

Unit 1 因數與倍數

能力指標：◎ (N-3-01) 能理解質數的意義，並認識 100 以內的質數。

◎ (N-3-02) 能理解因數、質因數、倍數、最大公因數和最小公倍數，並熟練質因數分解的計算方法。

能力一：因數與倍數

一、因數與倍數的定義

1. 除法原理：『被除數 = 除數 × 商數 + 餘數』，且被除數 ≠ 0， $0 < \text{餘數} < \text{除數}$ 。
2. 整除：當『被除數 = 除數 × 商數』(餘數=0) 時，稱【除數】整除【被除數】或【被除數】被【除數】整除。
3. 因數與倍數：當【除數】整除【被除數】，則【除數】稱為【被除數】的【因數】；反之【被除數】稱為【除數】的【倍數】。

Ex： $8=2 \times 4$ ；2 與 4 皆為 8 的因數，8 是 2 與 4 的倍數。

二、因數與倍數的性質

1. 任何數皆為 1 倍數，反之 1 為任何數的因數，而且 1 是最小的正因數。
2. 任何整數 (除了 0 之外)，就是本身的因數，也是本身的倍數。
3. 零 (0) 是任意數 (除了 0 之外) 的倍數。
4. 零 (0) 不是任意整數的因數 (分母不可為 0)。
5. 任意整數 (除了 0 之外) 都是零 (0) 的因數。

Ex：1. $3=1 \times 3$ ， $\frac{3}{1}=3$ ， $\frac{3}{3}=1$ 。

2. $6=1 \times 6=2 \times 3$ ；1、2、3、6 皆為 6 的因數。

3. $0=8 \times 0$ ；0 是 8 的倍數。

4. $8 \div 0 = \frac{8}{0}$ = 無意義；0 不是 8 的因數。

5. $0 \div 8 = \frac{0}{8} = 0$ ；8 是 0 的因數。

三、倍數的判別法

1. 2 的倍數判別法：一個整數的末位數字是 0、2、4、6、8 的偶數，此數為 2 的倍數。
2. 3 的倍數判別法：一個整數的數字總合是 3 的倍數，此數為 3 的倍數。
3. 5 的倍數判別法：一個整數的末位數字是 0、5 數，此數為 5 的倍數。

4. 9 的倍數判別法：一個整數的**數字總合**是 9 的倍數，此數為 9 的倍數。
5. 11 的倍數判別法：一個整數的（**奇數位數字和**）減去（**偶數位數字和**）的**差值**是 0 或 11 的倍數，此數為 11 的倍數。

【因數與倍數的判別】

講解 1：

- (1) 蔡康詠說：「因為 $7 \div 3 = 2\Lambda 1$ ，所以 3 不是 7 的因數。」；林志鈴則說：「因為 $9 \div 2 = 4.5\Lambda 0$ ，所以 9 是 2 的倍數。」請問智勇電力學校的兩位主持人，哪一位說對了呢？
- (2) 若 A 是正整數，且 A 的所有正因數由大到小排列分別是 r、s、t、8、7、4、2、1，則 r、s、t 分別是多少呢？
- (3) 已知 x 為正整數，且 $\frac{78}{x+2}$ 亦為正整數，則 x 的值可能為何呢？
- (4) 已知 8642□ 是一個五位數的偶數，並且是 3 的倍數，則 □ 應為多少呢？

解：

- (1) 7 無法被 3 整除，因此 3 不是 7 的因數。
9 無法被 2 整除，因此 9 不是 2 的倍數。
因此是蔡康詠答對了。
- (2) 由題意可知 $r \times 1 = s \times 2 = t \times 4 = 8 \times 7 = 56$ ；此正整數應為 56；
所以 $r = 56, s = 28, t = 14$ 。
- (3) 由題意可知 $x+2$ 為 78 的因數， $x+2 = 1、2、3、6、13、26、39、78$ ；
 $x = -1、0、1、4、11、24、37、76$ 。
- (4) 因為是 3 的倍數，所以要將每個數字相加求其總合，並判斷該數是否為 3 的倍數。 $8+6+4+2+\square=20+\square$ 要能被 3 整除的偶數，因此 $\square=4$ 。

練習 1：

- (1) 在 200~400 之間 12 的倍數有幾個呢？
- (2) 2 位數中 7 的倍數有多少個？
- (3) 若 a 為自然數，且 $105 \times a$ 是 24 的倍數，求 a 最小值為何？
- (4) 若五位數 5566□ 中有因數 22，則 □ 應為多少呢？

解：

- (1) $200 \div 12 = 16\Lambda 8$ ； $400 \div 12 = 33\Lambda 4$ ，取 $33-16=17$ ；共有 17 個。
- (2) 2 位數包含 10~99； $99 \div 7 = 14\Lambda 1$ ； $10 \div 7 = 1\Lambda 3$ ；7 的倍數有 $14-1=13$ 個。
- (3) $105 \times a$ 是 24 的倍數， $\frac{105 \times a}{24}$ 沒有餘數。 $\frac{105 \times a}{24} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times a}{2^3 \times 3}$ 為正整數；
因此 a 最小為 $2^3 = 8$ 。

