

Unit 10 多項式

能力指標：◎ (A-4-02) 能認識多項式及相關名詞。

◎ (A-4-02) 能熟練多項式的加法和減法。

◎ (A-4-02) 能熟練多項式的乘法 (利用分配律及直式算法來計算)。

◎ (A-4-02) 能熟練多項式的除法 (如長除法、分離係數法等)。

能力一：多項式的意義與化簡

一、多項式的意義：多項式係指『數字』和『文字符號 x 』，藉由『加法』和『乘法』所連結的數學式，稱為 x 的多項式。通常以文字符號的『最高次方數』為此多項式的次數名稱。

$$ax^3 + bx^2 - cx - d$$

$$= ax^3 + bx^2 + (-cx) + (-d)$$

$(-d)$: 稱為常數項(或零次項) $\Rightarrow (-d) = (-dx^0)$
 $(-cx)$: 由 "+" 所間隔的稱為"項"
 x^2 : 稱為 \Rightarrow "變數"
 b : 稱為 \Rightarrow " x^2 的係數"
 x^3 : 3 為此多項式的名稱 $\Rightarrow x$ 的三次多項式

二、多項式的判別

多項式中的文字 x 不可出現在『分母中』、『根號內』、『絕對值內』。

eg: 以下皆非多項式： $\frac{1}{x+3}$ 、 $-x$ 、 $|x+3|$ 、 $\sqrt{x-7}$... 等

三、常數多項式

(一) 常數多項式係指不含文字符號的多項式，有兩種類型 (1) 零次多項式、(2) 零多項式。

(二) 零次多項式：若多項式 $ax^2 + bx + c$ ， $a = 0$ ， $b = 0$ ， $c \neq 0$ 。

(三) 零多項式：若多項式 $ax^2 + bx + c$ ， $a = 0$ ， $b = 0$ ， $c = 0$ 。

四、同類項和升、降冪式

(一) 同類項：在一多項式中，文字部分 (含次數) 相同的項，稱為同類項。同類項的係數可以加減而整理為一項 (合併)，此過程稱為化簡。

(二) 升、降冪式：在多項式中，依特定文字的次數由高至低順序排列，稱為降

冪式（常用）。而依特定文字的次數由低至高順序排列，稱為升冪式。

- (1) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \Rightarrow x$ 的降冪式
 eg: (2) $2 + 3y - 4y^2 + 5y^3 \Rightarrow y$ 的升冪式

(三) 多項式的相等：若兩多項式相等，則其對應項係數相等。

eg: $ax^2 + bx - c = dx^2 - ex + f$
 $\Rightarrow a=d, b=-e, -c=f$

【多項式的意義】

講解一：

- (1) 右邊各項數學式，何者非多項式呢？(A) $\frac{3}{x+2}$ (B) $x^3 + 3x + 3$ (C) $|x|^2 + 2x - 1$

(D) $3x^2 - \sqrt{2}x$ (E) $\sqrt{2x - x + 1}$

- (2) 若 $(k+1)x^2 + 3x - m$ 為一次多項式，請問 k 值為何呢？

Sol)

- (1) 非多項式的有：(A) $\Rightarrow x$ 在分母、(C) $\Rightarrow x$ 在絕對值中、(E) $\Rightarrow x$ 在根號中。

(2) Q $(k+1)x^2 + 3x - m$ 為一次多項式 $\Rightarrow (k+1)=0, k=-1$

練習一：

- (1) 設 a、b、c、d、e 均為整數，且 $2|a| + 3|b-1| + |c-2| = 1$ ，則多項式

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 的次數為何呢？

- (2) 若 $2x^3 + 3x^2 - 1 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + (c+d)$ ，請問 a+b+c+d 的值為何呢？

Sol)

(1) $|a|=0, |b-1|=0, |c-2|=1$

$\Rightarrow a=0, b=1, c=2 \pm 1$

$\Rightarrow a=0, b=1, c=3$ 或 $a=0, b=1, c=1$

\Rightarrow 原多項式可為 $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + dx + e \\ \text{或} \\ x^3 + x^2 + dx + e \end{cases} \Rightarrow$ 均為三次多項式

(2) $\begin{cases} a=2 \\ a+b=3 \\ b+c=0 \\ c+d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=2$

【十分鐘即時練習】

(A) 1. 若一多項式 ax^2+bx+c ， a 、 b 、 c 均為整數，且 $2|a|+|b+1|+3|c+2|=1$ ，請問該多項式的次數為何呢？(A) 零次或一次 (B) 零次或二次 (C) 一次或二次 (D) 三次。

Sol) $|a|=0, |b+1|=1, |c+2|=0 \Rightarrow a=0, b=0 \text{ 或 } -2, c=-2$
 \Rightarrow 多項式 $=-2$ 或 多項式 $=-2x-2 \Rightarrow$ 多項式為零次或二次多項式

(B) 2. 若有一多項式為 $a(x^3-x^2)+b(x^3-x+2)+x^2+ax+2$ 為一次多項式，請問 $a+b$ 為何呢？(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

Sol) 將式子做降冪排列 $\Rightarrow (a+b)x^3+(1-a)x^2+(a-b)x+2b-2$
 令 x^3 及 $x^2=0$, 得 $a+b=0, 1-a=0 \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow a+b=0$

(C) 3. 假設有兩多項式分別相等 $ax^2+(b-4a)x+(4a-2b-5)=3x^2-14x+c$ ，請問 $a+b+c=?$ (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12。

