

## Unit 11 乘法公式與因式分解

能力指標：◎ (A-4-01) 能熟練二次式的乘法公式，如  $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、

$$(a+b)(a-b)、(a+b)(c+d)。$$

◎ (A-4-04) 能理解因式、倍式、公因式與因式分解的意義。

◎ (A-4-04) 能利用提出公因式與分組分解法分解二次多項式。

◎ (A-4-04) 能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。

### 能力一：乘法公式的展開與應用

#### 一、乘法公式：

係指二個（含）以上多項式（A、B）透過乘法結合成另一個多項式（C）的公式，其用途大部分用於因式分解。亦即  $A \times B = C$ ，C 為 A、B 之倍式；A、B 為 C 之因式。

#### 二、乘法公式的種類：

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	十字交乘公式
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	和與差的平方公式
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	平方差公式
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$	三連加的平方公式

#### 三、乘法公式的求值

已知 $(a+b)$ 和 $ab$	(1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (2) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
已知 $(a-b)$ 和 $ab$	(1) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ (2) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
已知 $x + \frac{1}{x}$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

已知 $x - \frac{1}{x}$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$
若 $x$ 為正整數	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x+1) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x+1)$
若 $a+b+c=0$	$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$

## 【乘法公式的運算】

講解一：

(1)  $a=205 \times 195$ ， $b=195^2 - 95^2$ ，則  $a-b=?$

(2) 小於  $(9.94)^2$  的最大整數是多少？

Sol)

(1)  $a = (200+5)(200-5) = 200^2 - 5^2 = 40000 - 25 = 39975$

$b = 195^2 - 95^2 = (195+95)(195-95) = 29000$

$\therefore a-b = 39975 - 29000 = 10975$

(2) 因為  $(9.94)^2 = (10-0.06)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 0.06 + (0.06)^2$   
 $= 100 - 1.2 + 0.0036 = 98.8036$  所以小於  $(9.94)^2$  的最大整數為 98

練習一：

(1) 試求  $\left(99\frac{1}{2}\right)^2 = 99^2 + a$ ，求  $a=?$

(2) 試求  $\frac{197^2 - 103^2}{94 \times 50} = ?$

Sol)

(1)  $\left(99\frac{1}{2}\right)^2 = \left(99 + \frac{1}{2}\right)^2 = 99^2 + 2 \times 99 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

所以  $a = 2 \times 99 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 99 + \frac{1}{4} = 99\frac{1}{4}$

(2) 原式  $= \frac{(197+103) \times (197-103)}{94 \times 50} = \frac{300 \times 94}{94 \times 50} = 6$

## 【乘法公式的應用】

講解二：

(1) 若  $a=12345678 \times 12345678 - 12345679 \times 12345677$ ，請問  $a=?$

(2) 已知  $4^2=16$ ， $34^2=1156$ ， $334^2=111556$ ，請問  $33334^2=?$

(3) 若  $x^2 - x + 1 = 0$ ， $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

Sol)

(1)  $\Rightarrow b=12345678$

$$a=b^2-(b+1)\times(b-1)=b^2-(b^2-1)=1$$

(2)  $34^2=(33+1)^2=(3\times 11+1)^2=9\times 11^2+6\times 11+1^2$

$$=11\times(99+6)+1=11\times 105+1=11\times 100+55+1=1156$$

$$334^2=(333+1)^2=(3\times 111+1)^2=9\times 111^2+6\times 111+1^2$$

$$=111\times(999+6)+1=111\times 1005+1=111\times 1000+555+1$$

$$=111556$$

由此類推  $33334^2=1111155556$ 

(3)  $x^2-x+1=0 \Rightarrow x-1+\frac{1}{x}=0, x+\frac{1}{x}=1$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1^2-2=-1$$

練習二：

(1) 若  $7\times 9\times(8^2+1)\times(8^4+1)\times(8^8+1)=2^n-1$ ，且  $n$  為正整數，則  $n=?$

(2) 若  $a-b=5$ ， $ab=6$ ，則  $2a^2+3ab+2b^2=?$

(3) 若  $x-\frac{1}{x}=4$ ，則  $x^2+\frac{1}{x^2}=?$

Sol)