(4) 因數 22 有 2 與 11 的因數，因此 5566□ 為 2 與 11 的倍數。

先求 2 的倍數：末位數字要 $\square=0、2、4、6、8$ 。

再判斷 11 的倍數： $(5+6+\square)-(5+6)=\square$ ； $\square=0$ 或 11 (11 不合)

故 $\square=0$ 。

【十分鐘即時練習】

- (1) 楊丞林要將 42 顆糖果分給粉絲，而且每堆（包含分成一堆）糖果數目要相同，則她有 8 種分法。經紀人告訴他每堆至少要有 5 顆以上，則她的分法剩下 5 種。
- (2) 裴湧駿與影迷的見面會，有六個幸運兒 A、B、C、D、E、F 可以分到巧克力，這一包韓國的巧克力大約有 40~43 顆，而且這六人同坐在一圓桌，裴湧駿從 A 粉絲依序輪流分給她們，每人每次分一顆，結果 E 粉絲分到最後一顆，這包巧克力最有可能是 41 幾顆呢？
詳解：E 粉絲排序第五， $E \div 6$ 餘 5； $E=6 \times \text{商數}+5$ ；商數應為正整數；所以從 40~43 中選取 41，只有 $41 \div 6$ 餘 5 符合。
- (3) 36、123、190、324、665、47 六個數中，有 3 個是 2 個倍數。
- (4) (C) 97 減去下列哪一個數以後是 7 的倍數？(A)2 (B)4 (C)6 (D)8。
- (5) (D) 下列哪一個數可以整除 48？(A)7 (B)9 (C)13 (D)16。
- (6) (C) 下列哪一個敘述是錯的？(A)0 是任意整數的倍數；(B)1 是任意整數的因數；(C)因為 $72=8 \times 9$ ，所以 8 是 72 的倍數；(D)因為 $28=4 \times 7$ ，所以 28 是 4 的倍數。

能力二：質數與質因數分解

一、質數的定義

- 質數：一個大於 1 的正整數，除了 1 與本身之外沒有其他的因數；亦即只有兩個因數就是 1 與本身。
- 合數：一個正整數除了 1 與本身之外，還有其他的因數，亦即有三個（含）以上因數的正整數謂之。
- 質因數：一個正整數可以分解成為一個或以上不同的質數相乘積，這些質數為該整數的質因數；換句話說，質因數既是因數也是質數。

Ex： $7=1 \times 7$ ； $13=1 \times 13$ ； $101=1 \times 101$ 等數，其因數僅有 1 及本身兩個因數，則稱 7、13、101 為質數。

Ex： $6=1 \times 6=2 \times 3$ ； $14=1 \times 14=2 \times 7$ ； $56=1 \times 56=2 \times 28=4 \times 14=7 \times 8$ 等數，其因數有三個（含）以上；則稱 6、14、56 為合數。

Ex：18 有因數：1、2、3、6、9、18 等 6 個因數；其中 2、3 是質數，此時便稱 2、3 是 18 的質因數。

二、質數的性質

1. 質數中最小的數是 2。因為【質數=1×本身】，因此最小的質數是 2。
(質數中最大的數為無限大，目前用電腦計算出最大的質數是 2001 年找出的 $2^{13466917} - 1$ ，是一個 4053946 位數的整數。)
2. 質數中唯一的偶數是 2。
(目前科學家常用十七世紀初法國數學家梅森尼提出的梅森尼質數 $n = 2^p - 1$ 求最大質數，但是並沒有發現大於 2 的偶數。)
3. 合數中最小的數是 4，最大的數是無限大。
4. 【1】沒有質因數。($1 = 1 \times 1$ ，因為 1 不是質數，所以 1 不是質因數。)
5. 【0】是任意數的倍數，因此任意質數都是 0 的質因數。
6. 100 以內的質數 (有 25 個，要記起來!) : 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

三、標準分解式 (質因數分解)

1. 標準分解式的定義：將一個合數，分解成【質因數的連乘積】，這樣的式子稱為【標準分解式】，這樣子的過程稱為【質因數分解】。
2. 質因數的連乘積有時候會以【指數記法】呈現。
3. 指數記法係指將相同數的連乘積之次數記在該數的右上方。

$$\underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n \text{ 個}} = a^n$$

← 指數
← 底數

Ex : $120 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ 個}} \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

4. 質因數分解最常運用【短除法】來分解一個 (含) 以上的數。

Ex :

2	90
3	45
3	15
5	3
1	1

2	90	180
3	45	90
3	15	30
5	3	6
1	1	2

↑ 質數 ↑ 質數

【質數與合數的判別】

講解 2 :

從 1~25 的整數中，只有 1 個因數的整數有多少個？只有 2 個因數的整數有多少個？

解：⊕ $1 = 1 \times 1 \therefore 1$ 只有 1 個因數。

只有兩個因數的必定是質數，所以 2、3、5、7、11、13、17、19、23 共有 9 個。

練習 2：

下列整數中 36、38、49、50、55、64、100、113 哪些數是質數？哪些整數的因數個數是偶數個？哪些整數的因數個數是奇數個？

解：是質數的只有 113。

因數個數是偶數個必定是非完全平方數，奇數個必定是完全平方數。

$38 = 1 \times 38 = 2 \times 19$ 因為 38 是非完全平方數，所以因數有 1、38、2、19 共 4 個。

$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ 因為 36 是完全平方數，所以因數有 1、36、2、18、3、12、4、9、6 共 9 個。