Sol) 比較係數後 $\Rightarrow a=3, b-4a=-14, 4a-2b-5=c$
 $a=3, b=-2, c=11 \Rightarrow a+b+c=12$

(A) 4. 請問右列的數學式中有多少個非多項式呢？(a) $\frac{1}{x}-2$ (b) $\sqrt{x}+2$ (c) $|x|^2+|x|+1$ (d) $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-1$ (e) $|4|x^3|-2|x$ (f) $\sqrt{3}x^3-\sqrt{2}x+1$ (g) $2x^{-3}+x-1$ 。
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (個)。

Sol) (a) x 在分母、(b) x 在根號、(c) x 在絕對值 (g) $x^{-3}=\frac{1}{x^3} \Rightarrow x$ 在分母。

(B) 5. 請問下列多項式中何者按升冪排列呢？(A) x^4+x^2-2 (B) $2^2x+x^2-3^3x^3$
 (C) $\sqrt{2}x^3-x^2+\frac{x}{2}-1$ (D) $4y^3-5y^5+y-\frac{2}{3}$ 。

Sol) $2^2x+x^2-3^3x^3=4x+x^2-9x^3 \Rightarrow$ 升冪排列

能力二：多項式的加減運算

一、同類項才可以相加減。

二、假設 A 、 B 為兩多項式，其次數分別是 m 、 n ，則：

(一) 若 $m=n$ ，則 $A \pm B$ 的次數不大於 m 次。

(二) 若 $m > n$ ，則 $A \pm B$ 的次數是 m 次。

eg: 有三個多項式 $A=3x^3+2x^2+x+1, B=4x^3+3x, C=2x^2+3x-1$

則 $A+B=7x^3+2x^2+4x+1 \Rightarrow$ 最高次不大於3次

$A+C=3x^3+4x^2+4x \Rightarrow$ 最高次是3次

【多項式的加減】

講解一：

假設 $A=2x^2-3x-4$, $B=3x^2-2x+5$ 試求 $2A+3B$ 及 $3A-2B$ 為何呢？

Sol)

$$(1) 2A+3B=2(2x^2-3x-4)+3(3x^2-2x+5)=(4x^2-6x-8)+(9x^2-6x+15)$$

$$=(4+9)x^2+(-6-6)x+(-8+15)=13x^2-12x+7$$

$$(2) 3A-2B=3(2x^2-3x-4)-2(3x^2-2x+5)=(6x^2-9x-12)-(6x^2-4x+10)$$

$$=(6-6)x^2+(-9+4)x+(-12-10)=-5x-22$$

練習一：

(1) 化簡 $(4x^2-x-1) + (6x^2+8x+4)$ 後得 ax^2+bx+c ，則 $a+b+c=?$

(2) 已知多項式 $A=ax^3+(b+3)x^2+(c-1)x-1$ ， $B=2x^2+(a-3)x+(b-c+d)$ ，若 $A=B$ ，則 $a-b-c-d=?$

sol)

(1) 化簡得 $10x^2+7x+3 \Rightarrow a+b+c=20$

(2) $a=0$ ， $b+3=2 \Rightarrow b=-1$ ， $c-1=a-3 \Rightarrow c=-2$ ， $b-c+d=-1$ ， $d=-2$ ，
 $a-b-c-d=0-(-1)-(-2)-(-2)=0+1+2+2=5$

【十分鐘即時練習】

(C) 1. 化簡 $(4x^2-6) + (-3x^2+4+5x) = ax^2+bx+c$ ，則 $a-b+c=?$ (A) -5 (B) 5 (C) -6 (D) 6

Sol) 化簡結果為 x^2+5x-2 ，則 $a-b+c=1-5-2=-6$

(A) 2. 鼎翔算數學題，題目是「兩多項式 A 、 B ， $B=-3x^2-4x+5$ ，求 $A+3B=?$ 」，但鼎翔將 $3B$ 誤看成 $5B$ ，結果求出的答案是 $-2x^2-9x+16$ ，請你幫她算出正確的答案？ (A) $4x^2-x+6$ (B) $-4x^2-x+6$ (C) $4x^2+x-6$ (D) $-4x^2-x-6$ 。

Sol) $A+3B=A+5B-2B(-2x^2-9x+16)-2B=-2x^2-9x+16-2(-3x^2-4x+5)$
 $=-2x^2-9x+16+6x^2+8x-10=4x^2-x+6$

(C) 3. 已知某一多項式與 $3x^2+6x-2$ 的和為 $2x+1$ ，則此一多項式的常數項為多少？ (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

Sol) $1-(-2)=3$

(A) 4. 若 $A=(a-3)x^3+(b-2)x^2+(a+b-7)x+5$ 為 x 的一次多項式，求 $A=?$ (A) $-2x+5$ (B) $-4x+5$ (C) $-6x+5$ (D) $-8x+5$ 。

Sol) $a-3=0 \Rightarrow a=3$ ， $b-2=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow (a+b-7)x+5=-2x+5$