(1)  $7\times 9\times(8^2+1)\times(8^4+1)\times(8^8+1)$

$$=(8-1)(8+1)(8^2+1)(8^4+1)(8^8+1)$$

$$=8^{16}-1=(2^3)^{16}-1=2^{48}-1 \quad \therefore n=48$$

(2)  $2a^2+3ab+2b^2=2a^2-4ab+2b^2+7ab=2(a-b)^2+7ab$

$$=2\times 5^2+7\times 6=50+42=92$$

(3)  $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=4^2+2=18$

**【十分鐘即時練習】**

(D) 1. A、B 均為一元二次式，則 A+B 之次數為 (A) 4 次 (B) 2 次 (C) 1 次

(D) 不大於 2 次。

Sol) 假設 A、B 為兩多項式，其次數分別是 m、n，則①若  $m=n$ ，則 A±B 的次數不大於 m 次。②若  $m>n$ ，則 A±B 的次數是 m 次。(D) 2. 利用分配律求  $2008\times 2007\times\left(\frac{2007}{2008}-\frac{2008}{2007}\right)=?$  (A) 0 (B) 1 (C) 4015

(D) -4015。

Sol) 原式 =  $2007^2 - 2008^2 = (2007 + 2008)(2007 - 2008) = -4015$

(D) 3. 試用平方差公式，求  $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$  的個位數與十位數字的和為多少？ (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

Sol)  $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) = 2^{16} - 1$ ，但  $2^{16}$  個位數是 6，所以  $2^{16} - 1$  個位數是 5，十位數字是 3  $\Rightarrow 3+5=8$

(C) 4. 試化簡  $1998 \times 2002 - 1997^2 = ?$  (A) 11985 (B) 11986 (C) 11987 (D) 11988。

Sol) 原式 =  $(2000-2)(2000+2) - (2000-3)^2$   
 $= (2000^2 - 2^2) - (2000-3)^2 = 2000^2 - 4 - 2000^2 + 2 \times 2000 \times 3 - 9$   
 $= -4 + 12000 - 9 = 11987$

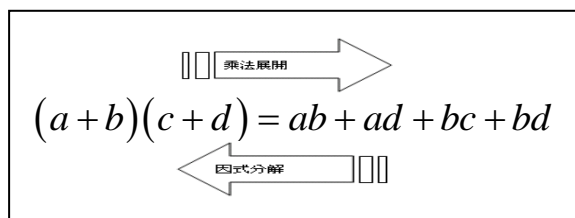
(C) 5. 將右式展開並化簡按降冪排列： $(x^2+2)^2 - (2x-1)^2 = ?$  (A)  $x^4 + x + 3$  (B)  $x^4 + 4x - 3$  (C)  $x^4 + 4x + 3$  (D)  $x^4 - x - 3$ 。

Sol) 原式 =  $(x^4 + 4x^2 + 4) - (4x^2 - 4x + 1) = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 + 4x - 1 = x^4 + 4x + 3$

## 能力二：一元二次式的因式分解

### 一、二次式的因式分解：

係指兩個  $x$  的依次是乘法展開得一個二次式；反之，如果一個二次式可以化成兩個一次式的乘積，此過程稱為因式分解。



### 二、二次式的因式分解形式：

分配律提公因式法	$ab \pm ac = a(b \pm c)$
乘法公式法	(1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
十字交乘法（用於二次三項式）	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ $\begin{array}{r} x \quad a \\ x^2 \langle \quad \times \quad \rangle ab \\ \hline x \quad b \\ ax + bx = (a+b)x \end{array}$

三、因式分解的重要性質：

- (一) 因式分解後，連乘積中的每一個多項式，都是原多項式的因式。
- (二) 一個多項式本身既是自己的因式，也是自己的倍式。
- (三) 一個多項式的因式，不把常數多項式列入其中。
- (四) 一個多項式若不能因式分解，稱為質式。
- (五) 因式分解的結果，其質因式必為一次或高於一次的因式，而非常數因式，且各因式的係數，不要有分數。

### 【因式分解－分配律提公因式法】

講解一：

請運用分配律法則做因式分解：

$$(1) 2a^4 + 4a^3 - 6a^2 \quad (2) 6a^3x^4 - 8a^2x^5y - 14abx^6 \quad (3) \frac{xy}{3} - \frac{x^2y^2}{3} + \frac{x^2y}{4}$$