因此，因數個數是偶數個有：38、50、55、113。因數個數是奇數個有：36、49、64、100。

【質數的特性】

講解 3：

設「 $a \ominus b$ 」代表大於 a 且小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11 與 13 兩個質數，所以 $10 \ominus 15 = 2$ ，若 $30 \ominus c = 2$ ，則 c 可能為哪些數？（94 基測）

解：比 30 大的質數有 31、37、41...，因為 $30 \ominus c = 2$ ，所以 30~ c 之間有 2 個質數，因此， c 有可能是 38、39、40、41。

練習 3：

已知 a 、 b 、 c 是三個相異的質數，且 $a+b=63$ ， $b+c=39$ ， $a+c=98$ ，求此三數應為何？

解：根據加法定則可知，奇數+奇數=偶數，偶數+奇數=奇數，從 $a+b=63$ 可知， a 或 b 其中必有一數是 2（質數），再比較 $b+c=39$ 可知， $a=61$ ， $b=2$ ，則 $c=98-61=37$ 。

【質因數分解】

講解 4：

下列的數 55、57、58、59 哪一個有最小的質因數？

解： $55 = 5 \times 11$ ， $57 = 3 \times 19$ ， $58 = 2 \times 29$ ， $59 = 1 \times 59$ 。因為 2 是最小的質數，所以有最小質因數的數為 58。

練習 4：

有一數 $A = 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14$ ，求 A 的標準分解式為何？ A 的質因數和？

解： $A = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \times 11 \times (2 \times 2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7)$
 $= 2^7 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

A 的質因數和 $= 2+3+5+7+11+13=41$

【十分鐘即時練習】

- (1) 請將 1260 質因數分解 = $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 。
- (2) 最接近 200 的質數為 201。
- (3) 已知 A 數的質因數分解為 $a^3 \times b \times c$ ，其中 a 、 b 、 c 為相異質數，則 A 數最小等於 120。
- (4) 將 5025 寫成標準分解式 $a^x \times b^y \times c^z$ ，則 $a+b+c =$ 75， $x+y+z =$ 4。
- (5) 若 2 和 3 為四位數 $5\square 2\square$ 的因數，且兩個方格內的數字是相同的，則 $\square =$ 4。
- (6) 設 $x = 2^y \times 5 \times 11$ ，且 22 是 x 的因數，20 不是 x 的因數，則 $y =$ 1。
- (7) 設 $A = 22 \times 23 \times 24 \times 25$ 有 a 個相異質因數， $B = 24$ 有 b 個正因數，則 $a =$ 5， $b =$ 8。
- (8) 1~100 的整數中，除以 13 餘數為 2 的整數有 7 個。

能力三：最大公因數與最小公倍數

一、公因數與最大公因數

- 公因數：當一個整數 a 同時是其他整數 b 、 c 、 d ... 的因數時，這一個整數 a 稱做這些整數 b 、 c 、 d ... 的公因數。
- 最大公因數：任意幾個整數的（正）公因數中，最大的數，稱作最大公因數。
- 最大公因數的表示方法：在式子中會採用 (a, b, c) 。在文字上會採用 **g.c.d.**（**greatest common divisor**）來表示。

二、最大公因數的求法：

- 短除法：找出 90、180 的共同質因數，並依序整除，並且兩數都能整除才可，直到沒有共同質因數可以再除為止。

Ex :

2	90	180	
3	45	90	
3	15	30	
5	5	10	
	1	2	

↑
質數

① $(90, 180) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

② $\text{g.c.d.} = 90$

- 指數型：各個整數先分解為標準分解式，找出具有共同的因數，並且這個因數的指數是最小或相同的，再列出連乘積的式子。

Ex : $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \textcircled{2} \times 3^2 \times 5$

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times \textcircled{3^2} \times \textcircled{5}$

① $(90, 180) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

$$\textcircled{2} \text{ g.c.d.} = 90$$

三、公因數與最大公因數的性質

1. 不論有幾個整數，這些整數的最大公因數僅有 1 個。
2. 最大公因數是所有公因數的倍數，所有公因數都是最大公因數的因數。
3. 互質：若有二個整數其最大公因數等於 1，或是這二個整數除了 1 以外沒有其他的公因數，則稱此二數為互質。【叮嚀：二相異質數必定互質，但互質的二數未必為質數。】

$$\text{Ex1: } (24, 36) = 2^2 \times 3 = 12 \quad ; \quad \text{g.cd.} = 12$$

12 的因數有 1、2、3、4、6、12 都是 (24 與 36) 的公因數。

$$\text{Ex2: } \text{互質，但二數都不是質數 } (4, 21) = 1 \quad ; \quad (6, 55) = 1。$$

$$\text{二數都是質數，必定互質 } (13, 19) = 1 \quad ; \quad (23, 97) = 1。$$

【最大公因數與互質】

講解 5：

- (1) 165、231 的最大公因數為何？此二數的公因數為何？
- (2) $(2 \times 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 3 \times 5^2 \times 5^3 \times 7)$ 的 $\text{g.c.d.} = ?$
- (3) 有二組數 $(72, 117)$ 、 $(363, 274)$ 哪一組數是互質？

