式無實數解!}$$

$$(3) \text{ 設方程式 } ax^2+ax+2=0 \text{ 的兩根相等, 試求 } a=?$$

$$Q \text{ 兩根相等} \Rightarrow D=0$$

$$D=a^2-4a(2)=0 \Rightarrow a^2-8a=0 \Rightarrow a(a-8)=0$$

$$a=0 \text{ 或 } 8 \text{ (但 } 0 \text{ 不合)}$$

【根與係數的關係】

講解四：

設 α, β 為 $x^2+4x-9=0$ 的兩根，試求下列各式的值為何呢？

$$(1) \alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \quad (2) (\alpha-3)(\beta-3) \quad (3) \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$$

Sol)

$$\text{原式} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-9}{1} = -9, \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$(1) \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-9)(-4) = 36$$

$$(2) (\alpha - 3)(\beta - 3) = \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9 = (-9) - 3(-4) + 9 = 12$$

$$(3) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(-4)^2 - 2(-9)}{-9} = \frac{16 + 18}{-9} = -\frac{34}{9}$$

練習四：

設 α, β 為 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 的兩根，試求下列各式的值為何呢？

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad (2) (\alpha - \beta)^2 \quad (3) (\alpha - 1)(\beta - 1)$$

Sol)

$$x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = (-5), \quad \alpha\beta = 3$$

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-5}{3}$$

$$(2) (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta \\ = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-5)^2 - 4(3) = 13$$

$$(3) (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 3 - (-5) + 1 = 9$$

【十分鐘即時練習】

(C) 1. 請問 (-3) 是下列那一個方程式的根？

$$(A) x^2 - 3x = 0 \quad (B) 3x^2 = 0 \quad (C) x^2 + 3x = 0 \quad (D) x^2 + 3 = 0$$

Sol) (A) $x^2 - 3x = 0$, $x(x - 3) = 0 \quad \therefore x = 0$ 或 3

$$(B) 3x^2 = 0 \quad \therefore x = 0, 0$$

$$(C) x^2 + 3x = 0, x(x + 3) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 或 } -3 \quad -3 \text{ 為 } x^2 + 3x = 0 \text{ 的解}$$

$$(D) x^2 + 3 = 0 \text{ 無法求得 } x \text{ 值}$$

(A) 2. 若 $x^2 + 8x = 0$, 則 $x = ?$ (A) -8, 0 (B) 8, 0 (C) 4, 0 (D) -4, 0

Sol) $x^2 + 8x = 0$, $x(x + 8) = 0 \quad \therefore x = 0$ 或 -8

(A) 3. 若有一數 a 介於 $(5x - 2)(x + 2) = 0$ 的兩根之間, 則 a 不可能是下列那一個數？

$$(A) 1 \quad (B) -1 \quad (C) -\frac{3}{2} \quad (D) 0$$

Sol) $\therefore (5x - 2)(x + 2) = 0 \quad \therefore 5x - 2 = 0$ 或 $x + 2 = 0$, 得 $x = \frac{2}{5}$ 或 -2, 兩根為 $\frac{2}{5}$ 、-2

$\therefore a$ 介於 -2 與 $\frac{2}{5}$ 之間, 不可能為 1

(A) 4. 設 a 為實數，若方程式 $4x^2 - 12x + (a - 3) = 0$ 的兩根相等，則方程式 $ax^2 - 13x + 3 = 0$ 的兩根為何？

- (A) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}, 1$ (C) $\frac{1}{4}, \frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{3}, 1$

Sol) $\because 4x^2 - 12x + (a - 3) = 0$ 的兩根相等 $\therefore (-12)^2 - 4 \cdot 4(a - 3) = 0, 144 - 16a + 48 = 0, a = 12,$
 $12x^2 - 13x + 3 = 0, (4x - 3)(3x - 1) = 0, \therefore x = \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$