Sol)

$$(1) \text{原式} = 2a^2(a^2 + 2a - 3)$$

$$(2) \text{原式} = 2ax^4(3a^2 - 4axy - 7bx^2)$$

$$(3) \text{原式} = \frac{4xy}{12} - \frac{4x^2y^2}{12} + \frac{3x^2y}{12} = \frac{1}{12}xy(4 - 4xy + 3x)$$

練習一：

請運用分配律法則做因式分解：

$$(1) a(x+y) + b(x+y) \quad (2) (x-2)(x-1)^3 - (x-2)^3(x-1) \quad (3) (x-2)^3 + (2-x)(x^2 - 4x + 1)$$

Sol)

$$(1) \text{原式} = (a+b)(x+y)$$

$$(2) \text{原式} = (x-2)(x-1) \left[ (x-1)^2 - (x-2)^2 \right]$$

$$(3) \text{原式} = (x-2)^3 - (x-2)(x^2 - 4x + 1) \\ = (x-2) \left[ (x-2)^2 - (x^2 - 4x + 1) \right] = 3(x-2)$$

#### Tip：【變號法則】

因式分解時，如遇到括號內文字相同，但符號相反，習慣上可將後面括號內各項變號。

(1) 若括號為奇數次方，則括號前的符號變號。

$$\text{eg: } +(a-b) = -(b-a), -(a-b)^3 = +(b-a)^3$$

(2) 若括號為偶數次方，則括號前的符號不變號。

$$\text{eg: } -(a-b)^2 = -(b-a)^2, (a-b)^6 = +(b-a)^6$$

### 【因式分解－乘法公式法】

講解二：

請運用乘法公式法做因式分解：

$$(1) (7x-2y)^3 + y^2(2y-7x) \quad (2) (x-1)(2x+3)^3 - (x-1)^3(2x+3) \quad (3) 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

Sol)

$$(1) \text{原式} = (7x-2y)^3 - y^2(7x-2y) = (7x-2y) \left[ (7x-2y)^2 - y^2 \right] = (7x-2y)(7x-y)(7x-3y)$$

$$(2) \text{原式} = (x-1)(2x+3) \left[ (2x+3)^2 - (x-1)^2 \right]$$

$$= (x-1)(2x+3) \left[ (2x+3) + (x-1) \right] \left[ (2x+3) - (x-1) \right]$$

$$= (x-1)(2x+3)(3x+2)(x+4)$$

$$(3) \text{原式} = (3x)^2 - 2(3x)(4x) + (4x)^2 = (3x-4x)^2$$

練習二：

請運用乘法公式法做因式分解：

$$(1) \frac{-1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{9}xy^2 \quad (2) x^8 - y^8 \quad (3) -4x^2 - y^2 + 4xy$$

Sol)

$$(1) \text{原式} = -x \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2 \right)$$

$$(2) \text{原式} = \frac{-x}{x^4} \left[ \left( \frac{1}{2}x \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{2}x \right) \left( \frac{1}{3}y \right) + \left( \frac{1}{3}y \right)^2 \right] = -x \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \right)^2$$

$$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$

$$= (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$

$$(3) \text{原式} = -(4x^2 - 4xy + y^2) = -(2x-y)^2$$

**【因式分解—十字交乘法】**

講解三：

請運用十字交乘法分解下列各式：

$$(1) x^2 + 10x + 24 \quad (2) -x^2 + xy + 6y^2 \quad (3) (x^2 - x)^2 + 8(x - x^2) + 12$$

Sol)

$$(1) \begin{array}{ccc} x^2 & + & 10x & + & 24 \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & & \\ x & \times & +4 & & \\ x & \times & +6 & & \\ \hline & & & & \\ (x+4) & & & & (x+6) \end{array}$$

$$(2) \text{原式} = -(x^2 - xy - 6y^2)$$

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ & \times & -3y \\ & x & \\ \hline & & 2y \\ - & (x-3y) & (x+2y) \end{array}$$

$$(3) \text{原式} = (x^2 - x) - 8(x^2 - x) + 12$$

$$\begin{array}{ccc} (x^2 - x) & \times & -2 \\ (x^2 - x) & \times & -6 \\ \hline \Rightarrow & (x^2 - x - 2) & (x^2 - x - 6) \\ \Rightarrow & (x+1)(x-2) & (x+2)(x-3) \end{array}$$