(B)5.有一多項式減去 $4x^2 - 7x - 4$ 的差為 $x^2 + 8x + 3$ ，則此多項式為下列何者？

(A) $5x^2 + x + 1$ (B) $5x^2 + x - 1$ (C) $3x^2 + x + 7$ (D) $3x^2 + x - 7$ 。

Sol) 設此多項式為 A，則 $A = 4x^2 - 7x - 4 + x^2 + 8x + 3 = 5x^2 + x - 1$

能力三：多項式的乘除運算

一、多項式的乘法

(一) 設 A、B 為 x 的多項式，其次數分別為 m、n，則 $A \times B$ 的次數為 $(m+n)$ 次。

(二) 多項式乘法的係數總和：有兩多項式相乘 $(3x^2 + 2x - 6)(2x^3 + 3x^2 - 7)$ 其乘積

之多項式係數總和為 $\Rightarrow (3+2-6)(2+3-7) = 2$ 。

(三) 多項式乘法中單項係數求法：有兩多項式相乘 $(x - 7 + 5x^2)(-4x^2 + 3 + 9x)$ 其乘

積中 x^2 項的係數為 $\Rightarrow 1 \times 9 + (-7) \times (-4) + 5 \times 3 = 52$

二、多項式的除法

設兩多項式 A、B，A 除以 B 的商為 Q，餘式為 R，則：

$$\boxed{A = BQ + R \Leftrightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}}$$

(1) kA 除以 B，商式為 kQ ，餘式為 kR 。

(2) A 除以 kB ，商式為 $\frac{Q}{k}$ ，餘式為 R。

(3) 設 A、B 兩多項式之次數分別為 m、n，若 $m > n$ ， $A \div B$ 的商式為 $(m-n)$ 次。

三、多項式的乘除與係數的關係

設兩多項式 A、B 的係數總和分別為 a、b，則：

(1) $A \times B$ 的係數總和為 $a \times b$ 。

(2) $A \div B$ 的商式 Q，餘式 R 的係數總和分別是 q 與 r，則 $a = bq + r$ 。

【多項式的乘法】

講解一：

(1) 若 $16x^2 + kx - 6$ 與 $(2x + 3)(ax + b)$ 相等，其中 a、b、k 均為常數，則 $k = ?$

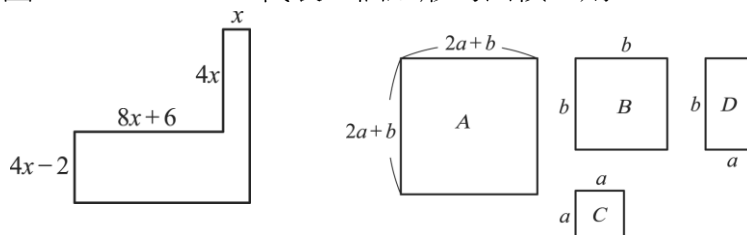
(2) 已知 $x^2 + 2x - 17 = 0$ ，則 $(x + 7)(x + 3)(x - 1)(x - 5) = ?$

Sol)

- (1) $(2x+3)(ax+b) = 2ax^2 + 3ax + 2bx + 3b = 2ax^2 + (3a+2b)x + 3b$ 與 $16x^2 + kx - 6$ 比較係數得 $a=8, b=-2$ 故 $k = (3 \times 8 - 4) = 20$
- (2) $x^2 + 2x = 17, (x+7)(x-5)(x+3)(x-1)$
 $= (x^2 + 2x - 35) \cdot (x^2 + 2x - 3)$
 $= (17 - 35) \cdot (17 - 3) = -252$

練習一：

- (1) 如圖，求此圖形的面積為何呢？
- (2) 如圖，A、B、C、D 代表四個矩形的面積，則 $A = ?$



Sol)

- (1) $4x(x) + [(4x-2) \times (8x+6-x)] = 4x^2 + 28x^2 + 10x - 12 = 32x^2 + 10x - 12$
- (2) $A = (2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 = 4C + 4D + B$

【多項式的除法】

講解二：

- (1) 請問 $[(2x^2+x-3) - (-x^2-3x+4)] \div (x-1)$ 的商式為何？
- (2) 假若 $6x^4 - 11x^3 + Px^2 + 2x + Q$ 可以被 $(2x^2 - x - 1)$ 整除，則 $P+Q = ?$

Sol)

- (1) 原式 $= (2x^2+x-3+x^2+3x-4) \div (x-1) = (3x^2+4x-7) \div (x-1)$

$$\begin{array}{r} \text{商式} = 3x + 7 \\ 3x + 7 \\ \hline x-1 \overline{) 3x^2 + 4x - 7} \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ 7x - 7 \\ \underline{7x - 7} \\ 0 \end{array}$$

- (2) $\frac{P-1}{2} = 2, P-1=4, P=5, Q = -\frac{P-1}{2} = -2, P+Q=3$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + \frac{P-1}{2} \\ \hline 2x^2 - x - 1 \overline{) 6x^4 - 11x^3 + Px^2 + 2x + Q} \\ \underline{6x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 2x - 1} \\ - 8x^3 + (P+3)x^2 + 4x + Q + 1 \\ \underline{- 8x^3 + 4x^2 + 4x + Q} \\ (P-1)x^2 - 2x + Q + 1 \\ \underline{(P-1)x^2 - \frac{P-1}{2}x - \frac{P-1}{2}} \\ 0 \end{array}$$

練習二：

(1) 求多項式 $6x^3 + x^2 - 3x - 1$ 除以 $2x + 1$ 的商式為何呢？

(2) 求 $(x^3 - 3x + 5) \div (x - 1)$ 的商式與餘式之和 = ？

Sol)