(D) 5. 下列那一個方程式的解為相異實根？

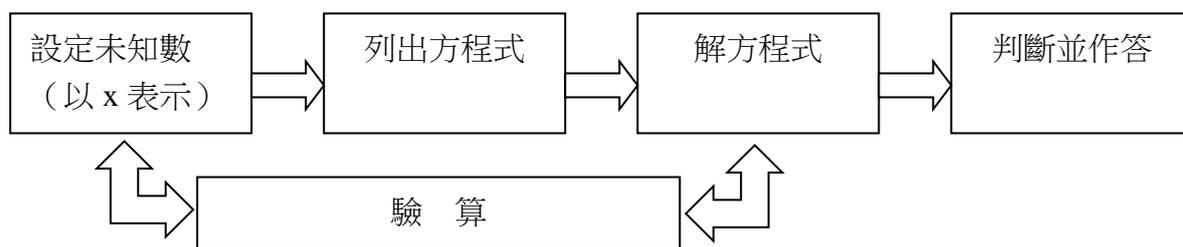
- (A) $x^2 + 4 = 0$ (B) $x^2 + 6x + 9 = 0$ (C) $x^2 - x + 1 = 0$ (D) $x^2 + 22x + 1 = 0$

Sol) 相異實根方程式之判別式 $D > 0$

- (A) $0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0$
 (B) $36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$
 (C) $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$
 (D) $(22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 - 4 = 4 > 0$

能力二：一元二次方程式的應用

一元二次方程式應用問題的解題步驟：



【二元一次方程式的應用問題】

講解一：

二年 18 班的公佈欄長為 400 公分，寬為 300 公分，今天學藝股長要在其四周黏上一條等寬的紙條當做框，如此會增加佈告欄面積的 12%，請問此紙條的寬為多少公分呢？

Sol)

設紙條的寬為 x 公分

$$\Rightarrow (2x + 400)(2x + 300) - 400 \times 300 = 400 \times 300 \times 12\%$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 600x + 800x + 120000 - 120000 = 14400$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 1400x - 1400 = 0, x^2 + 350x - 3600 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x + 360) = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ 或 } (-360) \leftarrow (\text{不合})$$

\Rightarrow 紙條寬為 10 公分

練習一：

有三個連續正偶數，第一、第二兩數的積加上第二、第三兩數的積等於 392，試問此三數為何呢？

Sol)

假設此三數為 $x, x+2, x+4$

$$x(x+2)+(x+2)(x+4)=392 \Rightarrow x^2+2x+x^2+6x+8=392$$

$$\Rightarrow 2x^2+8x+8=392 \Rightarrow x^2+4x+4=196 \Rightarrow x^2+4x-192=0 \Rightarrow (x-12)(x+16)=0$$

$$\Rightarrow x=12 \text{ 或 } (-16) \rightarrow \text{不合!} \Rightarrow \text{此三數 } 12, 14, 16$$

【十分鐘即時練習】

(C) 1. 有一正方形，若將其一邊長減少3公分，另一邊長變為原邊長的2倍，則所得新長方形的面積比原正方形的面積多7平方公分，則原正方形的邊長為多少公分？(A)5公分 (B)6公分 (C)7公分 (D)9公分

Sol) 設原正方形的邊長為 x 公分，則 $(x-3) \cdot 2x = x^2+7$ ， $2x^2-6x = x^2+7$ ， $x^2-6x-7=0$ ， $(x-7)(x+1)=0$ ， $\therefore x=7$ 或 -1 (-1 不合)，

(D) 2. 設一直角三角形有一股長為24公分，斜邊長比另一股長的3倍多4公分，則此三角形的面積為多少平方公分？(A)360平方公分 (B)260平方公分 (C)165平方公分 (D)84平方公分

Sol) 設另一股長為 x 公分，則斜邊長為 $(3x+4)$ 公分 " $(3x+4)^2 = x^2+24^2$ ，

$$9x^2+24x+16 = x^2+576 \Rightarrow 8x^2+24x-560=0, x^2+3x-70=0, (x-7)(x+10)=0$$

$$\therefore x=7 \text{ 或 } -10 (-10 \text{ 不合}) \text{ 面積為 } \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84 (\text{平方公分})$$

(A) 3. 史老師出生於民國63年，經過 $3x$ 年，正好是民國 $(x-3)^2$ 年，則 $x = ?$

(A)15 (B)14 (C)13 (D)12

Sol) 依題意得 $63+3x = (x-3)^2$ ， $x^2-3x-54=0$ ， $(x-9)(x+6)=0$ $\therefore x=9$ 或 -6 (-6 不合)