練習三：

請運用十字交乘法分解下列各式：

(1)  $x^5 - 3x^3 - 4x$     (2)  $x^4 - 5x^2 + 4$     (3)  $5a^4b - 5a^3b^2 - 10a^2b^3$

Sol)

(1) 原式 =  $x(x^4 - 3x^2 - 4)$

$$= x \begin{pmatrix} x^2 & -4 \\ x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4)(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$$

(2)  $\begin{pmatrix} x^2 & -1 \\ x^2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

(3) 原式 =  $5a^2b(a^2 - ab - 2b^2)$

$$\Rightarrow 5a^2b \begin{pmatrix} a & -2b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5a^2b(a - 2b)(a + b)$$

**【十分鐘即時練習】**

(D) 1. 已知  $a > 0$ ，若  $x^2 + ax + 5$  可以因式分解，則  $a$  的值為多少？

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6。

Sol)  $\frac{1}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$   
 $\frac{1}{1} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{5} = 1$   
 $1 + 5 = 6$

(B) 2. 若  $3x^2 + mx - 12$  為  $x - 1$  的倍式，則亦為下列何者的倍式？ (A)  $x + 3$

(B)  $x + 4$  (C)  $2x + 3$  (D)  $2x - 3$ 。

Sol)  $x = 1$  代入： $3 + m - 12 = 0$ ， $m = 9$ ， $3x^2 + 9x - 12 = 3(x^2 + 3x - 4) = 3(x - 1)(x + 4)$

(B) 3. 已知多項式  $12x^2 + ax + b$  可分解成  $(4x - 3)(cx - 5)$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為整

數，則關於  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的敘述，下列何者正確？ (A)  $a + b = c$  (B)  $a + b$

$+ c < 0$  (C)  $a > c$  (D)  $a + b > 0$ 。

Sol)  $4c = 12$ ， $c = 3$ ， $b = (-3) \times (-5) = 15$ ， $\therefore a = (-3c - 20) = (-3 \times 3 -$

$20) = -29$ ， $\therefore -29 + 15 + 3 = -11 < 0$

(B) 4. 試求  $(\sqrt{11} + \sqrt{13})^2 (\sqrt{11} - \sqrt{13})^2$  值為何呢？ (A) 2 (B) 4 (C) 6

(D) 8

Sol) 原式 =  $[(\sqrt{11} + \sqrt{13})(\sqrt{11} - \sqrt{13})]^2 = (11 - 13)^2 = 4$

(A) 5. 試求  $(\sqrt{13} + \sqrt{12})^{200} (\sqrt{13} - \sqrt{12})^{200}$  之值為何呢？ (A) 1 (B) 2 (C)

3 (D) 4。

Sol)  $(\sqrt{13} + \sqrt{12})^{200} (\sqrt{13} - \sqrt{12})^{200} = [(\sqrt{13} + \sqrt{12})(\sqrt{13} - \sqrt{12})]^{200}$

$= (13 - 12)^{200} = 1$

**【基本觀念題】**

(C) 1. 若  $2x^3+3x^2-8x-12=(x+2)(x-2)(2x+3)$ ，請問其所有的因式(不含常數因式)有多少個呢？(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9。

Sol)  $2x^3+3x^2-8x-12$ 的因式有：  
 $(x+2)$ ,  $(x-2)$ ,  $(2x+3)$ ,  $(x+2)(x-2)$ ,  $(x+2)(2x+3)$ ,  $(x-2)(2x+3)$ ,  
 $(x+2)(x-2)(2x+3)$ 共七個

(C) 2. 若  $2x-3$ 是 $4x^2+2x+m$ 的因式，請問  $m$  值為何呢？(A) -6 (B) 6 (C) -12 (D) 12。

Sol) 
$$\begin{array}{r} 2x+4 \\ 2x-3 \overline{) 4x^2+2x+m} \\ \underline{4x^2-6x} \phantom{+m} \\ 8x+m \\ \underline{8x-12} \\ m+12 \end{array}$$