解：

- (1) $(165, 231) = 33$ ；此二數的公因數必為 33 的因數，故為 1、3、11、33。
- (2) 原式 $= (2^3 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5^5 \times 7) = 2 \times 3 \times 5 = 30$ ； $\text{g.c.d.} = 30$ 。
- (3) $(72, 117) = 3^2 \times 13$ ； $(363, 274) = 1$ 。故 363 與 274 互質。

練習 5：

- (1) 求 75、105、285 的最大公因數為何？
- (2) 求 $5 \times 7^3 \times 11^2$ 、 $5^3 \times 7^2 \times 11$ 、 $5^2 \times 7^5 \times 13$ 這三組數的最大公因數？
- (3) 有三數 78、91、130 是否互質？此三數的公因數個數有幾個呢？

解：

- (1) $(75, 105, 285) = 3 \times 5 = 15$
- (2) $(5 \times 7^3 \times 11^2, 5^3 \times 7^2 \times 11, 5^2 \times 7^5 \times 13) = 5 \times 7^2 = 245$
- (3) $(78, 91, 130) = 13$ 故此三數並非互質。

此三數的最大公因數為 13，其公因數為 1、13，因此，公因數個數有 2 個。

【最大公因數的應用】

講解 6：

五月天想要在錄音室中鋪上海綿墊，錄音室長 560 公分，寬 320 公分，每一塊海綿墊都是正方形，但是要全部鋪滿，不可有空隙，請問五月天要買邊長多大的海

綿墊呢？要幾塊才能鋪滿呢？

解：求 560 與 320 的最大公因數，為海綿墊的邊長。

$$(560, 320) = 2^4 \times 5 = 80$$

$$560 \div 80 = 7, 320 \div 80 = 4, 7 \times 4 = 28$$

Ans：需要邊長 80 公分的海綿墊，共計 28 塊。

練習 6：

5566 偶像團體為了要犒賞粉絲特地製作了一個長方體的蛋糕，此蛋糕長 32 公分、寬 28 公分、高 24 公分，為了給粉絲們吃到最大塊的正方體蛋糕又不剩下，請問可切成幾塊小蛋糕呢？每一個小蛋糕的體積是多少呢？

解：(1) 求 32、28、24 的最大公因數為邊長 $(32, 28, 24) = 4$

$$\text{每邊可以被切成幾等份 } 32 \div 4 = 8, 28 \div 4 = 7, 24 \div 4 = 6$$

$$\text{正方體蛋糕個數} = 8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ 個。}$$

(2) 每一個正方體蛋糕體積 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 立方公分。

Ans：蛋糕個數 $= 8 \times 7 \times 6 = 336$ 個，蛋糕體積 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 立方公分。

講解 7：

黑珍珠蓮霧有 348 個，枇杷有 232 個，水果商打算將全部水果分裝不超過 60 盒，每盒中都要有兩樣水果，並且每一盒的蓮霧要一樣多，枇杷也是，請問最多可以分裝成多少盒？兩樣水果在每盒中的個數為何？

解：求 348 與 232 的最大公因數。 $(348, 232) = 2 \times 2 \times 29$

因為不可超過 60 盒，所以最多僅能裝 $2 \times 29 = 58$ 盒。

$$348 \div 58 = 6, 232 \div 58 = 4$$

Ans：能裝 58 盒，蓮霧每盒有 6 個，枇杷每盒有 4 個。

練習 7：

有一個三角形的露營場地，每邊長為 120 公尺、160 公尺、180 公尺，童軍隊長要求在四周圍插上營火，並且每支營火間隔要相同，而三角形營地的三頂點一定要豎立一支營火，請問要營火幾支？營火的間隔要多少公尺呢？

解： $(120, 160, 180) = 20$

$$120 \div 20 = 6, 160 \div 20 = 8, 180 \div 20 = 9 \text{ (間隔)}$$

因為植樹原理所以每邊要插 7、9、10 支營火。

又三點頂會重複，所以需要插上 $(7 + 9 + 10) - 3 = 23$ 支營火。

Ans：營火 23 支，間隔 20 公尺。

四、公倍數與最小公倍數

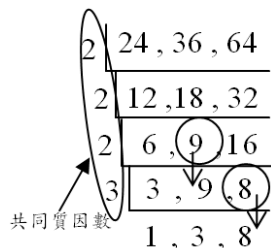
1. 公倍數：當一個整數 a 同時是其他整數 b、c、d... 的倍數時，這一個整數 a 稱做這些整數 b、c、d... 的公倍數。

- 2.最大公倍數：任意幾個整數的公倍數中，最小的數，稱作最小公倍數。
- 3.最大公倍數的表示方法：在式子中會採用 $[a, b, c]$ 。在文字上會採用 **l.c.m.** (lowest common multiple) 來表示。

五、最小公倍數的求法

- 1.短除法：找出 24、36、64 的**共同質因數**當除數，只要有二數或以上的數有共同質因數，都要除盡，直到沒有**共同質因數**可以再除為止，再將所有共同質因數及最終不能除的數連乘，即為所求。

Ex :



$$\begin{aligned} \textcircled{1} [24, 36, 64] &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 3 \times 8 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 2^3 = 2^6 \times 3^2 = 576 \\ \textcircled{2} \text{ l.c.m.} &= 576 \end{aligned}$$