(B) 4. 一三角形，其底和對應高的比是4:5，若面積為90平方公分，則此三角形的底和高相差多少公分？(A)4公分 (B)3公分 (C)2公分 (D)1公分

Sol) 設底長為 $4x$ 公分，高為 $5x$ 公分，則 $\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 5x = 90$ ， $10x^2 = 90$ ， $x^2 = 9$

$$\therefore x = \pm 3 (-3 \text{ 不合})，\text{底長 } 12 \text{ 公分，高為 } 15 \text{ 公分} \therefore \text{底和高相差 } 3 \text{ 公分}$$

(B) 5. 已知一線段 AB 的長為10公分，今在 AB 上取一點 P 且 $AP < BP$ ，分別以 AP 、 BP 為直徑各作一圓，如果這兩圓的面積和為13(平方公分)，則 AP 等於多少公分？(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

Sol) 設 $AP = x$ ，則 $BP = 10 - x$ ，且 $AP < BP$ ，

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{10-x}{2}\right)^2\pi = 13\pi, \frac{x^2}{4} + \frac{100-20x+x^2}{4} = 13,$$

$$2x^2 - 20x + 100 = 52, x^2 - 10x + 24 = 0, (x-6)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4 \text{ (6 不合)}$$

【基本觀念題】

(B) 1. 若 x 的二次方程式 $x^2 + x - a = 0$ 的一根的倒數為 2，則 a 的值為何？

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$ 。

Sol) $x = \frac{1}{2}$ 代入： $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - a = 0, \therefore a = \frac{3}{4}$

(D) 2. 若方程式 $(x-2)(3x+1) = 0$ ，則 $3x+1$ 之值為何？ (A) 7 (B) 2 (C) 0 (D) 7 或 0。

Sol) $(x-2)(3x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 $-\frac{1}{3}, \therefore 3x+1 = \begin{cases} 3 \times 2 + 1 = 7 \\ 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0 \end{cases}$

(A) 3. 設 $ab \neq 0$ ，若 a, b 為一元二次方程式 $x^2 + 3ax + 2b = 0$ 的兩根，則 $a+b = ?$

(A) -6 (B) 6 (C) -3 (D) 3。

Sol) 利用根與係數 $a+b = -3a, ab = 2b \quad \therefore a = 2, \therefore a+b = -3 \times 2 = -6$

(C) 4. 設 a 為方程式 $9x^2 - x + 7 = 0$ 的解， b 為方程式 $3x^2 + 2x - 2 = 0$ 的解，則 $(9a^2 - a)(3b^2 + 2b)$ 的值為下列哪一選項？ (A) -7 (B) 2 (C) -14 (D) 14。

Sol) $x = a$ 代入： $9a^2 - a + 7 = 0, \therefore 9a^2 - a = -7$

$x = b$ 代入： $3b^2 + 2b - 2 = 0, \therefore 3b^2 + 2b = 2$

$\therefore (9a^2 - a)(3b^2 + 2b) = -7 \times 2 = -14$

(B) 5. 方程式 $3(x+1)^2 + 5(x+1)(x-4) + 2(x-4)^2 = 0$ 的二根之積為何？

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 3 (D) -4。

sol) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}, (x+1+x-4)(3x+3+2x-8) = 0$

$(2x-3)(5x-5) = 0, x = \frac{3}{2}$ 或 $1 \Rightarrow \text{積} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

(A) 6. 三個連續正整數 3、4、5 滿足 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ；五個連續正整數 10、11、12、13、14 滿足 $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ 。現在有七個連續正整數，其中前 4 數的平方和等於後 3 數的平方和，則此七數中最大數為何？