$\Rightarrow Q$   $2x-3$ 是 $4x^2+2x+m$ 的因式

$\therefore 2x-3$ 能整除 $4x^2+2x+m \Rightarrow m+12=0, m=-12$

(A) 3. 下列各多項式，何者非  $x^3+x^2-4x-4$ 的因式呢？(A)  $x-1$  (B)  $x+1$  (C)  $x-2$  (D)  $x+2$ 。

Sol)  $x^3+x^2-4x-4=x^2(x+1)-4(x+1)=(x^2-4)(x+1)$   
 $=(x-2)(x+2)(x+1)$

(A) 4. 下列各多項式，何者為  $xy-8+4x-2y$  的因式呢？(A)  $y-2$  (B)  $x+2$  (C)  $x+4$  (D)  $y-4$ 。

Sol) 原式 $=(xy-2y)+(4x-8)=y(y-2)+4(x-2)=(x-2)(y+4)$

(B) 5. 下列四個式子中，(甲)  $a+b+c$  (乙)  $a-b+c$  (丙)  $a+b-c$  (丁)  $a-b-c$ ，其中哪二個是  $a^2-b^2+2bc-c^2$  的因式呢？(A) 甲和乙 (B) 乙和丙 (C) 丙和丁 (D) 丁和甲

Sol) 原式 $=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)$

(B) 6. 若  $x-y+1=0$ ，試求  $x^2-2xy+y^2-4x+4y+3$  之值為何呢？(A) 0 (B) 8 (C) 16 (D) 24。

Sol) 原式 $=(x^2-2xy+y^2)-(4x-4y)+3$   
 $=(x-y)^2-4(x-y)+3=(-1)^2-4 \times (-1)+3=8$



(D) 7. 試計算  $2 \times 399^2 - 5 \times 399 - 7$  的結果為下列哪一數？

(A) 3233000 (B) 322000 (C) 317400 (D) 316400。

Sol) 原式 =  $(2 \times 399 - 7)(399 + 1) = 791 \times 400 = 316400$

(B) 8. 已知多項式  $12x^2 + ax + b$  可分解成  $(4x - 3)(cx - 5)$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為整數，則關於  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的敘述，下列何者正確？ (A)  $a + b = c$  (B)  $a + b + c < 0$  (C)  $a > c$  (D)  $a + b > 0$ 。

Sol)  $4c = 12$ ， $c = 3$ ， $b = (-3) \times (-5) = 15$ ， $\therefore a = (-3c - 20) = (-3 \times 3 - 20) = -29$ ， $\therefore -29 + 15 + 3 = -11 < 0$

(A) 9. 試求  $(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{200} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{200}$  之值為何呢？ (A) 1 (B) 2 (C) 3

(D) 4。

sol)  $(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{200} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{200} = [(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})]^{200} = (7 - 6)^{200} = 1$

(D) 10. 若設  $a^2 - 5a + 1 = 0$ ，則  $(a - 2)(a - 3) = ?$  (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

sol)  $a^2 - 5a + 1 = 0$ ， $a^2 - 5a = -1$ ， $(a - 2)(a - 3) = a^2 - 5a + 6 = -1 + 6 = 5$

### 【溫故歷屆基測試題】

(C) 1.  $(69\frac{17}{23}) \times (70\frac{6}{23}) = a + b$ ，若  $a$  為正整數且  $0 < b < 1$ ，則  $a = ?$  (A)

3583 (B) 3584 (C) 4899 (D) 4900。【95 基測一】

Sol) 原式 =  $(70 - \frac{6}{23})(70 + \frac{6}{23}) = 70^2 - (\frac{6}{23})^2 = 4900 - \frac{36}{529} = 4899 + \frac{493}{529}$

(B) 2. 計算  $899^2 - 101^2$  之值為何？ (A) 788000 (B) 798000 (C) 888000 (D) 898000。【94 基測一】

Sol) 原式 =  $(899 + 101) \times (899 - 101) = 1000 \times 798 = 798000$

(B) 3. 計算  $\frac{1}{389} + \frac{390 \times 388}{389} - 379$  之值為何？ (A) 1 (B) 10 (C)  $\frac{1}{389}$  (D)