- 2.指數型：各個整數先分解為**標準分解式**，列出全部的因數，若有相同的質因數則找出**指數最大的**，再列出連乘積的式子。

Ex : $24 = 2^3 \times 3, 36 = 2^2 \times \textcircled{3^2}, 64 = \textcircled{2^6}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} [24, 36, 64] &= 2^6 \times 3^2 = 576 \\ \textcircled{2} \text{ l.c.m.} &= 576 \end{aligned}$$

六、公倍數與最小公倍數的性質

- 1.不論有幾個整數，這些整數的最小公倍數僅有 1 個。
- 2.最小公倍數是所有公倍數的因數，所有公倍數都是最小公倍數的倍數。
- 3.以知有 $\frac{c}{a}$ 與 $\frac{d}{b}$ 兩個最簡分數，若要同乘一個【最小正整數】，可使兩數成為【整數】，此數應為 $[a, b]$ 。若要同乘一個【最小正分數】，可使兩數成為整數，此數應為 $\frac{[a, b]}{(c, d)}$ 。
- 4.若 a, b 兩數互質，則 a, b 的最小公倍數為 $a \times b$ 。
- 5.若有 a, b 兩數，則 $a \times b = [a, b] \times (a, b)$

【最小公倍數的計算】

講解 8 :

- (1) 請求出 105, 220, 231 的最小公倍數。
- (2) 請求出 $2^2 \times 3^3, 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ 的最小公倍數。
- (3) 請求出 363, 274 的最小公倍數。

- (4) 有兩分數 $2\frac{1}{26}$, $2\frac{3}{65}$ 同時乘上一個正整數，使其兩數成為正整數，則所乘之數最小為何？

解：(1) $[105, 220, 231] = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 4620$

(2) $[2^2 \times 3^3, 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11] = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$

(3) \ominus 363與274互質， $\therefore [363, 274] = 363 \times 274 = 99462$

(4) $2\frac{1}{26} = \frac{53}{26}$, $2\frac{3}{65} = \frac{133}{65}$, $[26, 65] = 130$, 所乘的最小整數為 130。

練習 8：

- (1) 試比較 $a = 2^5 \times 3^3 \times 5$, $b = 3^2 \times 5^2 \times 17$, $c = 3^3 \times 5^2 \times 7$ 的大小。
- (2) 若 A、B 為正整數， $A \times B = 7524$ ，A 與 B 的最大公因數為 6，則 A 與 B 的最小公倍數為何？
- (3) 若 $A = [40, 60, 90]$; $B = [(40, 60), 90]$; $C = [40, (60, 90)]$ ，求 A、B、C 三數的大小關係。
- (4) 若 $[300, 360, 432] = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ，求 $a+b+c = ?$

解：(1) $\ominus a = 3^2 \times 5 \times (2^5 \times 3) = 3^2 \times 5 \times (96)$
 $b = 3^2 \times 5 \times (5 \times 17) = 3^2 \times 5 \times (85)$
 $c = 3^2 \times 5 \times (3 \times 5 \times 7) = 3^2 \times 5 \times (105)$

(2) $\ominus A \times B = [A, B] \times (A, B)$
 $\therefore [A, B] = 7524 \div 6 = 1254$

(3) $A > B > C$

(4) $a+b+c=6$

【最小公倍數的應用】

講解 9：

- (1) 超級市場賣一罐小於且接近 1000cc 的優酪乳，分別以 3、5、8cc 的量杯去量，結果量到最後，罐子中的優酪乳都只剩 2cc，請問這罐優酪乳再加多少可等於 1000cc 呢？
- (2) 有兩位女同學都喜歡上圖書館讀書，莉婷每 4 天而羿嘉每 6 天會到圖書館一次，某星期天她們兩位相遇在圖書館，子睿非常喜歡她們兩位女同學，若要同時看見她們兩位女同學下一次星期天在圖書館出現，子睿要等幾天之後呢？

解：(1) $[3, 5, 8] = 120$

在 1000cc 範圍內，960 為 120 的最大倍數，所以 $960 + 2 = 962$

$1000-962=38\text{cc}$ ；所以再加上 38cc。

(2) $[4,6,7]=84$ ；再 84 天之後。

練習 9：

- (1) 勝峰、棋凱、正義三位同學，被老師處罰跑 360 公尺的操場，從起跑線同方向出發，勝峰每分鐘跑 72 公尺、棋凱跑 90 公尺、正義跑 60 公尺，則幾分鐘之後三人會會合在起跑處呢？
- (2) 甜甜圈 3 個與蔥油餅 2 個的價錢相同，如果宇倫去買了甜甜圈 4 個與蔥油餅 3 個，共需 170 元，請問甜甜圈與蔥油餅每個要多少錢？

解：(1) 根據速度公式 $s = v \times t$, $t = \frac{s}{v}$

勝峰跑一圈需 $360 \div 72 = 5$ (分)。

棋凱跑一圈需 $360 \div 90 = 4$ (分)。

正義跑一圈需 $360 \div 60 = 6$ (分)。

$[5, 4, 6] = 60$ (分)