(A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 30。

Sol) 設七數為 $x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3$

則 $(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2$

$= (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$

$\Rightarrow x^2 - 24x = 0$

$x(x-24) = 0, x = 24$ 或 0 (不合), \therefore 最大 $24+3 = 27$

(B) 7. 耀則、正揚兩人利用公式同解一個一元二次方程式，耀則算錯判別式其

餘均沒錯，得兩根為 3，-4，正揚看錯 x 項係數，其餘均沒錯，得兩根為 2，-1，則原方程式兩根和為多少？ (A)-2(B)-1(C)0(D)1。

Sol) 耀則：看錯判別式即算錯常數

$$(x-3)(x+4)=0, x^2+x-12=0$$

$$\text{正揚}:(x+1)(x-2)=0, x^2-x-2=0$$

$$\therefore \text{正確方程式}: x^2+x-2=0 \quad \therefore \text{兩根和為}-1$$

(C) 8.若方程式 $x^2-30x+k=0$ 之兩根都是質數，則下列何者可為 k 的值？

(A)29(B)81(C)209(D)319。

$$\text{Sol)} 30=7+23=11+19=13+17, \therefore k=7 \times 23=161, 11 \times 19=209, 13 \times 17=221$$

(B) 9.若 a 與 b 為兩個不同的正整數，且 $a^2-b^2=48$ ，則 a+b 的最小值為多少？

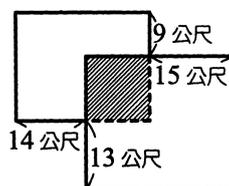
(A)6(B)8(C)10(D)12。

$$\text{Sol)} a^2-b^2=48 \Rightarrow (a+b)(a-b)=48$$

$\therefore a+b$ 與 $a-b$ 均為偶數

$$\begin{cases} a+b=24 \\ a-b=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a+b=12 \\ a-b=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a+b=8 \\ a-b=6 \end{cases}, \text{ 故 } a+b \text{ 最小值 } 8$$

(C) 10.王老先生有兩塊農地分別由兩個長方形重疊而成，且重疊部分(如圖中陰影)為正方形，已知農地總面積為1003平方公尺，若陰影部分闢成水池，則此水池的邊長為多少公尺？(A)13公尺 (B)12公尺 (C)11公尺 (D)10公尺



Sol)設正方形邊長 x 公尺

$$(14+x)(9+x)+(13+x)(15+x)-x^2=1003, 126+23x+x^2+195+28x+x^2-x^2=1003, x^2+51x-682=0, (x-11)(x+62)=0, \therefore x=11(-62 \text{ 不合})$$

【溫故歷屆基測試題】

(A) 1.下列哪一個選項為方程式 $4x^2-16x+15=0$ 的兩根？ (A) $\frac{3}{2}$ 、

$$\frac{5}{2} \text{ (B) } \frac{3}{2}、-\frac{5}{2} \text{ (C) } -\frac{3}{2}、\frac{5}{2} \text{ (D) } -\frac{3}{2}、-\frac{5}{2} \text{。【95.基測一】}$$

Sol) $4x^2-16x+15=0$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \\ \times \quad \Rightarrow (2x-3)(2x-5)=0, x=\frac{3}{2} \text{ or } \frac{5}{2} \\ 2 \quad -5 \\ \hline -10-6=-16 \end{array}$$

$$-10-6=-16$$

- (D) 2.若 a 、 b 為方程式 $(x-29)^2=247$ 的兩根，則下列敘述何者正確？ (A) a 為 247 的平方根 (B) $a+b$ 為 247 的平方根 (C) $a+29$ 為 247 的平方根 (D) $29-b$ 為 247 的平方根。【95.基測一】

Sol) 若 $m^2 = n$ ，則 $\pm m$ 為 n 的平方根，
 b 為 $(x-29)^2 = 247$ 的一根， $(b-29)^2 = 247$ ，
 $\pm(b-29)$ 是 247 的平方根

- (C) 3.已知方程式 $(\frac{x}{3}-1)(x+2) = 0$ 的兩根為 a 、 b ，其中 $a > b$ ，則下列哪一個選項是正確的？ (A) $3a = -6$ (B) $2b = 6$ (C) $a+b = 1$ (D) $a-b = -1$ 。【95.基測二】

Sol) $\frac{x}{3}-1=0, x=3, x+2=0, x=-2,$

Q $a > b, a=3, b=-2$

- (B) 4.已知方程式 $x^2-5625=0$ 的兩根為 ± 75 ，則下列何者可為方程式 $x^2+6x-5616=0$ 的解？ (A) $x=69$ (B) $x=72$ (C) $x=77$ (D) $x=81$ 。【95.基測二】

$$x^2+6x-5616=0, (x+3)^2-5616-9=0,$$

Sol) $(x+3)^2-5625=0, (x+3)^2=5625, x+3=\pm 75, x=\begin{cases} 72 \\ -78 \end{cases}$