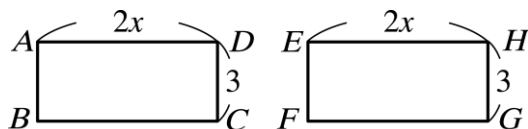
$\frac{12}{389}$ 。【94 基測二】

Sol) 原式 =  $\frac{1 + (389 + 1)(389 - 1)}{389} - 379 = \frac{1 + 389^2 - 1^2}{389} - 379 = 10$

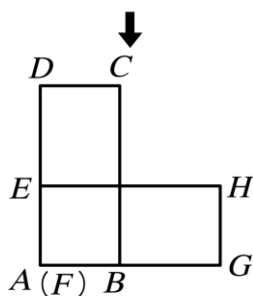
(D) 4. 若  $1999^2 - 2000^2 = 1333 \times a$ ，則  $a = ?$  (A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) -3。【93 基測二】

Sol)  $1999^2 - 2000^2 = (1999 + 2000) \times (1999 - 2000) = -3999$   
 $-3999 = 1333 \times a \Rightarrow a = -3$

- (C) 5. 如圖(a)，四邊形  $ABCD$ 、 $EFGH$  均是長為  $2x$ 、寬為  $3$  的矩形。今將兩個矩形做部分疊合，使得  $E$  點在  $\overline{AD}$  上， $B$  點在  $\overline{FG}$  上，如圖(b)所示。若連接  $\overline{CH}$ ，則五邊形  $AGHCD$  的面積為何？【93基測二】 (A)  $4x^2 - \frac{9}{2}$  (B)  $4x^2 + \frac{9}{2}$  (C)  $2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$  (D)  $2x^2 + 6x + \frac{9}{2}$ 。



圖(a)



圖(b)

Sol)  $AGHCD$ 面積 =  $(2x)^2 - \frac{1}{2}(2x-3)^2 = 4x^2 - \frac{1}{2}(4x^2 - 12x + 9) = 2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$

- (A) 6. 求  $2001 \times 2002 - 1999 \times 2004$  之值為何？ (A) 6 (B) 16 (C) 26 (D) 36。【93基測二】

設  $2000 = a$

Sol) 原式 =  $(a+1)(a+2) - (a-1)(a+4) = (a^2 + 3a + 2) - (a^2 + 3a - 4) = 6$

【模擬學力基測試題】

- (B) 1. 已知圖中四塊長方形的面積分別是  $x$ 、 $y$ 、 $5$ 、 $10$ ，試求出  $\frac{y-x}{y+x}$  為何呢？

$x$	$y$
5	10

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{5}$ 。

Sol) 由下方兩塊面積  $5$  與  $10$  知圖形上側邊兩段面積比是  $1:2 = x:y$ ，所以  $\frac{y-x}{y+x}$

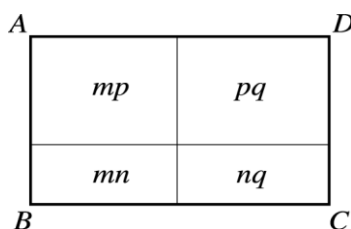
$$= \frac{2x-x}{2x+x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

- (A) 2. 設一正整數  $n$  除以  $6$  餘  $5$ ，則  $n^2$  除以  $4$  餘式為何呢？ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。

Sol)  $n = 6p + 5$ ， $\therefore n^2 = 36p^2 + 60p + 25 = 4(9p^2 + 15p + 6) + 1$ ， $\therefore$  餘  $1$

- (D) 3. 如圖，將長方形  $ABCD$  分成四個小長方形，其面積分別為  $mp$ 、 $mn$ 、 $pq$ 、 $nq$ ，則  $\overline{AD} + \overline{AB} = ?$  (A)  $m-q-p-n$  (B)  $m+q-p+n$  (C)  $m-q+p-n$  (D)  $m$

+q+p+n。



Sol)  $\square ABCD$ 面積 $=mp+pq+mn+nq=\overline{AD} \times \overline{AB}=(m+q) \times (p+n)$   
 $\Rightarrow \overline{AD}+\overline{AB}=m+q+p+n$