(1) 商式 $= 3x^2 - x - 1$

(2) 商式加餘式 $= x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x - 1 \\ 2x + 1 \overline{) 6x^3 + x^2 - 3x - 1} \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \\ -2x^2 - 3x \\ \underline{-2x^2 - x} \\ -2x - 1 \\ \underline{-2x - 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ x - 1 \overline{) x^3 + 0 - 3x + 5} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 3x \\ \underline{x^2 - x} \\ -2x + 5 \\ \underline{-2x + 2} \\ 3 \end{array}$$

【十分鐘即時練習】

(C) 1. 若 $(3x^4 - 5x^2 + 4x) \div 3x$ 的商式為 $x^3 + ax + b$ ，則 $b + a = ?$ (A) -3 (B)

3 (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。

Sol) $(3x^4 - 5x^2 + 4x) \div 3x = x^3 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$ ， $b = \frac{4}{3}$ ， $b + a = \frac{4-5}{3} = -\frac{1}{3}$

(A) 2. 已知多項式 B 除以 $x - 1$ 得商式為 $x + 5$ ，餘式為 8，如果改將多項式 B 除以 $x + 1$ ，則餘式 = ? (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

Sol) $B = (x - 1)(x + 5) + 8 = x^2 + 4x + 3$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x + 1 \overline{) x^2 + 4x + 3} \\ \underline{x^2 + x} \\ 3x + 3 \\ \underline{3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

(C) 3. 假設 $2x^4 - x^3 + mx^2 + x + n$ 可被 $2x^2 + x + 1$ 整除，則 $2m + n^2 = ?$ (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16。

Sol)

$$\begin{array}{r} x^2 - x + \frac{m}{2} \\ 2x^2 + x + 1 \overline{) 2x^4 - x^3 + mx^2 + x + n} \\ \underline{2x^4 + x^3 + x^2} \\ -2x^3 + (m-1)x^2 + x \\ \underline{-2x^3 - x^2 - x} \\ mx^2 + 2x + n \\ \underline{mx^2 + \frac{m}{2}x + \frac{m}{2}} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{m}{2} = 2$ ， $m = 4$ ； $n = \frac{4}{2} = 2$ ，則 $2m + n^2 = 2 \times 4 + 4 = 14$

(A) 4. 多項式 $a(x+1)(x-2) + b(x+2)(x-1) + (x-2)(x+1)$ 化簡

為 $2x^2+3x+c$ ，則 $(a+b+c)^2=?$ (A) 9 (B) 16 (C) 25 (D) 36。

Sol) $a(x^2-x-2)+b(x^2+x-2)+(x^2-x-2)=2x^2+3x+c$
 $(a+b+1)x^2+(-a+b-1)x+(-2a-2b-2)$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b-a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{5}{2}, c=-4 \end{cases}, \text{ 則 } (a+b+c)^2=(-3)^2=9$$

(B) 5. 多項式 $(13x+a)(bx+c)=221x^2+2x-3$ ，其中 $b=?$ (A) 7 (B) 17 (C) 27 (D) 37。

Sol) $13bx^2+abx+13cx+ac=221x^2+2x-3$ ， $b=221 \div 13=17$

【基本觀念題】

(A) 1. 若 $(x-1)(58x+7)+(8x-7)^2+(101x-100)^2=ax^2+bx+c$ ，則 $a+b+c=?$ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

Sol) 令 $x=1$ 代入 $\Rightarrow 0+1+1=2$

(C) 2. 已知 C, D 為兩多項式，若 $2C+3D=4x^2+6x-3$ ， $C-2D=2x^2-4x+2$ ，則求 $C \div D$ 的商式和餘式之差為何呢？(A) $2x$ (B) $\frac{3}{2}x$ (C) x (D) $\frac{x}{2}$ 。

Sol) $\begin{cases} 2C+3D=4x^2+6x-3 \dots\dots \textcircled{1} \\ C-2D=2x^2-4x+2 \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$ ， $\textcircled{1}-2 \times \textcircled{2}$ 得 $7D=14x-7 \Rightarrow D=2x-1$ ，

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{2} \\ 2x-1 \overline{) 2x^2+0x+0} \\ \underline{2x^2-x} \\ x+0 \\ \underline{x-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

 代入 $\textcircled{2}$ 得 $C-2 \cdot (2x-1)=2x^2-4x+2 \Rightarrow C=2x^2$ 則商式為 $x+\frac{1}{2}$ ，餘式為 $\frac{1}{2}$ ，其差為 x 。

(C) 3. 若 $(3x+1)(x^2-ax+1)=bx^3+2x^2+cx+d$ ，求 $a+b+c+d=?$ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8。

Sol) 展開後得 $3x^3-3ax^2+3x+x^2-ax+1=3x^3+(1-3a)x^2+(3-a)x+1$

比較係數得 $b=3$ ， $1-3a=2$ ， $a=-\frac{1}{3}$ ， $c=3-a$ ， $c=\frac{10}{3}$ ， $d=1$ ； $a+b+c+d=7$ 。

(D) 4. 若 $\frac{(x+1)^2-x(x^2+2)}{x+1}=A+\frac{3}{x+1}$ ，則 $A=?$ (A) x^2-2x-2 (B) x^2+2x-2 (C) $-x^2-2x-2$ (D) $-x^2+2x-2$ 。

Sol) 原式 $\Rightarrow (x^2+2x+1)-(x^3+2x)=A \cdot (x+1)+3$
 $\Rightarrow x^2+2x+1-x^3-2x=A \cdot (x+1)+3$
 $\Rightarrow -x^3+x^2-2=A \cdot (x+1)$
 $\Rightarrow A=(-x^3+x^2-2) \div (x+1)=-x^2+2x-2$

$$\begin{array}{r} -x^2+2x-2 \\ x+1 \overline{) -x^3+x^2+0x-2} \\ \underline{-x^3-x^2} \\ 2x^2+0 \\ \underline{2x^2+2x} \\ -2x-2 \\ \underline{-2x-2} \\ 0 \end{array}$$