- (C) 5.若 a 、 b 為方程式 $x(3x+7)=0$ 的兩根，且 $a > b$ ，則 $b-a = ?$ (A) $\frac{7}{3}$
 (B) $\frac{3}{7}$ (C) $-\frac{7}{3}$ (D) $-\frac{3}{7}$ 。【94.基測一】

Sol) 由 $x(3x+7)=0$ 得 $x=0$ 或 $-\frac{7}{3}$ ，又兩根為 a, b 且 $a > b$ ， $\therefore a=0, b=-\frac{7}{3}$

- (B) 6.已知 $x^2-6x+b=0$ 可配方成 $(x-a)^2=7$ 的型式。請問 $x^2-6x+b=2$ 可配方成下列何種型式？ (A) $(x-a)^2=5$ (B) $(x-a)^2=9$ (C) $(x-a+2)^2=9$ (D) $(x-a+2)^2=5$ 。【94.基測二】

Sol) $x^2-6x+b=0, x^2-6x=-b, x^2-6x+3^2=3^2-b, (x-3)^2=9-b$ 與 $(x-a)^2=7$ 比較，
 $a=2, b=2$ 代入， $x^2-6x+b=2, x^2-6x=0, x^2-6x+3^2=0+3^2, (x-3)^2=9$

N	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
---	------------	--------------

- (D) 7. 已知 a 、 b 為方程式 $(\frac{2}{5}x+1)^2=680$ 的兩根，且 $a > b$ ，利用如表，求 $\frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b$ 之值最接近下列哪一數？
- | | | |
|----|-------|--------|
| 2 | 1.414 | 4.472 |
| 5 | 2.236 | 7.071 |
| 34 | 5.831 | 18.439 |
| 68 | 8.246 | 26.077 |
- (A) 0 (B) 2 (C) 37 (D) 52。【94.基測二】

Sol) 由 $(\frac{2}{5}x+1)^2=680$, $\frac{2}{5}x+1=\pm\sqrt{680}=\pm 26.077$

$\Rightarrow \frac{2}{5}x = \pm 26.077 - 1$, 又 a, b 為兩根, 且 $a > b$,

$\therefore \frac{2}{5}a = 26.077 - 1 = 25.077, \frac{2}{5}b = -26.077 - 1 = -27.077$

- (B) 8. 利用配方法將 $4x^2+8x+a$ 化成 $b(x+c)^2+3$ 的形式，則 $a+b+c=?$ (A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 25。【93.基測二】

Sol) 原式 $=4(x^2+2x)+a=4(x+1)^2-4+a=b(x+c)^2+3$

$\Rightarrow a=3+4=7, b=4, c=1 \Rightarrow a+b+c=12$

- (D) 9. 若一元二次方程式 $x^2-2x-323=0$ 的兩根為 a 、 b ，且 $a > b$ ，則 $2a+b=?$ (A) -53 (B) 15 (C) 55 (D) 21。【92.基測二】

Sol) $x^2-2x=323, x^2-2x=323+1, (x-1)^2=324,$

$(x-1)=\pm 18, x=1\pm 18, x=19$ 或 $-17 \Rightarrow 2a+b=2\times 19-17=21$

- (B) 10. 樂樂以配方法解 $2x^2-bx+a=0$ ，可得 $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ ，求 $a=?$ (A) -6 (B) -3 (C) 6 (D) 3。【91.基測二】

Sol) $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4} \Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}=0$

$\Rightarrow x^2-3x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow 2x^2-6x-3=0 \Rightarrow a=-3$

- (C) 11. 對於方程式 $(2x+5)(x+1)=(3x-2)(x+1)$ 根的敘述，下列何者正確？ (A) 方程式只有一根，而且這個根是正數 (B) 方程式有兩根，而且兩根的正、負號相同 (C) 方程式一根為正數，一根為負數 (D) 方程