(2) $[3, 2] = 6$ ；先把甜甜圈 3 個的總價與蔥油餅 2 個的總價分成 6 等份。

所以，1 個甜甜圈的價錢佔總價 6 等份中的 2 等份 ($6 \div 3 = 2$)；

1 個蔥油的價錢佔總價 6 等份中的 3 等份 ($6 \div 2 = 3$)。

因此，甜甜圈 4 個與蔥油餅 3 個的總價為 $(4 \times 2) + (3 \times 3) = 17$

$170 \div 17 = 10$ ，所以甜甜圈一個 $2 \times 10 = 20$ 元，蔥油餅一個 $3 \times 10 = 30$ 元。

【十分鐘即時練習】

- (1) (A) 長方形磁磚，每塊長 40 公分、寬 60 公分，若磁磚不分割，以這些磁磚拼成一個最小正方形，則需幾塊？(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 16。
- (2) (B) 八卦山長隧道，隧道長 6400 公尺，隧道的兩側每隔 100 公尺裝燈一盞（兩端都裝），今為增強照明，改為每隔 80 公尺裝燈一盞，問施工時有多少盞燈不必移動？(A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36。
- (3) (D) $\frac{1}{12}$ 與 $\frac{1}{18}$ 分別乘下列哪一正整數後，都變成整數？(A) 24 (B) 38 (C) 48 (D) 72。
- (4) 有四個整數 a 、 b 、 c 、 d ， a 與 b 的乘積為 72， b 與 c 的乘積為 54， b 與 d 的乘積為 90。這樣的四個整數全部有 6 組。解析：72、54、90 都是 b 的倍數，所以 b 一定是他們的公因數。 $(72, 54, 90) = 18$ 。 b 可能是 1、2、3、6、9、18 六種可能，由 b 可分別求出 a 、 c 、 d 的值。
- (5) a 為正整數，432 用 a 去除餘 12、570 用 a 去除餘 10，求 a 的最大值為 140 及最小值為 12。解析： $432 - 12 = 420$ ， $570 - 10 = 560$ 。又 420、560 的 g.c.d. = $2 \times 2 \times 5 \times 7$ 。 a 的最大值為 140。又 140 的正因數為 1、2、4、5、7、10、14、20、28、35、70、140。但除數要大於餘數，即 a 的最小值

必須大於 12。

(6) 從 1~200 的正整數中，不論是除以 $\frac{3}{2}$ 或除以 $\frac{4}{3}$ 或除以 $\frac{5}{4}$ ，都還是整數的有

3 個。解析： $\ominus x \div \frac{3}{2} = x \times \frac{2}{3}$ 依此類推， $\therefore x$ 是 3,4,5 的公倍數，求 $[3,4,5] = 60$

$200 \div 60 = 3 \dots 3$ 。故有 3 個數。

【基本觀念題】

(D) 1. 判斷下列何者不是 1599 的因數？(A) 13 (B) 41 (C) 123 (D) 202。

(D) 2. 下列各數何者可以用兩相異質數之和表示之？(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

(B) 3. 下列敘述何者正確？(A) 除了 1 及自己本身之外無其他正因數之自然數稱為質數 (B) 恰有兩個正因數之自然數稱為質數 (C) 不是質數之自然數稱為合數 (D) 以上皆非。

(A) 4. 下列何者為質數？(A) 2153 (B) 1763 (C) 667 (D) 299。

(D) 5. 已知「 $12=5+7$ ，可以用兩個質數的和表示之」，下面四個數 16、25、30、35，哪一個數無法用兩個質數的和來表示呢？(A) 16 (B) 25 (C) 30 (D) 35。

(B) 6. 已知 $x=2 \times 3^{\square} \times 5$ ，假設 540 是 x 的倍數，但 450 不是 x 的倍數，則 $\square=?$ (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1。

(C) 7. 假設 x 為正整數，使得 $\frac{57}{x}$ 也是正整數的 x 有多少個？(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

(C) 8. 有三個正分數 $\frac{35}{12}$ ， $\frac{49}{30}$ ， $\frac{56}{45}$ ，分別乘以一個正數 a 之後，都成為整數，

則 a 的最小值為下列何者？(A) $\frac{160}{7}$ (B) $\frac{7}{160}$ (C) $\frac{180}{7}$ (D) $\frac{7}{180}$ 。

(B) 9. 請求出 $(84, 120, 210) + [12, 15, 45]$ 的值為下列何者？(A) 168 (B) 186 (C) 268 (D) 286。

(A) 10. 下列何者是 $2^2 \times 3$ 的倍數？(A) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (B) $2^3 \times 5$ (C) 2×3^2 (D) $2^2 \times 3^2 \times 7$ 。

(B) 11. 下列哪一個數的質因數僅有 2、3、7 呢？(A) 24 (B) 42 (C) 28 (D) 82。

(C) 12. 有一最簡分數其分母為 40，且其值介於 $\frac{7}{10}$ 與 $\frac{5}{8}$ 之間，求此最簡分數之分子為何？(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28。

(A) 13. 來而復便利商店為慶祝開幕，舉辦可樂促銷活動，有 A、B、C 三種促銷方案，A 方案為每罐打八折；B 方案為買半打送一罐；C 方案為每

罐增加容量 20% 價格不變，則最划算的是哪一個方案呢？(A) A 方案 (B) B 方案 (C) C 方案 (D) 以上皆是。

解：A 方案： $80\% = \frac{4}{5}$ 。B 方案： $6 \div (6+1) = \frac{6}{7}$ 。C 方案： $1 \div (1+20\%) = \frac{5}{6}$ 。