(B) 5. 假設二多項式相等 $2x^3-3x^2+4x-5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ ，則下列何者為正確的敘述呢？(A) $a+b+c+d=6$ (B) $a-b-c+d=-7$ (C) $2a-b+c-3d=5$

$$(D) -a-b+c+d=3。$$

$$\text{Sol) } a=2, b=3, c=4, d=-2 \Rightarrow a-b-c+d=-7$$

(B) 6. 假設有三個多項式分別為 $A=x^2+x+1$, $B=x^3-2x^2-x+4$, $C=2x^2-x+3$, 請問多項式 $A \times B \times C$ 之積 x^4 項的係數為何呢? (A) -3 (B) 1 (C) 0 (D) 8。

$$\text{Sol) } (A \times B) \times C = (2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3)(x^3 - 2x^2 - x + 4)$$

$$\text{所求} \Rightarrow 2 \times 4 + 1 \times (-1) + 4 \times (-2) + 2 \times 1 = 1$$

(A) 7. 若 x 是實數, 且 $x^2+2x-5=0$, 則 $(x+7)(x+3)(x-1)(x-5) = ?$
(A) -60 (B) 60 (C) -30 (D) 30。

$$\text{Sol) 原式} = (x+7)(x-5)(x+3)(x-1) = (x^2+2x-35)(x^2+2x-3)$$

$$= (5-35)(5-3) = (-30) \times 2 = -60$$

(D) 8. 已知 B 為一多項式, 且 $B \cdot (-4x+5) = (-8x^2+14x-5)$, 則 $A = ?$
(A) $-2x-1$ (B) $-2x+1$ (C) $2x+1$ (D) $2x-1$ 。

$$\text{Sol) } \begin{array}{r} 2x - 1 \\ -4x + 5 \overline{) -8x^2 + 14x - 5} \\ \underline{-8x^2 + 10x} \\ 4x - 5 \\ \underline{4x - 5} \\ 0 \end{array}$$

(C) 9. 若 $(3x^4-6x^3+2x+6) \div 3x^2$ 的商式為 p , 餘式為 q , 則 $p+q = ?$ (A) x^2-6 (B) x^2+4x+6 (C) x^2+6 (D) $4x+6$ 。

$$\text{Sol) 商式為 } x^2-2x=p, q=2x+6, p+q=x^2-2x+2x+6=x^2+6$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x \\ 3x^2 \overline{) 3x^4 - 6x^3 + 2x + 6} \\ \underline{3x^4} \\ -6x^3 \\ \underline{-6x^3} \\ 2x + 6 \end{array}$$

(D) 10 設 A 為 $-x$ 的多項式, 且 $\frac{4x^3+3x-1}{A} = 2x+1 - \frac{3}{A}$, 則 A 為下列何者?

$$(A) 2x^2-2x+4 (B) 2x^2-2x+2 (C) 2x^2+x+2 (D) 2x^2-x+2。$$

$$\text{Sol) 同乘 } A \Rightarrow 4x^3+3x-1 = (2x+1) \cdot A - 3 \Rightarrow 4x^3+3x+2 = (2x+1) \cdot A$$

$$A = 4x^3+3x+2 \div (2x+1) = 2x^2-x+2$$

【溫故歷屆基測試題】

(A) 1. 化簡 $(\frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y) - (\frac{20}{3}x - \frac{11}{12}y)$ 之後, 可得下列哪一個結果? (A)

$$-5x - \frac{13}{4}y (B) -60x - 39y (C) -70x - 14y (D) -\frac{25}{3}x - \frac{61}{12}y。【95.$$

基測一】

$$\text{Sol) 原式} = \frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{20}{3}x + \frac{11}{12}y = \left(\frac{5}{3}x - \frac{20}{3}x\right) - \left(\frac{25}{6}y - \frac{11}{12}y\right)$$

$$= \frac{-15}{3}x - \left(\frac{50}{12}y - \frac{11}{12}y\right)$$

(B) 2. 下列哪一個選項為 $[(2x^2+x-3) - (-x^2-3x+4)] \div (x-1)$ 的商式？

(A) $3x-7$ (B) $3x+7$ (C) $x-1$ (D) $x+1$ 。【92.基測二】

$$\begin{aligned} \text{Sol)} \text{ 原式} &= [2x^2 + x - 3 + x^2 + 3x - 4] \div (x-1) \\ &= (3x^2 + 4x - 7) \div (x-1) = (3x+7) \times (x-1) \end{aligned}$$

(B) 3. 已知有一多項式除以 $(x-2)$ 得商式為 $(2x-3)$ ，餘式為 3，若此多項式除以 $(2x+3)$ ，得商式為何？ (A) $x+5$ (B) $x-5$ (C) $x+2$ (D) $x-2$ 。【93.基測一】

$$\text{原式} = (x-2)(2x-3) + 3 = 2x^2 - 7x + 6 + 3 = 2x^2 - 7x + 9$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 2x^2 - 7x + 9} \\ \underline{2x^2 + 3x} \\ -10x + 9 \\ \underline{ -10x - 15} \\ 24 \end{array}$$