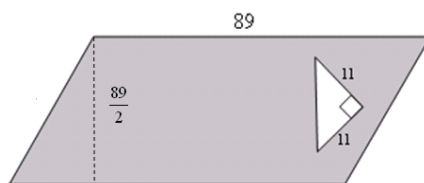
(D) 4.若  $x+2$  與  $x-3$  均為  $x^3+ax^2+bx-6$  的因式，求  $a-b$  之值為何呢？(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。

Sol)  $(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)-6=0, 3^3+ax^3^2+bx^3-6=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8+4a-2b-6=0 \\ 27+9a+3b-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=7 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3a+b=-7 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}+\textcircled{1}: 5a=0, a=0, b=-7, \therefore a-b=0-(-7)=7$

(B) 5.如圖所示，求灰色部分的面積。(A) 2990 (B) 3900 (C) 7800 (D) 8700。



Sol)灰色部分的面積=平行四邊形面積-內部三角形的面積

$$=89 \times \left(\frac{89}{2}\right) - \frac{1}{2} \times 11 \times 11 = \frac{1}{2} (89^2 - 11^2) = \frac{1}{2} (89+11)(89-11) = \frac{1}{2} \times 100 \times 78 = 3900 \text{ (平方單位)}$$

(C) 6.試求  $\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$  之值為何呢？(A) 7789 (B) 8897 (C) 9987 (D) 9897。

Sol) 原式 $=\sqrt{(100-5)(100-1)(100+1)(100+5)+144}=\sqrt{(100^2-13)^2}$   
 $=100^2-13=9987$

(A) 7.試因式分解  $1-4x^2-9y^2+36x^2y^2$  為下列何者呢(A)  $(1-2x)(1+2x)(1-3y)(1+3y)$

(B)  $(1-2x)^2(1-3y)^2$  (C)  $(2x-1)^2(3y-1)^2$  (D)  $(2x-1)(1+2x)(3y-1)(1+3y)$ 。

Sol) 原式 $=\left(1-4x^2\right)-9y^2\left(1-4x^2\right)=\left(1-4x^2\right)\left(1-9y^2\right)$   
 $=\left(1-2x\right)\left(1+2x\right)\left(1-3y\right)\left(1+3y\right)$

(B) 8. 若  $7 \times 9 \times (8^2+1) \times (8^4+1) \times (8^8+1) = 2^n - 1$ ，且  $n$  為正整數，則  $n =$  ? (A) 64 (B) 48 (C) 32 (D) 24。

Sol)  $7 \times 9 \times (8^2+1) \times (8^4+1) \times (8^8+1) = (8-1)(8+1)(8^2+1)(8^4+1)(8^8+1) = 8^{16} - 1 = (2^3)^{16} - 1 = 2^{48} - 1 \therefore n = 48$

(D) 9. 若  $x^2 + 5x - 5 = 0$ ，則  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$  之值為何? (A) 76 (B) 45 (C) 84 (D) 99。

Sol)  $x^2 + 5x - 5 = 0 \therefore x^2 + 5x = 5$ ，求值式  $= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = (5+4)(5+6) = 99$

(A) 10. 一元二次式  $6x^2 + 4x + 3$  可化為  $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ ，則下列何者正確? (A)  $a > b$  (B)  $b > c$  (C)  $c < 0$  (D)  $a + c < 0$ 。

Sol) 令  $x = -1$  代入： $6 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 3 = 0 + 0 + c \therefore c = 5$

$x = 0$  代入： $0 + 0 + 3 = a + b + 5 \Rightarrow a + b = -2$

$x = -2$  代入： $6 \times (-2)^2 + 4 \times (-2) + 3 = a(-2+1)^2 + b(-2+1) + 5 \Rightarrow 19 = a - b + 5 \therefore a - b = 14$

$\begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=14 \end{cases} \therefore a=6, b=-8, c=5$

### 【進階練習題】

(D) 1. 若  $a$  為正整數，且  $P = a^4 - 38a^2 + 169$  為質數，請問此質數  $P$  為何呢? (A) 94 (B) 95 (C) 96 (D) 97。