式無解。【91.基測一】

$$\begin{aligned} \text{Sol)} \quad & 2x^2+7x+5=3x^3+x-2 \Rightarrow -x^2+6x+7=0 \\ & \Rightarrow (x+1)(x-7)=0, x=-1, 7 \end{aligned}$$

(D) 12. 小風想用一個遊戲的方法問出兩位朋友的年齡。他說：「將你的年齡，先減 5，再平方，最後加上 25。所出現的數字將會是你今天的幸運數字喔！」

阿珠說：「我是 89 吔！」

阿花說：「我的是 146！」

若阿珠的年齡是 a ，阿花的年齡是 b ，則 $a+b$ 的值會落

在下列哪一個範圍內？ (A) $18 \leq a+b < 21$ (B) $21 \leq a+b < 24$ (C)

$24 \leq a+b < 27$ (D) $27 \leq a+b < 30$ 。【91.基測二】

Sol) 阿珠:

$$(a-5)^2 + 25 = 89, (a-5)^2 = 64, a-5 = \pm 8, \therefore a=13, (-3) \text{ (負不合)}$$

阿花:

$$(b-5)^2 + 25 = 146, (b-5)^2 = 121, b-5 = \pm 11, \therefore b=16, (-6) \text{ (負不合)}$$

$$a+b=13+16=29$$

【模擬學力基測試題】

(D) 1. 方程式 $2(x+1)^4 - 11(x+1)^2 + 15 = 0$ 的所有根中，最大者為何呢？ (A) $1-\sqrt{3}$

(B) $1+\sqrt{3}$ (C) $-1-\sqrt{3}$ (D) $-1+\sqrt{3}$ 。

$$\text{Sol)} \quad 2(x+1)^4 - 11(x+1)^2 + 15 = 0 \Rightarrow [2(x+1)^2 - 5][1^2 - 3] = 0,$$

$$(x+1)^2 = \frac{5}{2} \text{ 或 } (x+1)^2 = 3 \Rightarrow x+1 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 或 } x+1 = \pm \sqrt{3},$$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 或 } x = -1 \pm \sqrt{3} \text{ 其中最大根 } \Rightarrow -1 + \sqrt{3}$$

(B) 2. 請利用配分法解 x 的方程式： $ax^2 + 2bx - a = 0$ ($a \neq 0$)，其根為何呢？ (A)

$$\frac{b \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (\text{B}) \quad \frac{-b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (\text{C}) \quad \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 2ac}}{-2a} \quad (\text{D}) \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

Sol)

$$ax^2+2bx-a=0 \Rightarrow x^2+\frac{2b}{a}x=1 \Rightarrow x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2} \Rightarrow x+\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

(B) 3. 七個連續正整數由小至大分別為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g ，且

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2，請問 a 值為何呢？(A) 19 (B) 21 (C) 23$$

(D) 25。

Sol)

設七個連續正整數為

$$(x-3), (x-2), (x-1), x, (x+1), (x+2), (x+3)$$

$$(x-3)^2+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2,$$

$$x^2-24x=0, x=0 \text{ 或 } 24 (x \neq 0) \Rightarrow a=x-3=24-3=21$$

(C) 4. 已知 a 、 b 為常數， x 的二次方程式 $x^2-a(3x-2a+b)-b^2=0$ ，的兩根之和為

何呢？(A) a (B) $2a$ (C) $3a$ (D) $4a$ 。

Sol)

$$x^2-3ax+2a^2-ab-b^2=0, x^2-3ax+(a-b)(2a+b)=0,$$

$$(x-a+b)(x-2a-b)=0, x=a-b \text{ 或 } 2a+b \Rightarrow \text{兩根之和}=3a$$

(A) 5. 假設方程式 $2x^2+5x+1=0$ ，的兩根為 a 、 b ，請問 $|a|+|b|$ 之值為何呢？(A)

$$\frac{5}{2} \quad (B) \quad \frac{-5}{2} \quad (C) \quad \frac{2}{5} \quad (D) \quad \frac{-2}{5}。$$

Sol)

$$2x^2+5x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4} \Rightarrow |a|+|b|=\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)+\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)=\frac{5}{2}$$