(A) 4. 已知 $3x^2 - x - 10 = (3x+5)(x-2)$ ，請問下列哪一個敘述是正確的？ (A) $3x^2 - x - 10$ 為 $x-2$ 的倍式 (B) $x-2$ 為 $3x^2 - x - 10$ 的倍式 (C) $3x+5$ 為 $3x^2 - x - 10$ 的倍式 (D) $3x^2 - x - 10$ 為 $3x+5$ 的因式。【93.基測二】

$$\begin{aligned} \text{Sol)} \quad 3x^2 - x - 10 &= (3x+5)(x-2) \\ \Rightarrow 3x^2 - x - 10 &\text{是}(3x+5)\text{與}(x-2)\text{的倍式} \end{aligned}$$

(D) 5. 若多項式 A 除以 $2x+1$ 得商式為 $3x-4$ ，餘式為 5，則 $A = ?$ (A) $6x^2 - 5x - 4$ (B) $6x^2 - 5x - 9$ (C) $6x^2 + 5x + 1$ (D) $6x^2 - 5x + 1$ 。【93.基測二】

$$\begin{aligned} \text{Sol)} \quad A &= (2x+1)(3x-4) + 5 \\ &= 6x^2 - 8x + 3x - 4 + 5 = 6x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

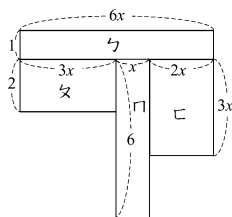
(D) 6. 章老師作一個多項式除法示範後，擦掉計算過程中的六個係數，並以 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 表示，求 $a+b+d+e = ?$ (A) 18 (B) 26 (C) 38 (D) 44。【91.基測一】

$$\begin{array}{r} \overline{) 6x^2 + ax + d} \\ \underline{bx+5} \\ cx^2 + 10x \\ \underline{ex + d} \\ \underline{fx + 15} \\ - 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Sol)} \quad 2x \times bx &= 2bx^2 = 6x^2 = cx^2, \therefore b=3, c=6, \\ d-15 &= -2, d=13, 3b=e, 3 \times 3=e=9, \\ \therefore a-10 &= e=9, a=19, a+b+c+d=19+3+13+9=44 \end{aligned}$$

- (D) 7. 如圖， ㄅ 、 ㄆ 、 ㄇ 、 ㄊ 是四個長方形。若用 x 的多項式來表示它們的面積，則下列哪一個長方形的面積不是 $6x$ ？ (A) ㄅ (B) ㄆ (C) ㄇ (D) ㄊ 。【91.基測二】

- Sol) ㄅ : $6x \times 1 = 6x$,
 ㄆ : $3x \times 2 = 6x$,
 ㄇ : $6 \times x = 6x$,
 ㄊ : $3x \times 2x = 6x^2$



- (D) 8. 下列四個敘述，哪一個是正確的？ (A) $3x$ 表示 $3+x$ (B) x^2 表示 $x+x$ (C) $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$ (D) $3x+5$ 表示 $x+x+x+5$ 。【92.基測一】

- Sol) (A) $3x$ 表示 $3 \times x$
 (B) x^2 表示 $x \times x$
 (C) $3x^2$ 表示 $3 \times x \times x$
 (D) $3x+5$ 表示 $x+x+x+5$

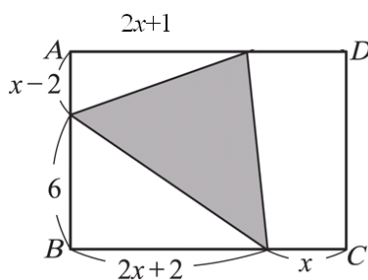
- (A) 9. 化簡 $2(3x-1) - 3(x+2)$ 之後，可得下列哪一個結果？ (A) $3x-8$ (B) $3x+4$ (C) $3x+5$ (D) $9x+4$ 。【92.基測一】

Sol) 原式 = $6x - 2 - 3x - 6 = 3x - 8$

【模擬學力基測試題】

- (A) 1. 如圖，四邊形 ABCD 為長方形，則灰色部分的面積可以如何表示？ (A)

- $\frac{4x^2+17x-7}{2}$ (B) $\frac{4x^2+17x+7}{2}$ (C) $4x^2+17x-7$ (D) $4x^2+17x+7$ 。



- Sol)
$$\left[(x-2+6)(3x+2) \right] - \left[\frac{(2x+1)(x-2)}{2} \right] - \left[\frac{6(2x+2)}{2} \right] - \left[\frac{x+(x+1)}{2} \cdot (x+4) \right]$$

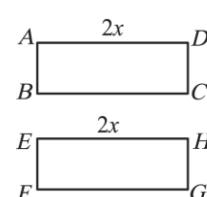
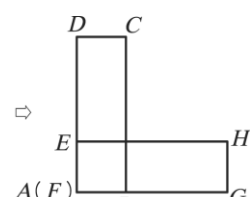
$$= (3x^2+14x+8) - \left(\frac{2x^2-5x+2}{2} \right) - (6x+6) - \left(\frac{4x+9}{2} \right) = \frac{6x^2+28x+16-2x^2+5x-2-12x-12-4x-9}{2}$$

$$= \frac{4x^2+17x-7}{2}$$

- (D) 2. 如圖(一)，四邊形 ABCD、EFGH 均是長為 $3x$ ，寬為 3 的矩形。今將兩個矩形做部分疊合，使得 E 點落在 \overline{AD} 上，B 點在 \overline{FG} 上，如圖(二)所示。若連接 \overline{CH} ，則五邊形 AGHCD 的面積為何？ (A) $4x^2 - \frac{9}{2}$ (B)

$$4x^2 + \frac{9}{2} \quad (C) \quad 2x^2 + 6x - \frac{9}{2} \quad (D) \quad \frac{9}{2}x^2 + 9x - \frac{9}{2}$$