(D) 14. 老師要發給每一位同學一張長、寬分別為 12、15 公分的衛生紙，請問要多少張才能組合出一個正方形呢？(A) 38 (B) 32 (C) 26 (D) 20。

解： $[12, 15] = 60$ ， $60 \div 12 = 5$ ， $60 \div 15 = 4$ ， $5 \times 4 = 20$ 。

(D) 15. 施努筆老師要在一年 18 班進行分組教學，他發現如果 4 人一組、5 人一組、8 人一組可以將班上同學編組完成，請問該班最少有多少人呢？(A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 40。

解： $[4, 5, 8] = 2^3 \times 5 = 40$ 。

【溫故歷屆基測試題】

(D) 1. 若 45 可分解為 axb ，其中 a 、 b 均為正整數，則 $a+b$ 可能的值為下列何者？(A) 43 (B) 23 (C) 28 (D) 18。【92.基測二】

(D) 2. 欲將 n 個邊長為 1 的正方形，拼成一個長、寬皆大於 1 的矩形，且不會剩下任何小正方形，則 n 不可能為下列哪一個數？(A) 81 (B) 85 (C) 87 (D) 89。【90.基測一】

(A) 3. 假設 a 是一個正整數，其所有正因數有：1、2、4、7、14、28。則 a 與 210 的最大公因數為下列何者？(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17。【90.基測一】

(A) 4. 小齊拿了一張長 80 公分、寬 50 公分的紙張，剛好剪出 n 個正方形（其面積大小可以不同），請問 n 的最小值為何？(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20。【91.基測二】

(D) 5. 小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月份與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得的數即為密碼（例如，生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 與 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145）。已知小華的密碼為 2030，求小華出生在幾月份。(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 12。【94.基測二】

(A) 6. 設「 $a \ominus b$ 」代表大於 a 且小於 b 所友直數的個數。例如：大於且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \ominus 15 = 2$ 。若 $30 \ominus c = 2$ ，則 c 可能為下列哪一個數。(A) 38 (B) 42 (C) 46 (D) 50。【94.基測一】

(A) 7. 下列四個數中，哪一個數與 55 互質？(A) 21 (B) 30 (C) 35 (D) 77。【93.基測一】

(B) 8. 將 182 個面積為 1 的正方形，分別緊密地排列成面積為 84 與 98 的兩個長方形 ABCD 與 EFGH。若 $\overline{AB} = \overline{EF}$ 且 $\overline{EF} > 10$ ，則 $\overline{AB} = ?$ (A)

12 (B) 14 (C) 17 (D) 21。【94.基測一】

- (A) 9. 甲、乙、丙三家新聞台每天中午 12:00 同時開始播報新聞，其中：甲台每播報 10 分鐘新聞後就接著播廣告 2 分鐘；乙台每播報 8 分鐘新聞後就接著播廣告 1 分鐘；丙台每播報 15 分鐘新聞後就接著播廣告 3 分鐘。請問在 12:47 時，三家新聞台進行的內容為何？(A) 甲：廣告；乙：新聞；丙：新聞 (B) 甲：新聞；乙：廣告；丙：新聞 (C) 甲：新聞；乙：新聞；丙：廣告 (D) 三家新聞台皆正在播報新聞。【94.基測二】
- (C) 10. 承上題，三家電視台在下列哪一個時間廣告同時結束。(A) 12:33 (B) 12:39 (C) 13:12 (D) 14:00。【94.基測二】

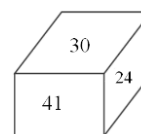
【模擬學力基測試題】

- (B) 1. 下列四個數中哪一個數與 77 互質？(A) 35 (B) 34 (C) 33 (D) 22。
- (A) 2. 你的 YAHOO 電子郵件信箱必須有四位數密碼輸入才能打開，已知密碼 abcd 分別是在 $2520 = 2^a \times b^2 \times c \times d$ 的質因數分解中，請問此信箱密碼是 (A) 3357 (B) 3375 (C) 2357 (D) 2375。

解： $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 。

- (D) 3. 有一正方體每一面有一個二位數字，面對面的數字和一樣，41 對面數字是 a，30 對面數字是 b，24 對面數字是 c，且 a、b、c 都是不相等的質數，求 $a+b+c = ?$ 。(A) 42 (B) 24 (C) 43 (D) 34。

解： $2+41=13+30=19+24 \therefore a=2, b=13, c=19, a+b+c=34$ 。



- (C) 4. 求 a、b 的最大公因數，計算過程如圖，何者正確？(A) $a+b+c=267$ (B) $b-d=100$ (C) $a+b=245$ (D) $d>c$ 。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) a, b} \\ 7 \overline{) 28, c} \\ \quad d, 3 \end{array}$$

解： $d=28 \div 7=4, c=3 \times 7=21, a=28 \times 5=140, b=21 \times 5=105$ 。

- (B) 5. 符號「甲◎乙」代表甲、乙的最小公倍數除以最大公因數，例如： $12 \text{◎} 16 = 48 \div 4 = 12$ ，請問 $64 \text{◎} 224 = ?$ (A) 7 (B) 14 (C) 28 (D) 32。