(D) 6. 下列哪一個一元二次方程式無解呢？(A) $2x^2+3x-4=0$ (B) $x^2-x-1=0$ (C)

$$x^2+3x+1=0 \quad (D) \quad 3x^2-4x+3=0。$$

Sol) $3x^2-4x+3=0 \Rightarrow D=(-4)^2-4(3)(3)=16-36=-20<0 \Rightarrow$ 無解

(C) 7. 方程式 $3(x^2+1)=2x^2-6x+12$ 之兩根為 a 、 b ，則 a^2+b^2 的值為何呢？(A)

$$35 \quad (B) \quad 45 \quad (C) \quad 54 \quad (D) \quad 63。$$

Sol)

$$3(x^2+1)=2x^2-6x+12 \Rightarrow x^2+6x-9=0 \Rightarrow x=-3 \pm 3\sqrt{2},$$

$$a^2+b^2=(-3+3\sqrt{2})^2+(-3-3\sqrt{2})^2=9-18\sqrt{2}+18+9+18\sqrt{2}+18=54$$

- (B) 8. 下列哪一點在直線 $y=-\sqrt{2}x+2$ 的圖形上呢? (A) $(\sqrt{3}, 0)$ (B) $(\sqrt{2}, 0)$ (C) $(0, \sqrt{2})$ (D) $(0, \sqrt{3})$ 。

Sol) 將 $x=\sqrt{2}$, $y=0$ 代入 $\Rightarrow 0=-\sqrt{2} \times \sqrt{2}+2=-2+2=0$

- (D) 9. 一元二次多項式 $2x^2-5x+2$ 需要再加上下列哪一個數之後才會形成完全平方方式呢? (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$ 。

Sol) 設再加上 k 能成為完全平方式

$$2x^2-5x+(2+k) \Rightarrow D=(-5)^2-4(2)(2+k)=0$$

$$25-16-8k=0 \Rightarrow 9-8k=0, k=\frac{9}{8}$$

- (B) 10. 若 $1-\sqrt{2}$ 為 $x^2-(a+1)x-a=0$ 的一根, 則 $a=?$ (A) -1 (B) 1 (C) $-1-\sqrt{2}$ (D) $-1+\sqrt{2}$ 。

Sol) 一根 $1-\sqrt{2}$, 則另一根 $1+\sqrt{2}$, 由根與係數: $(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$
 $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$, \therefore 方程式為 $x^2-2x-1=0$ 與 $x^2-(a+1)x-a=0$ 比較, $a+1=2$, $a=1$

【進階練習題】

- (B) 1. 若 $xy+x=5$ 且 $y^2+2y=19$, 請問 $x:(y+1)=?$ (A) $4:1$ (B) $1:4$ (C) $3:4$
 (D) $4:3$ 。

Sol) $x(y+1)=5 \Rightarrow x=\frac{5}{y+1}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+1} = \frac{\frac{5}{y+1}}{y+1} = \frac{5}{(y+1)^2} = \frac{5}{y^2+2y+1} = \frac{5}{19+1} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1:4$$

- (C) 2. 若 $y=kx^2-2x+1$ 的圖形與 x 軸不相交, 請問 k 值的範圍? (A) $k>-1$ (B) $k>0$ (C) $k>1$ (D) $k>2$ 。

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸不相交 $\Rightarrow y=0$

Sol) $D=b^2-4ac<0 \Rightarrow (-2)^2-4(k)(1)<0 \Rightarrow k>1$

- (D) 3. 若方程式 $x^2+mx+n=0$, 其中 m 及 n 為正數, 若方程式的兩根差為 1 , 請問 m 值為何呢? (A) $n+1$ (B) $n-1$ (C) $\sqrt{4n-1}$ (D) $\sqrt{4n+1}$ 。

$$\text{Sol) } \begin{cases} \alpha + (\alpha + 1) = -m \\ \alpha \times (\alpha + 1) = n \end{cases} \Rightarrow m^2 = \alpha^2 + 2\alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2 = 2\alpha(\alpha + 1) + 2\alpha(\alpha + 1) = 1$$

$$\Rightarrow m^2 = 2n + 2n + 1 = 4n + 1 \Rightarrow m = \pm \sqrt{4n + 1} \text{ (負不合)}$$