Sol) $\frac{(3x-3)^2}{2} + (18x-9) = \frac{9x^2-18x+9}{2} + (18x-9)$

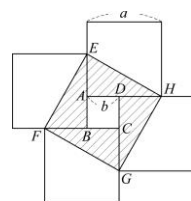
$$= \frac{9x^2-18x+9+36x-18}{2} = \frac{9x^2+18x-9}{2} = \frac{9}{2}x^2 + 9x - \frac{9}{2}$$



圖(一) 圖(二)

- (B) 3. 假設 $A=x^2+xy-3y^2$, $B=x^2-2xy+3y^2$, $C=-3x^2+5y^2$, 請問計算 $A-2B+3C=?$
 (A) $-6x^2+3xy+5y^2$ (B) $-10x^2+5xy+7y^2$ (C) $-9x^2-6xy+25y^2$ (D) $9x^2+6xy+25y^2$ 。

Sol) $A-2B+3C = (x^2+xy-2y^2) - 2(x^2-2xy+3y^2) + 3(-3x^2+5y^2)$
 $= (1-2-9)x^2 + (1-4)xy + (-2-6+15)y^2 = -10x^2 + 5xy + 7y^2$

- (A) 4. 將一塊邊長為 b 公分的正方形 ABCD，與四塊邊長為 a 公分的正方形拼成如附圖所示，其中 $a > b$ 。今將 E、F、G、H 四點連接起來成為一個四邊形，則四邊形 EFGH 的面積為多少平方公分？ (A) $2a^2 - 2ab + b^2$
 (B) $a^2 - 2ab + b^2$ (C) $2a^2 + 2ab + b^2$ (D) $a^2 - 2ab - b^2$



sol)(1) $\overline{AE} = a - b$ (公分)，四塊斜線直角三角形面積 $[a \times (a - b) \div 2] \times 4 =$

$$\frac{(a^2 - ab)}{2} \times 4 = 2a^2 - 2ab \text{ (平方公分)}, \text{ 四邊形 EFGH 面積 } (2a^2 - 2ab) + b^2 = 2a^2 - 2ab + b^2 \text{ (平方公分)}$$

- (B) 5. 多項式 $5x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ 與 $3x^2 - 6x + 2$ 的和加上何式等於零次多項式？ (A) $5x^3 + x^2 - 2x + 1$ (B) $-5x^3 - x^2 + 2x + 2$ (C) $5x^3 + x^2 - 2x - 1$ (D) $-x^2 + 4x - 2$

Sol) $(5x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + (3x^2 - 6x + 2) = 5x^3 + x^2 - 2x - 1$
 \Rightarrow 加上 $-5x^3 - x^2 + 2x + n$ ($n > 1$)

- (A) 6. 設 a, b 為整數，若 $A = |a - 2| x^3 + |b + 3| x^2 + ax - b$ 為一次多項式，求 $a + b = ?$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

Sol) $\because A$ 為一次多項式， $\therefore \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}, \therefore a + b = 2 - 3 = -1$

- (C) 6. 假設 x, y 皆為非零的實數，且滿足 $xy = x - y$ ，則 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - xy = ?$ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

$$\text{Sol)} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - xy = \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2y^2}{xy} = \frac{(x^2+y^2)-(x-y)^2}{xy} = \frac{2xy}{xy} = 2$$

(D) 7. 假設 $a+1=b+2=c+3=d+4=a+b+c+d+5$ ，請問 $a+b+c+d = ?$ (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{-3}{10}$

(C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{-10}{3}$ 。

$$\text{Sol)} (a+1)+(b+2)+(c+3)+(d+4)=4(a+b+c+d+5)$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)+10=4(a+b+c+d)+20$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d) = \frac{-10}{3}$$

(A) 8. 已知一矩形周長為 100，且其對角線長為 x ，請問此矩形面積為何呢？(A)

$1250 - \frac{x^2}{2}$ (B) $1250 - \frac{x^2}{3}$ (C) $\frac{x^2}{2} - 1250$ (D) $\frac{x^2}{3} - 1250$

$$\text{Sol)} \text{設長}=a, \text{寬}=b, \text{對角線長}=x \Rightarrow a+b=50, a^2+b^2=x^2,$$

$$\text{面積}=ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - (a^2+b^2)] = \frac{1}{2}(50^2 - x^2) = 1250 - \frac{x^2}{2}$$

(B) 9. 試化簡 $\frac{1}{2}a^2b - \left[\frac{3}{2}a^2b - 3abc + a^2c - 4a^2c \right] - 3abc = ?$ (A) $a^2b + 3a^2c$ (B) $-a^2b + 3a^2c$

(C) $a^2b - 3a^2c$ (D) $-a^2b - 3a^2c$

$$\text{Sol)} \frac{1}{2}a^2b - \left[\frac{3}{2}a^2b - 3abc + a^2c - 4a^2c \right] - 3abc$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{2}a^2b + 3abc + 3a^2c - 3abc = -a^2b + 3a^2c$$