解： $[64, 224] = 32 \times 2 \times 7 = 448, (64, 224) = 32, 448 \div 32 = 14$ 。

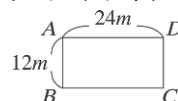
- (D) 6. 老師拿出一張長 240cm、寬 150cm 的圖畫紙，欲剪出 n 個正方形做為抽籤之用，正方形大小相同，但紙張不可以剩下，則 n 的最小值為何？(A) 24 (B) 30 (C) 36 (D) 40。

解： $(240, 150) = 30, 240 \div 30 = 8, 150 \div 30 = 5, 8 \times 5 = 40$ 。

- (B) 7. 老師向蕃薯聯盟飲料店訂了若干杯珍奶，家榮如果每次取 2 杯或每次取 3 杯、或每次取 4 杯、或每次取 5 杯都剛好剩下 2 杯，家榮每次取 7 杯則會剩下 3 杯，請問老師至少訂了多少杯的珍奶呢？(A) 121 (B) 122 (C) 123 (D) 124。

解： $[2, 3, 4, 5] = 60$ ； $60 \times 1 + 2 = 62$ （不合）； $60 \times 2 + 2 = 122$ ； $122 \div 7 = 17 \cdots 3$ ；至少 122 杯。

- (A) 8. 一年 18 班教室的內圍長 24 公分、寬 12 公分，育杰、士民、子揚三人分別被老師處罰青蛙跳以每秒 3 公尺、4 公尺、6 公尺的速率從頂點 A 出發，沿 ABCD 的順序繞著教室的內圍青蛙跳，請問幾秒後三人同時在 A 點相會？(A) 72 (B) 62 (C) 52 (D) 42 (秒)。



解：周長 $24 + 24 + 12 + 12 = 72$ (公尺)

$$72 \div 3 = 24; 72 \div 4 = 18; 72 \div 6 = 12; [24, 18, 12] = 72 \text{ (秒)}$$

- (D) 9. 施努筆老師將一個三位數重複寫二次，例如 $542 \rightarrow 542542$ ，成為六位數，請問此種六位數必定有哪一個質因數？(A) 3 (B) 7 (C) 11 (D) 13。

解：奇數位和 - 偶數位和 = 0 必是 11 的倍數

- (C) 10. 宇宙完全中學舉行模擬考從早上 6 時起，每 45 分敲一下下課鐘，每 50 分敲一下模擬考結束鐘，請問何時下課鐘與模擬考結束鐘齊鳴呢？(A) 上午 11:30 分 (B) 中午 12:30 分 (C) 下午 1:30 分 (D) 下午 2:30 分。

解：鐘鼓齊鳴的時間是 $[45, 50] = 450$ ；早上 6 時到下午 1 時共 7 小時計 420 分，所以 $450 - 420 = 30$ ；下午 1 時 30 分。

【進階練習題】

- (C) 1. 正整數 a 與 1176 的最大公因數為 42，且 140 與 a 的最大公因數為 70，則 a 的最小值為何？(A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 250。

解： $\Theta(a, 1176) = 42$ ， $(140, a) = 70$ ， $\therefore a = [42, 70] = 210$ 。

- (B) 2. 有一正整數 $64 = a \times b$ ，a、b 皆是大於 0 的整數，求 a+b 的最小值為何？(A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14。

解： $64 = 8 \times 8$ ， $8 + 8 = 16$ (最小值)

- (D) 3. 某一正整數除以 71 餘 3；除以 106 餘 4，最大的數為何？(A) 85 (B) 68 (C) 51 (D) 34。

解： $71 - 3 = 68$ ， $106 - 4 = 102$ ， $(68, 102) = 34$

- (A) 4. 若有 a、b 兩數， $a = 33 \times 72 \times 11$ ， $b = 53 \times 73 \times 112$ ，則 a、b 的正公因數有幾個呢？(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3。

解： $(a, b) = 72 \times 11 \Rightarrow$ 公因數有 1、7、11、49、77、 72×11 ，共 6 個。

- (A) 5. 若 $(甲, 72) = 12$ ， $[甲, 72] = 360$ ，求甲 = ? (A) 60 (B) 50 (C) 40 (D) 30。

解：甲 $\times 72 = 12 \times 360$ ，甲 = 60

- (C) 6. 已知 a、b 均為偶數，c 為奇數，且 $a > b > c$ ，則 $a+b$ 、 $a+c$ 、 $a-b$ 、 $a-c$ 、 $a+b+c$ 、 $2 \times a + 3 \times b + 4 \times c$ 六數中，有幾個是偶數？(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

- (D) 7. 下列敘述何者錯誤？(A) 3^{1998} 是 3 的倍數 (B) 5^{1998} 是 5 的倍數 (C) 1998^3 是 3

的倍數 (D) 1998^5 是5的倍數。

- (C) 8. 已知 a 、 b 、 c 為相異的質數，且 A 數 $= a^2 \times b \times c$ ，則下列敘述何者錯誤？
(A) A 數是一個合數 (B) a 是 A 數的因數 (C) A 數剛好有2個質因數。 (D) a 是 A 數的質因數
- (A) 9. 已知 a 是一個大於10的合數，則下列何者不可能為 a 的質因數？ (A) a 數
(B) 2 (C) 5 (D) 10。
- (D) 10. 已知 a 、 b 、 c 為相異質數，則下列何者也有可能是質數？ (A) $a \times b$ (B) b^2
(C) c^3 (D) $b + 2$ 。