(A) 4. 設 a 、 b 、 c 皆為實數，若 1 為 $x^2 + ax + 2 = 0$ 的一根，且 a 、 b 為 $x^2 + 5x + c = 0$ 的兩根，請問 $3a + 2b + c$ 的值為何呢？ (A) -7 (B) -5 (C) 5 (D) 7。

$$\text{Sol) } \begin{cases} 1^2 + a + 2 = 0 \\ a \times b = c \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = -2, c = 6 \Rightarrow 3a + 2b + c = -7$$

(D) 5. 設方程式 $3x^2 - 6x - 1 = 0$ 的正根為 a ，方程式 $(3x - 5)(x + 2) = 42$ 的負根為 b ，則下列何者正確？ (A) $b = -4$ (B) $a = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$ (C) $a + b =$

$$\frac{-16 + 2\sqrt{3}}{3} \text{ (D) } a - b = \frac{16 + 2\sqrt{3}}{3} \text{。}$$

$$\text{Sol) } 3x^2 - 6x - 1 = 0, x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3} \therefore a = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 + x - 52 = 0 \Rightarrow (x - 4)(3x + 13) = 0, x = 4, -\frac{13}{3} \therefore b = -\frac{13}{3}$$

$$a + b = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} - \frac{13}{3} = \frac{-10 + 2\sqrt{3}}{3}, a - b = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} = \frac{16 + 2\sqrt{3}}{3}$$

(A) 6. 解方程式 $(x + 1)^2 + |x + 1| - 6 = 0$ ，可得 x 的值之和為何呢？ (A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4。

$$\text{Sol) } |x + 1|^2 + |x + 1| - 6 = 0, (|x + 1| - 2)(|x + 1| + 3) = 0$$

$$|x + 1| = 2 \text{ 或 } -3 \text{ (不合)}, \therefore x + 1 = \pm 2, \text{ 故 } x = 1 \text{ 或 } -3, x \text{ 的和為 } -2 \text{。}$$

(D) 7. 利用配方法，將 x 的一元二次方程式 $-2x^2 - 4x + 1 = 0$ 改寫成 $-2(x - h)^2 + k = 0$ 型式，則 $h \times k = ?$ (A) -1 (B) 0 (C) -2 (D) -3。

$$\text{Sol) } -2x^2 - 4x + 1 = 0, -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = 0, \Rightarrow -2(x + 1)^2 + 3 = 0$$

$$\therefore h \times k = -1 \times 3 = -3$$

(D) 8. 設 α 、 β 是二次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的兩根，則以 $\frac{2}{\alpha}$ 、 $\frac{2}{\beta}$ 為兩根的二次方程式為何呢？ (A) $-3x^3 + 8x = 4$ (B) $-3x^3 - 8x - 4 = 0$ (C) $3x^3 - 8x = -4$ (D) $3x^3 - 8x - 4 = 0$ 。

$$\text{Sol) 由根與係數：} \alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -3, \therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \times (-4)}{-3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}, \therefore \text{方程式為 } x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0, \text{ 即 } 3x^2 - 8x - 4 = 0$$

(B) 9. 設 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 之三邊長， $(a + b)x^2 + 2cx + (a - b) = 0$ 有等根，則 $\triangle ABC$ 是何種三角形呢？ (A) 正三角形 (B) 直角三角形 (C) 等

腰三角形 (D) 鈍角三角形。

Sol) $D = (2c)^2 - 4(a+b)(a-b) = 0$, $4c^2 - 4a^2 + 4b^2 = 0$, 即 $a^2 = b^2 + c^2$. \therefore 為直角 Δ

(C) 10. 柯南向中花商銀借款 6400 元, 言明以年利率 $x\%$ 計息, 如果兩年後他連本帶利還給中花商銀 7056 元的話, 請問每年利率是多少%? (A) 7% (B) 6% (C) 5% (D) 4%。

$$\text{Sol) } 6400 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 7056 \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{7056}{6400} = \frac{441}{400}$$

$$\therefore 1 + \frac{x}{100} = \pm \frac{21}{20}, \therefore \frac{x}{100} = \frac{1}{20} \text{ 或 } -\frac{41}{20} \text{ (不合)} \therefore x = 5\%。$$