(D) 10. 若多項式 A、B 皆為 x 的三次多項式，則下列三人的敘述何者正確？甲

生：A-B 可能只有一項常數項；乙生：A-B 可能是 x 的三次多項式；

丙生：A-B 可能是 x 的二次多項式。(A) 甲對 (B) 乙對 (C) 丙對 (D)

全部說的都對。

Sol) 假設 A、B 為兩多項式，其次數分別是 m 、 n ，則①若 $m=n$ ，則 $A \pm B$ 的次數不大於 m 次。②若 $m > n$ ，則 $A \pm B$ 的次數是 m 次。

【進階練習題】

(D) 1. 設 $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = (ax^2 + bx + c)^3$ ，請問 $a+b+c = ?$ (A) 6 (B)

5 (C) 4 (D) 3。

$$\text{Sol)} \text{令 } x=1 \Rightarrow 27 = (a+b+c)^3 \Rightarrow a+b+c=3$$

(B) 2. 有一多項式為 $(ax^5 - x^4 + x^2 - 2x + 4) + (bx^4 - x + 2)$ ，假設其為二次多項式，請

問 $a+b=?$ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

Sol) $ax^5+(b-1)x^4+x^2-3x+6$ 為二次多項式
 $\Rightarrow a=0, b-1=0, b=1 \Rightarrow a+b=1$

(A) 3. 有一多項式 $a(x+1)(x-2)+b(x+2)(x-1)+(x-2)(x+1)$
 化簡為 $2x^2+6x+c$ ，則 $a+b+c=?$ (A) -3 (B) -4 (C) -5 (D)
 -6。

Sol) $a(x^2-x-2)+b(x^2+x-2)+(x^2-x-2)=2x^2+3x+c$
 $(a+b+1)x^2+(-a+b-1)x+(-2a-2b-2)=2x^2+6x+c$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b-a=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4, c=-4 \end{cases}, \text{ 則 } a+b+c=-3$$

(B) 4. 假設有兩多項式 $ax^5+3x^4+x^3-2x^2+1$ 與 $2x^5-bx^4+x^2-3x-2$ 相加後，次數變為三次，請問 $a-b=?$ (A) 5 (B) -5 (C) 13 (D) -13。

Sol) $(ax^5+3x^4+x^3-2x^2+1)+(2x^5-bx^4+x^2-3x-2)$
 $= (a+2)x^5+(3-b)x^4+x^3-x^2-3x-1$
 $\Rightarrow \begin{cases} (a+2)=0 \\ (3-b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a-b=-2-3=-5$

(C) 5. 將 x 的多項式 $(-4x^{51}-3x^{33}-2x^{28}+2)^{199}$ 展開後，各項係數和為 a ，各奇數次
 項係數和為 b ，請問 $a+b=?$ (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2。

Sol) 將 x 以 1 代入 $\Rightarrow (-4+3-2+2)^{199}=(-1)^{199}=(-1)=a$
 將 x 以 (-1) 代入 $\Rightarrow (4-3-2+2)^{199}=1^{199}=1$
 $b=\frac{(-1)-1}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow a+b=-1-1=-2$

(D) 6. 假設 $3x^3-4x^2+5x-6=(x^2-2x+3)(px+q)+r$ ，請問 p, q, r 的大小為何呢？

(A) $q>r>p$ (B) $r<p<q$ (C) $p<q<r$ (D) $p>q>r$ 。

Sol) $\begin{array}{r} \overline{3+2} \\ 1-2+3 \overline{)3-4+5-6} \\ \underline{3-6+9} \\ \\ \underline{2-4+6} \\ \end{array}$
 $\Rightarrow px+q=3x+2, r=-12 \Rightarrow p>q>r$

(B) 7. 若多項式 x^3+4x^2+5x-5 除以 A ，得商式 $x+2$ ，餘式 $2x-3$ ，請問 $A=?$ (A)
 x^2-2x-1 (B) x^2+2x-1 (C) $2x^2+2x-1$ (D) $2x^2+2x-2$ 。

Sol) $x^3+4x^2+5x-5=A \times (x+2)+(2x-3)$
 $A=x^2+2x-1$

(A) 8.若 a、b 皆為實數，且多項式 $x^3+ax^2+bx+3a$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式 $3x-7$ ，
 則=? (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

Sol) $x^3+ax^2+bx+3a=商式 \times (x-1)(x-2)+(3x-7)$

將x以1代入 $\Rightarrow 1+a+b+3a=3-7$

將x以2代入 $\Rightarrow 8+4a+2b+3a=b-7$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=-5 \\ 7a+2b=-9 \end{cases} \Rightarrow -b=-35+36, b=-1$$

(C) 9.有一多項式 $4x^8-7x^6+9x^5-7x^4+3x^2-2x-1$ 被 $5x+5$ 除時，請問其餘式為何呢?
 (A) -5 (B) -10 (C) -15 (D) -20。

Sol) 可令 $5x+5=0$ 得 $x=-1$ ，代入 $4x^8-7x^6+9x^5-7x^4+3x^2-2x-1=4-7-9-7+3+2-1=-15$

(B) 10.已知一多項式 A 被 $2x^2-4x+2$ 除的餘式為 $3x+8$ ，請問 A 被 $x-1$ 除時，餘式為何呢? (A) -11 (B) 11 (C) -9 (D) 9。

Sol) $A=(2x^2-4x+2) \times 商式+(3x+8)=2(x-1)^2 \times 商式+(3x+8)$

A除以 $(x-1)$ 的餘式 \Rightarrow 將x以1代入 \Rightarrow 餘式=0+3+8=11