Sol)  $P = (a^2 + 13)^2 - 64a^2 = (a^2 + 8a + 13)(a^2 - 8a + 13)$

Q  $P$  為質數  $\Rightarrow a^2 - 8a + 13 = 1 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 = 0$   
 $\Rightarrow (a-2)(a-6) = 0, a = 2$  或  $6$

$a = 2 \Rightarrow P = 33$  (非質數),  $a = 6 \Rightarrow P = 97$  (質數)

(C) 2. 若兩正整數的平方根和是 5，而相差是 5，則此二正整數的和是多少呢? (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14。

Sol)  $x - y = 5 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 5, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$\therefore \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 2,$

$x = 9, y = 4 \Rightarrow x + y = 13$

(D) 3. 假設  $x, y$  都是正整數，且  $9x^2 - y^2 = 17$ ，則下列何者成立呢? (A)  $x - y = 5$  (B)  $x + y = 10$  (C)  $2x - y = 2$  (D)  $2x + y = 14$ 。

$9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y) = 17$

Sol)  $\begin{cases} 3x - y = 1L (1) \\ 3x + y = 17L (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{(1)+(2)}{6} \Rightarrow x = \frac{1+17}{6} = 3, y = 8$

(D) 4. 假設  $x - \frac{1}{x} = 4$ ，試求  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  為何呢? (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 18。

$$\text{Sol) } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

(A) 5. 小華因式分解一個  $x$  的四次多項式，不小心將常數項的正負號看錯，得到結果是  $(x^2+2)(x^2+3)$ ，如果小華在演算過程中沒有其他的錯誤，請問該

多項式因式分解的正確答案為何呢？(A)  $(y-1)(y+1)(y^2+6)$  (B)

$(y+1)(y-1)(y^2+2)$  (C)  $(y-1)(y+1)(y^2-6)$  (D)  $(y-1)^2(y^2+6)$ 。

$$\text{Sol) } Q(y^2+2)(y^3+3) = y^4 + 5y^2 + 6 \quad \therefore \text{正確應為} \Rightarrow y^4 + 5y^2 - 6$$

$$\Rightarrow y^4 + 5y^2 - 6 = (y^2+6)(y^2-1) = (y^2+6)(y-1)(y+1)$$

(B) 6. 若  $x^2+x+k$  可以化成  $(x+\square)^2$ ，則  $k$  值為何呢？(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{8}$  (D)

$\frac{1}{16}$ 。

$$\text{Sol) } x^2+x+k = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow k = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(D) 7. 若  $4x^2-(m-1)x+9$  可以化成  $(2x+\square)^2$ ，則  $m$  值為何呢？(A) 11 或 12 (B) -11 或 12 (C) 11 或 13 (D) -11 或 13

$$\text{Sol) } 4x^2-(m-1)x+9 = (2x)^2 \pm 2(2x)(3) + 3^2$$

$$\therefore m-1 = \pm 12, m = 13 \text{ 或 } -11$$

(B) 8. 假設  $x-2y=3$ ，則  $x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6$  之值為何呢？(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

$$\text{Sol) } \text{求值式} = (x-2y)^2 + 5(x-2y) + 6, \text{ 將 } x-2y=3 \text{ 代入}$$

$$\Rightarrow 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

(D) 9. 若  $\frac{(x^2-1)^2 - (x+2)^2}{x^2+x+1} = x^2+ax+b$ ，求  $a+b$  之值為何？(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

$$\text{Sol) } \frac{(x^2-1+x+2)(x^2-1-x-2)}{x^2+x+1} = \frac{(x^2+x+1)(x^2-x-3)}{x^2+x+1} = x^2-x-3$$

$\therefore a = -1, b = -3$ ，故  $a+b = -1-3 = -4$

(D) 10. 若  $x^3+px-q$  為  $x+1$  與  $x+2$  的倍式，求  $p^2-q^2$  之值為何呢？(A) 10

(B) 11 (C) 12 (D) 13。

Sol)  $x = -1, -2$  分別代入： $(-1)^3 + p \times (-1) - q = 0$ ， $p + q = -1$ ； $(-2)^3 + p(-2) - q = 0$ ， $2p + q = -8$

$$\begin{cases} p + q = -1 \\ 2p + q = -8 \end{cases} \Rightarrow p = -7, q = 6, \therefore p^2 - q^2 = (-7)^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$$